XXXVI Olimpíada Matemática dos Países do Cone Sul

Primeiro Dia

Minas, Uruguai, 6 de junho de 2025

Duração da prova: 4 horas.

Cada problema vale 10 pontos.

Problema 1

Dado um quadrado $ABCD$, seja P um ponto no segmento BC e seja G o ponto de interseção de AP com a diagonal DB. A reta perpendicular ao segmento AP por G corta o lado CD no ponto E. Seja K o ponto no segmento GE tal que $AK = PE$. Seja Q o ponto de interseção da diagonal AC com o segmento KP.

Demonstre que os pontos E, K, Q e C pertencem a uma mesma circunferência.

Problema 2

Dizemos que um par de inteiros positivos (n, m) é *minuano* se ele cumpre as duas condições a seguir:

- n tem uma quantidade par de divisores positivos.
- Se $d_1, d_2, \ldots, d_{2k}$ são todos os divisores positivos de n, com $1 = d_1 < d_2 < \ldots < d_{2k} = n$, então todos os divisores positivos de m são

$$1, d_1 + d_2, d_3 + d_4, d_5 + d_6, \ldots, d_{2k-1} + d_{2k}.$$

Encontre todos os pares minuanos.

Problema 3

Em cada casinha de um tabuleiro 4×11 está escrito o número 1. Um *movimento* consiste em escolher um inteiro positivo k e uma casinha, e multiplicar por k os números escritos na casinha escolhida e em suas vizinhas. É possível que, depois de uma quantidade finita de movimentos, em cada casinha do tabuleiro esteja escrito o número 2025^{2026}?

Nota: Duas casinhas são vizinhas se compartilham um lado.

XXXVI Olimpíada Matemática dos Países do Cone Sul

Segundo Dia

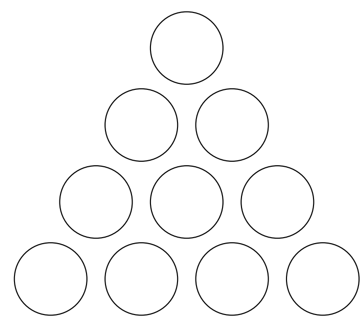
Minas, Uruguai, 7 de junho de 2025

Duração da prova: 4 horas.

Cada problema vale 10 pontos.

Problema 4

Lucero e Pablo jogam no tabuleiro da figura. Lucero joga primeiro e eles jogam alternadamente. Em cada turno, o jogador escolhe um dos círculos não pintados da linha inferior e o pinta de azul, verde ou roxo. E assim segue até completar a linha inferior em 4 turnos.



Depois, o resto do tabuleiro é pintado de acordo com as seguintes regras:

- Se dois círculos adjacentes em uma linha são da mesmo cor, o círculo superior adjacente a esses círculos é pintado da mesma cor.
- Se dois círculos adjacentes em uma linha são de cores distintas, o círculo superior adjacente a esses círculos é pintado da terceira cor.

Se repete este procedimento até que todos os círculos do tabuleiro estejam pintados. Lucero ganha se o círculo superior está pintado de roxo ou verde, e Pablo ganha se ele está pintado de azul.

Determine quem tem a estratégia vencedora.

Problema 5

Seja $ABCD$ um quadrilátero convexo de lados AB, BC, CD e DA, com $AB > BC$, que satisfaz:

$$\angle ABD = 60^\circ, \quad \angle CBD = 60^\circ, \quad \angle ACD = 30^\circ.$$

Prove que $\angle BAC = \angle DAC$.

Problema 6

Sejam $n \geq 2$ e $N = 2^n$. Seja $A_1, A_2, \ldots, A_N$ uma permutação (ordenação) de todos os subconjuntos de $X = \{1, 2, \ldots, n\}$. Determine o maior valor possível de

$$S = \sum_{i=1}^{N} |A_i \cap A_{i+1}| \cdot |A_i \cup A_{i+1}|$$

onde $A_{N+1} = A_1$.

Nota: $|B|$ denota a quantidade de elementos do conjunto B.