4ª COMPETIÇÃO JACOB PALIS JÚNIOR DE MATEMÁTICA

Nível 1 (6º ou 7º ano do Ensino Fundamental)

Testes

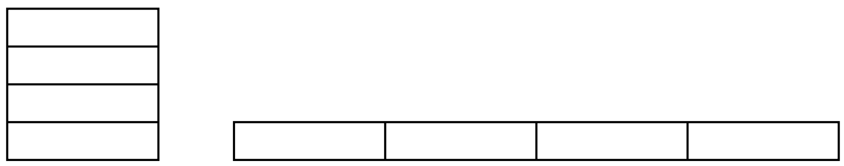
Importante: cada problema de 1 a 15 possui uma única alternativa como resposta.

1. No dia 08/06/2025, se uma pessoa somar sua idade e o ano do seu nascimento, o resultado será

(A) sempre 2024. (B) sempre 2025. (C) sempre 2026. (D) 2024 ou 2025. (E) 2025 ou 2026.

---

2. Maria tinha um papel em forma de quadrado de área 400 cm^2. Ela fez 3 cortes horizontais no papel para formar 4 retângulos congruentes. Em seguida, ela colou os retângulos usando os lados menores para formar um retângulo mais longo. Os lados menores de retângulos consecutivos se encostam completamente e não há sobreposição de áreas. Qual é o perímetro do retângulo longo?



(A) 80 cm (B) 150 cm (C) 160 cm (D) 170 cm (E) 180 cm

---

3. Um número é dito "grandinho" quando pelo menos um dos seus algarismos é maior ou igual a 5. Por exemplo, 99, 50 e 25 são grandinhos, mas 20 e 13 não são. Existem quantos números grandinhos de dois algarismos?

(A) 50 (B) 60 (C) 70 (D) 80 (E) 90

---

4. Sabemos que o conjunto de números $\{a, b, c\}$ é igual ao conjunto $\{1, 2, 3\}$, mas não sabemos qual letra é cada número. Sobre os números $a + b + c$, $ab + c$ e abc podemos afirmar que

(A) exatamente um deles é par.
(B) exatamente dois deles são pares.
(C) exatamente três deles são pares.
(D) há duas possibilidades para a quantidade de pares.
(E) há três possibilidades para a quantidade de pares.

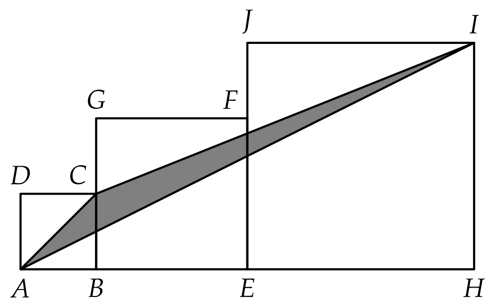
---

5. Lucas acompanha os preços de cartas colecionáveis numa loja online. Certo dia a carta especial custava V reais. No dia seguinte o preço da mesma carta teve um aumento de $P\%$ e passou a custar $V + \frac{P}{2}$ reais. Qual é o valor de V ?

(A) 25 reais (B) 50 reais (C) 100 reais (D) 200 reais (E) 400 reais

---

6. Os pontos A, B, E e H estão sobre uma reta. Do mesmo lado dessa reta são construídos os quadrados $ABCD$, $BEFG$ e $EHIJ$ com lados 1, 2 e 3, respectivamente. Qual é a área do triângulo ACI ?



(A) 1 (B) 1,5 (C) 2 (D) 2,5 (E) 3

---

7. O professor Juca olhou a data em um mostrador digital no formato DD/MM/AA e notou que AA-DD era um múltiplo positivo de MM. Ele decidiu chamar os dias com essa propriedade de *dividatas*. Por exemplo, 07/06/25 é uma dividata, pois $25 - 07 = 25 - 7 = 18$ é um número positivo e é múltiplo de $06 = 6$. O dia 6 de maio é conhecido como o dia brasileiro da matemática. Veja que 06/05/25 não é uma dividata, mas 06/05/26 é! Quantas vezes o dia 6 de maio será uma dividata de 6 de maio de 2025 até 6 de maio de 2099?

(A) 8 (B) 10 (C) 15 (D) 16 (E) 20

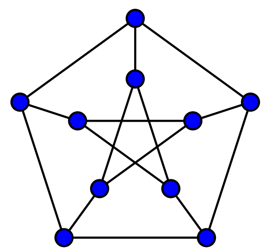
---

8. Ao realizar uma pesquisa um cientista notou que a soma das idades dos participantes era igual a 900. Ele notou que daqui a exatamente 20 anos a soma das idades das pessoas será o dobro do que é hoje. Quantas pessoas têm no grupo?

(A) 10 (B) 15 (C) 30 (D) 45 (E) 90

---

9. A figura abaixo representa o mapa do Reino Estrelado. As bolinhas representam cidades e as ligações representam estradas entre as cidades. Um conjunto de cidades é chamado *independente* se não existem duas cidades pertencentes a ele que estejam conectadas por uma estrada. Qual é o número máximo de cidades que um conjunto independente no Reino Estrelado pode ter?



(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5 (E) 6

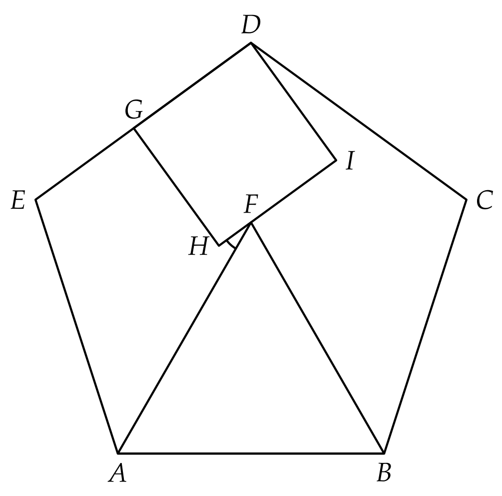
---

10. Um número é *impressionante* quando é divisível por cada um de seus algarismos. Por exemplo, 48 é impressionante, pois 48 é divisível por 4 e por 8. Quantos são os números impressionantes de dois algarismos?

(A) 14 (B) 13 (C) 10 (D) 9 (E) 5

---

11. A figura a seguir mostra um pentágono regular $ABCDE$, um triângulo equilátero ABF e um quadrado $DGHI$. Sabe-se que o ponto F está sobre o lado HI. Qual é a medida em graus do ângulo $\angle AFH$?



(A) 12° (B) 15° (C) 18° (D) 20° (E) 24°

---

12. Diamantino nasceu no ano $19AB$, em que A e B são algarismos. Sua filha Rubi nasceu em $20CD$, em que C e D são algarismos. Se Diamantino tivesse nascido em $19CD$ e Rubi tivesse nascido em $20AB$, a diferença entre os dois anos de nascimento seria sete vezes a diferença entre os dois anos de nascimento verdadeiros. A diferença entre os anos de nascimento verdadeiros é

(A) 20 (B) 22 (C) 24 (D) 25 (E) 30

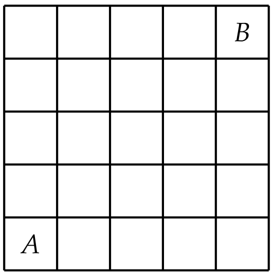
---

13. Seja A um subconjunto do conjunto $\{1, 2, 3, ..., 10\}$ de modo que não existem dois elementos a e b de A tal que a diferença $a - b$ seja um número primo. Qual é o número máximo de elementos que o conjunto A pode ter?

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5

---

14. Em um tabuleiro 5×5, um rei é posicionado na casa inferior esquerda (A) e deve se movimentar até a casa superior direita (B). Ele pode se mover apenas uma casa por vez: para cima ($\uparrow$), para a direita ($\rightarrow$) ou na diagonal ($\nearrow$). Quantos caminhos existem de A até B?



(A) 70 (B) 120 (C) 241 (D) 321 (E) 361

---

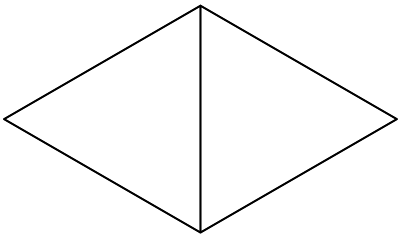
15. Qual é o menor inteiro positivo $n \geq 3$ tal que se girarmos um polígono regular P de n lados 2025° em torno do seu centro obtemos um polígono regular P' com vértices nas mesmas posições de P?

(A) 4 (B) 8 (C) 12 (D) 16 (E) 24

Respostas numéricas

Importante: para cada problema de 16 a 20 você deve indicar um número inteiro entre 0000 e 9999 como resposta.

16. João gosta de brincar com pecinhas de madeira em forma de polígonos regulares que possuem lados com medidas de 2 cm. Ele junta duas ou mais pecinhas encostando completamente um lado de uma peça com um lado da outra peça para formar uma peça maior. Por exemplo, na figura a seguir ele juntou dois triângulos equiláteros para formar um polígono com quatro lados.



Em outra dessas brincadeiras ele tomou um triângulo equilátero juntou um quadrado com um dos lados, um pentágono com outro lado e um hexágono com o terceiro lado. Qual é o perímetro da figura formada em centímetros?

Resposta do problema 16:

---

17. O professor Reginaldo gosta de se exercitar na esteira. Certo dia ele decidiu correr 3,5 km com velocidade de 10 km/h. Durante a corrida o painel mostra 8 algarismos, os primeiros 4 algarismos K_1K_2, V_1V_2 indicam a distância percorrida em quilômetros com duas casas depois da vírgula (no começo mostra 00,00) e os outros 4 algarismos indicam $X_1X_2 : Y_1Y_2$ os minutos e segundos que faltam para o professor terminar sua corrida (no final deve mostrar 00:00). Em certo momento o professor percebeu que os primeiros 4 algarismos ficaram exatamente iguais aos 4 últimos (o primeiro algarismo igual ao quinto, o segundo igual ao sexto e assim por diante). Nesse momento a soma de todos os 8 algarismos era igual a quanto?

Resposta do problema 17:

---

18. Certo inteiro positivo n tem dois algarismos. O algarismo das dezenas é a, e o das unidades é b. Sabe-se que $n = b^3 - 2^a$. Qual é a soma dos possíveis valores de n?

Resposta do problema 18:

---

19. Esmeralda tem um dado de seis faces com os números de 1 a 6, de modo que cada número aparece exatamente uma vez numa das faces e que quaisquer duas faces opostas têm soma dos números escritos nelas igual a 7. Para cada aresta do dado, Esmeralda escreve o produto das duas faces que contêm essa aresta. Em seguida, ela soma os números escritos nas arestas. Qual é a soma dos produtos que Esmeralda escreveu nas arestas?

Resposta do problema 19:

---

20. Abaixo, temos o logo da Associação Olimpíada Brasileira de Matemática:

O logo é formado por um segmento de reta, três semicircunferências e três circunferências, sendo dividido em 12 regiões: 2 semicírculos, 3 círculos e 7 regiões limitadas por três arcos de circunferência.

Determine de quantas maneiras é possível pintar essas 12 regiões utilizando as cores azul, branca, amarela ou verde, de modo que:

(i) círculos ou semicírculos que se tocam tenham cores diferentes;

(ii) regiões delimitadas por um arco em comum tenham cores diferentes.

Resposta do problema 20:

4ª COMPETIÇÃO JACOB PALIS JÚNIOR DE MATEMÁTICA

Nível 1 (6º ou 7º ano do Ensino Fundamental)

Nome: ______________________________

Escola: ______________________________

Ano: (   ) 8º   (   ) 9º

Testes

1.	A	B	C	D	E
2.	A	B	C	D	E
3.	A	B	C	D	E
4.	A	B	C	D	E
5.	A	B	C	D	E
6.	A	B	C	D	E
7.	A	B	C	D	E
8.	A	B	C	D	E
9.	A	B	C	D	E
10.	A	B	C	D	E
11.	A	B	C	D	E
12.	A	B	C	D	E
13.	A	B	C	D	E
14.	A	B	C	D	E
15.	A	B	C	D	E

Respostas numéricas

16.				
17.				
18.				
19.				
20.				

4ª COMPETIÇÃO JACOB PALIS JÚNIOR DE MATEMÁTICA

Nível 2 (8º ou 9º ano do Ensino Fundamental)

Testes

Importante: cada problema de 1 a 15 possui uma única alternativa como resposta.

1. No dia 08/06/2025, se uma pessoa somar sua idade e o ano do seu nascimento, o resultado será

(A) sempre 2024. (B) sempre 2025. (C) sempre 2026. (D) 2024 ou 2025. (E) 2025 ou 2026.

---

2. Lucas acompanha os preços de cartas colecionáveis numa loja online. Certo dia a carta especial custava V reais. No dia seguinte o preço da mesma carta teve um aumento de $P\%$ e passou a custar $V + \frac{P}{2}$ reais. Qual é o valor de V ?

(A) 25 reais (B) 50 reais (C) 100 reais (D) 200 reais (E) 400 reais

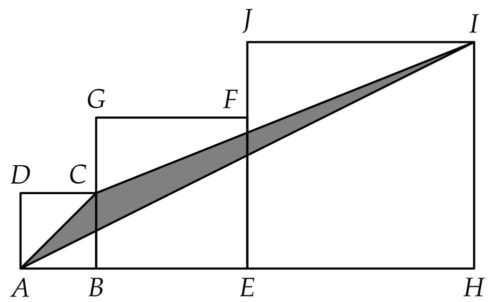
---

3. Um número é dito "grandinho" quando pelo menos um dos seus algarismos é maior ou igual a 5. Por exemplo, 99, 50 e 25 são grandinhos, mas 20 e 13 não são. Existem quantos números grandinhos de dois algarismos?

(A) 50 (B) 60 (C) 70 (D) 80 (E) 90

---

4. Os pontos A, B, E e H estão sobre uma reta. Do mesmo lado dessa reta são construídos os quadrados $ABCD$, $BEFG$ e $EHIJ$ com lados 1, 2 e 3, respectivamente. Qual é a área do triângulo ACI ?



(A) 1 (B) $1,5$ (C) 2 (D) $2,5$ (E) 3

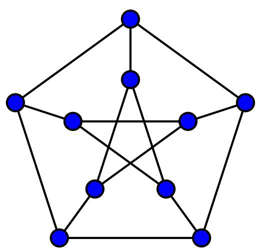
---

5. Diamantino nasceu no ano $19AB$, em que A e B são algarismos. Sua filha Rubi nasceu em $20CD$, em que C e D são algarismos. Se Diamantino tivesse nascido em $19CD$ e Rubi tivesse nascido em $20AB$, a diferença entre os dois anos de nascimento seria sete vezes a diferença entre os dois anos de nascimento verdadeiros. A diferença entre os anos de nascimento verdadeiros é

(A) 20 (B) 22 (C) 24 (D) 25 (E) 30

---

6. A figura abaixo representa o mapa do Reino Estrelado. As bolinhas representam cidades e as ligações representam estradas entre as cidades. Um conjunto de cidades é chamado *independente* se não existem duas cidades pertencentes a ele que estejam conectadas por uma estrada. Qual é o número máximo de cidades que um conjunto independente no Reino Estrelado pode ter?



(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5 (E) 6

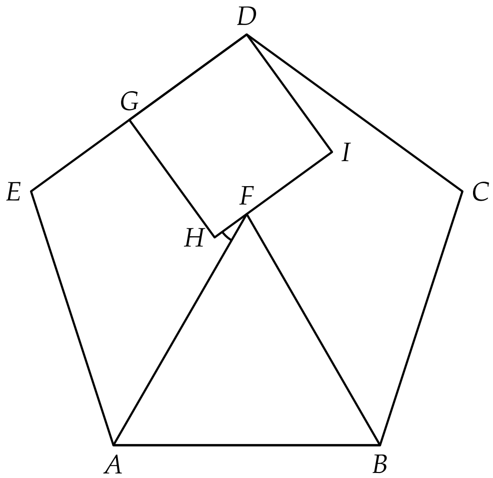
---

7. Sabemos que o conjunto de números $\{a, b, c\}$ é igual ao conjunto $\{1, 2, 3\}$, mas não sabemos qual letra é cada número. Sobre os números $a + b + c$, $ab + c$ e abc podemos afirmar que

(A) exatamente um deles é par.
(B) exatamente dois deles são pares.
(C) exatamente três deles são pares.
(D) há duas possibilidades para a quantidade de pares.
(E) há três possibilidades para a quantidade de pares.

---

8. A figura a seguir mostra um pentágono regular $ABCDE$, um triângulo equilátero ABF e um quadrado $DGHI$. Sabe-se que o ponto F está sobre o lado HI. Qual é a medida em graus do ângulo $\angle AFH$?



(A) 12° (B) 15° (C) 18° (D) 20° (E) 24°

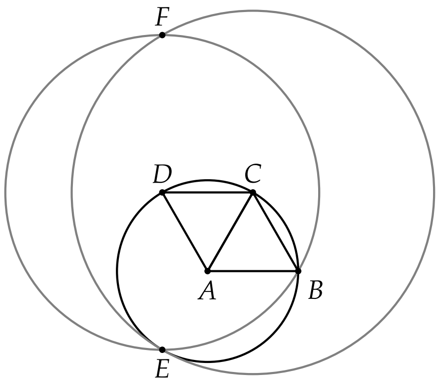
---

9. Seja A um subconjunto do conjunto $\{1, 2, 3, ..., 10\}$ de modo que não existem dois elementos a e b de A tal que a diferença $a - b$ seja um número primo. Qual é o número máximo de elementos que o conjunto A pode ter?

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5

---

10. Na figura a seguir uma circunferência de centro A passa pelos pontos B, C, D e E. O ponto A é o ponto médio de CE. A circunferência de centro D que passa por E e a circunferência de centro C que passa por E se encontram novamente no ponto F diferente de E. Sabendo que os triângulos ABC e ACD são equiláteros, qual é a medida do ângulo $\angle EFB$ em graus?



(A) 15° (B) 20° (C) 30° (D) 40° (E) 45°

---

11. Qual é o menor inteiro positivo $n \geq 3$ tal que se girarmos um polígono regular P de n lados 2025° em torno do seu centro obtemos um polígono regular P' com vértices nas mesmas posições de P?

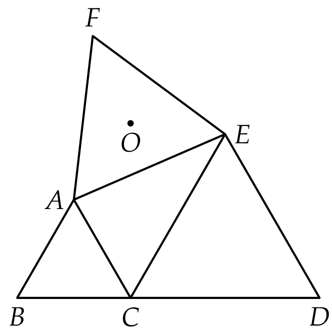
(A) 4 (B) 8 (C) 12 (D) 16 (E) 24

---

12. Os reais não nulos a e b são raízes da equação $x^2 - (a^2 - b^2)x + a^2b^2 = 0$. Se $a > b > 0$, o valor de $a^3 + b^3$ é

(A) $\sqrt{5}$ (B) $2\sqrt{5}$ (C) 5 (D) $3\sqrt{5}$ (E) $4\sqrt{5}$

13. Na figura a seguir, ABC, CDE e AEF são triângulos equiláteros, com C sobre o segmento BD. O ponto O é o centro do triângulo AEF.



A medida do ângulo $\angle ACO$

(A) é sempre 30°.
(B) é sempre 60°.
(C) é 30° ou 60°, assumindo os dois valores dependendo de C.
(D) é 15° ou 30°, assumindo os dois valores dependendo de C.
(E) pode assumir infinitos valores.

---

14. Quantos divisores positivos de $20^{25} \cdot 25^{20}$ são múltiplos de 20^{25} ou de 25^{20}?

(A) 46 (B) 545 (C) 546 (D) 1341 (E) 1367

---

15. Esmeralda escreve na casa na linha m e coluna n de um tabuleiro 201×201 o produto $m \cdot n$. O tabuleiro é pintado como no xadrez, de preto e branco. Esmeralda soma os números nas casas brancas, obtendo B e soma os números nas casas pretas, obtendo P. A diferença, em módulo, entre P e B, é

(A) 0 (B) 1 (C) 10000 (D) 10201 (E) 40401

Respostas numéricas

Importante: para cada problema de 16 a 20 você deve indicar um número inteiro entre 0000 e 9999 como resposta.

16. O professor Reginaldo gosta de se exercitar na esteira. Certo dia ele decidiu correr $3,5$ km com velocidade de 10 km/h. Durante a corrida o painel mostra 8 algarismos, os primeiros 4 algarismos K_1K_2, V_1V_2 indicam a distância percorrida em quilômetros com duas casas depois da vírgula (no começo mostra 00,00) e os outros 4 algarismos indicam $X_1X_2 : Y_1Y_2$ os minutos e segundos que faltam para o professor terminar sua corrida (no final deve mostrar 00:00). Em certo momento o professor percebeu que os primeiros 4 algarismos ficaram exatamente iguais aos 4 últimos (o primeiro algarismo igual ao quinto, o segundo igual ao sexto e assim por diante). Nesse momento a soma de todos os 8 algarismos era igual a quanto?

Resposta do problema 16: | | | | |

---

17. Certo inteiro positivo n tem dois algarismos. O algarismo das dezenas é a, e o das unidades é b. Sabe-se que $n = b^3 - 2^a$. Qual é a soma dos possíveis valores de n?

Resposta do problema 17: | | | | |

---

18. Dizemos que dois números estão *conectados* se é possível ir de um para o outro somando dois algarismos consecutivos de um deles e trocando pelo resultado, mantendo os demais algarismos como estão. Por exemplo, 206 e 20**15** estão conectados, pois podemos trocar 15 por $6 = 1 + 5$, e 20**78** e 2015 também estão conectados, pois podemos trocar 78 por $15 = 7 + 8$. Dizemos que dois números estão *ligados* se é possível ir de um até o outro usando zero ou mais números conectados intermediários. Por exemplo, 206 e 2078 estão ligados, pois podemos usar 2015 como intermediário. Quantos números de 1 a 2025 são ligados ao 2025 (incluindo ele mesmo)?

Resposta do problema 18: | | | | |

19. O produto de 2025 inteiros positivos é 2025^k, para algum k inteiro positivo. Sabe-se que nenhum dos 2025 inteiros é igual a 1. Qual é o menor valor possível de k?

Resposta do problema 19:

20. Seja $PABCD$ um pentágono inscritível com $\angle APB = \angle BPC = \angle CPD$. Além disso, sabe-se que $PA = 9$, $PB = 15$ e $PC = 16$. Se o valor de PD pode ser escrito na forma $\frac{p}{q}$ com p e q inteiros positivos primos entre si, determine o valor de $p + q$.

Resposta do problema 20:

4ª COMPETIÇÃO JACOB PALIS JÚNIOR DE MATEMÁTICA

Nível 2 (8º ou 9º ano do Ensino Fundamental)

Nome: ______________________________

Escola: ______________________________

Ano: (   ) 8º   (   ) 9º

Testes

1.	A	B	C	D	E
2.	A	B	C	D	E
3.	A	B	C	D	E
4.	A	B	C	D	E
5.	A	B	C	D	E
6.	A	B	C	D	E
7.	A	B	C	D	E
8.	A	B	C	D	E
9.	A	B	C	D	E
10.	A	B	C	D	E
11.	A	B	C	D	E
12.	A	B	C	D	E
13.	A	B	C	D	E
14.	A	B	C	D	E
15.	A	B	C	D	E

Respostas numéricas

16.				
17.				
18.				
19.				
20.				

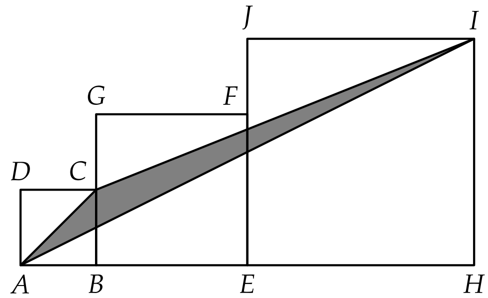
4ª COMPETIÇÃO JACOB PALIS JÚNIOR DE MATEMÁTICA

Nível 3 (1º, 2º ou 3º ano do Ensino Médio)

Testes

Importante: cada problema de 1 a 15 possui uma única alternativa como resposta.

1. Os pontos A, B, E e H estão sobre uma reta. Do mesmo lado dessa reta são construídos os quadrados $ABCD$, $BEFG$ e $EHIJ$ com lados 1, 2 e 3, respectivamente. Qual é a área do triângulo ACI ?



(A) 1 (B) 1,5 (C) 2 (D) 2,5 (E) 3

---

2. Lucas acompanha os preços de cartas colecionáveis numa loja online. Certo dia a carta especial custava V reais. No dia seguinte o preço da mesma carta teve um aumento de $P\%$ e passou a custar $V + \frac{P}{2}$ reais. Qual é o valor de V ?

(A) 25 reais (B) 50 reais (C) 100 reais (D) 200 reais (E) 400 reais

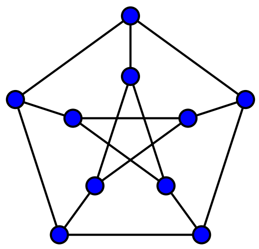
---

3. Um número é dito "grandinho" quando pelo menos um dos seus algarismos é maior ou igual a 5. Por exemplo, 99, 50 e 25 são grandinhos, mas 20 e 13 não são. Existem quantos números grandinhos de dois algarismos?

(A) 50 (B) 60 (C) 70 (D) 80 (E) 90

---

4. A figura abaixo representa o mapa do Reino Estrelado. As bolinhas representam cidades e as ligações representam estradas entre as cidades. Um conjunto de cidades é chamado *independente* se não existem duas cidades pertencentes a ele que estejam conectadas por uma estrada. Qual é o número máximo de cidades que um conjunto independente no Reino Estrelado pode ter?



(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5 (E) 6

---

5. Qual é o menor inteiro positivo $n \geq 3$ tal que se girarmos um polígono regular P de n lados 2025° em torno do seu centro obtemos um polígono regular P' com vértices nas mesmas posições de P?

(A) 4 (B) 8 (C) 12 (D) 16 (E) 24

---

6. Sabemos que o conjunto de números $\{a, b, c\}$ é igual ao conjunto $\{1, 2, 3\}$, mas não sabemos qual letra é cada número. Sobre os números $a + b + c$, $ab + c$ e abc podemos afirmar que

(A) exatamente um deles é par.
(B) exatamente dois deles são pares.
(C) exatamente três deles são pares.
(D) há duas possibilidades para a quantidade de pares.
(E) há três possibilidades para a quantidade de pares.

7. Seja i a unidade imaginária, ou seja, tal que $i^2 = -1$. A sequência a_n é definida por $a_1 = 20$, $a_2 = 25$ e $a_n = a_{n-2} + i \cdot a_{n-1}$. O valor de a_{2025} é

(A) $20i$ (B) $25i$ (C) $-20-25i$ (D) -25 (E) -20

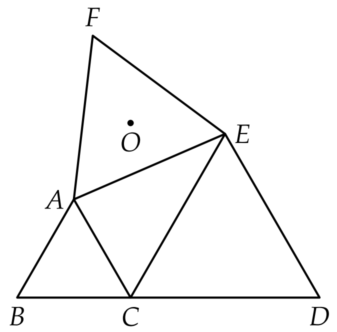
---

8. O conjunto A de números reais positivos é tal que, para todos $a, b \in A$ com $a > b$, $2 \le \frac{a}{b} \le 2025$. Qual é a maior quantidade de elementos distintos de A pode ter?

(A) 10 (B) 11 (C) 12 (D) 2025 (E) 2^{2025}

---

9. Na figura a seguir, ABC, CDE e AEF são triângulos equiláteros, com C sobre o segmento BD. O ponto O é o centro do triângulo AEF.



A medida do ângulo $\angle ACO$

(A) é sempre 30°.
(B) é sempre 60°.
(C) é 30° ou 60°, assumindo os dois valores dependendo de C.
(D) é 15° ou 30°, assumindo os dois valores dependendo de C.
(E) pode assumir infinitos valores.

---

10. Esmeralda escreve na casa na linha m e coluna n de um tabuleiro 201×201 o produto $m \cdot n$. O tabuleiro é pintado como no xadrez, de preto e branco. Esmeralda soma os números nas casas brancas, obtendo B e soma os números nas casas pretas, obtendo P. A diferença, em módulo, entre P e B, é

(A) 0 (B) 1 (C) 10000 (D) 10201 (E) 40401

---

11. Um triângulo tem ângulos internos iguais a α, β e γ, escolhidos ao acaso entre todos os reais positivos tais que $\alpha + \beta + \gamma = 180°$. Qual é a probabilidade de que um dos ângulos seja maior do que 120°?

(A) $\frac{1}{6}$ (B) $\frac{1}{4}$ (C) $\frac{1}{3}$ (D) $\frac{1}{2}$ (E) $\frac{2}{3}$

---

12. No tetraedro $ABCD$, $AB = 3$, $AC = 4$, $BC = 5$ e $BD = 12$. Sabe-se que existe uma esfera tangente a todas as arestas de $ABCD$. O valor de AD é

(A) 10 (B) 11 (C) 12 (D) 13 (E) 14

---

13. Para n inteiro positivo, seja $f(n)$ o menor índice k para o qual existem k expoentes inteiros não negativos $a_1, a_2, \ldots, a_k$ tais que

$$n = \pm 2^{a_1} \pm 2^{a_2} \pm \cdots \pm 2^{a_k},$$

para escolhas adequadas dos sinais $\pm$. Por exemplo, $f(29) = 3$ porque $29 = 2^5 - 2^1 - 2^0$ e não é possível expressar 29 como soma ou subtração de duas potências de 2.

O valor de $f(2025)$ é

(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5 (E) 6

---

14. O menor valor inteiro de $n > 6$ para o qual

$$\binom{n}{6} = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)}{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}$$

é múltiplo de 2025 é

(A) 2025 (B) 2000 (C) 1000 (D) 805 (E) 730

15. Os números reais x, y, z são distintos dois a dois e satisfazem

$$\begin{cases} x + y = yz \\ y + z = zx \\ z + x = xy \end{cases}$$

Então x, y, z são as raízes da equação

(A) $t^3 - 6t^2 + 12t - 8 = 0$.

(B) $t^3 - 3t^2 + 6t - 1 = 0$.

(C) $t^3 + t^2 - 2t - 1 = 0$.

(D) $t^3 - 2t^2 + 4t = 0$.

(E) $t^3 - 8t^2 + 16t - 16 = 0$.

Respostas numéricas

Importante: para cada problema de 16 a 20 você deve indicar um número inteiro entre 0000 e 9999 como resposta.

16. Considere um polígono regular $A_1A_2 \ldots A_n$, de $n > 6$ lados. Os pontos X e Y são distintos, pertencem ao interior do polígono e são tais que A_1A_2X e A_2A_3Y são triângulos equiláteros. A reta XY passa por pelo menos um vértice A_i do polígono. Qual é o menor valor possível de n?

Resposta do problema 16:

17. O produto de 2025 inteiros positivos, não necessariamente distintos, é 2025^k, para algum k inteiro positivo. Sabe-se que nenhum dos 2025 inteiros é igual a 1. Qual é o menor valor possível de k?

Resposta do problema 17:

18. Abaixo, temos o logo da Associação Olimpíada Brasileira de Matemática:

O logo é formado por um segmento de reta, três semicircunferências e três circunferências, sendo dividido em 12 regiões: 2 semicírculos, 3 círculos e 7 regiões limitadas por três arcos de circunferência.

Determine de quantas maneiras é possível pintar essas 12 regiões utilizando as cores azul, branca, amarela ou verde, de modo que:

(i) círculos ou semicírculos que se tocam tenham cores diferentes;

(ii) regiões delimitadas por um arco em comum tenham cores diferentes.

Resposta do problema 18:

19. Existem quantos inteiros n tais que os números $\dfrac{n^2+19}{n+19}$ e $\dfrac{n^2+18}{n+18}$ são inteiros?

Resposta do problema 19: | | | | |

20. Qual é a diferença entre as somas dos algarismos na base binária dos números inteiros positivos $\dfrac{2^{2025}-1}{2^{45}-1}$ e $\dfrac{2^{2025}+1}{2^{45}+1}$?

Resposta do problema 20: | | | | |

4ª COMPETIÇÃO JACOB PALIS JÚNIOR DE MATEMÁTICA

Nível 3 (1º, 2º ou 3º ano do Ensino Médio)

Nome: ____

Escola: ____

Ano: (   ) 1º   (   ) 2º (   ) 3º

Testes

1.	A	B	C	D	E
2.	A	B	C	D	E
3.	A	B	C	D	E
4.	A	B	C	D	E
5.	A	B	C	D	E
6.	A	B	C	D	E
7.	A	B	C	D	E
8.	A	B	C	D	E
9.	A	B	C	D	E
10.	A	B	C	D	E
11.	A	B	C	D	E
12.	A	B	C	D	E
13.	A	B	C	D	E
14.	A	B	C	D	E
15.	A	B	C	D	E

Respostas numéricas

16.				
17.				
18.				
19.				
20.				

4ª COMPETIÇÃO JACOB PALIS JÚNIOR DE MATEMÁTICA

Nível 1 (6º ou 7º ano do Ensino Fundamental)

Respostas

Testes

1. D	2. D	3. C	4. B	5. B
6. B	7. C	8. D	9. C	10. A
11. E	12. D	13. C	14. D	15. B

Respostas Numéricas

Problema	16	17	18	19	20
Resposta	0024	0006	0110	0147	1536

Nível 2 (8º ou 9º ano do Ensino Fundamental)

Respostas

Testes

1. D	2. B	3. C	4. B	5. D
6. C	7. B	8. E	9. C	10. C
11. B	12. B	13. A	14. D	15. D

Respostas Numéricas

Problema	16	17	18	19	20
Resposta	0006	0110	0225	0338	0038

Nível 3 (Ensino Médio)

Testes

1. B	2. B	3. C	4. C	5. B
6. B	7. C	8. B	9. A	10. D
11. C	12. B	13. C	14. E	15. C

Respostas Numéricas

Problema	16	17	18	19	20
Resposta	0012	0338	1536	0008	0946

4ª COMPETIÇÃO JACOB PALIS JÚNIOR DE MATEMÁTICA

Nível 1 (6º ou 7º ano do Ensino Fundamental)

Respostas

Testes

1. D	2. D	3. C	4. B	5. B
6. B	7. C	8. D	9. C	10. A
11. E	12. D	13. C	14. D	15. B

Respostas Numéricas

Problema	16	17	18	19	20
Resposta	0024	0006	0110	0147	1536

Soluções – Testes

1. *Alternativa D*

A idade I é a diferença entre o ano do último aniversário, que pode ser 2024 ou 2025, e o ano de nascimento N. Assim,

$$I = 2024 - N \text{ ou } I = 2025 - N \iff I + N = 2024 \text{ ou } I + N = 2025,$$

ou seja, a soma da idade e do ano de nascimento de cada pessoa é 2024 ou 2025.

---

2. *Alternativa D*

Como $20^2 = 400$, o quadrado tem lado 20 cm. Os quatro retângulos têm dimensões 20 cm e $\frac{20}{4} = 5$ cm. Com isso, as dimensões do retângulo colado são 5 cm e $4 \cdot 20 = 80$ cm, e seu perímetro é $2 \cdot 5 + 2 \cdot 80 = 170$ cm.

---

3. *Alternativa C*

Um número *não* é grandinho quando ambos seus algarismos são menores do que 5. Há 4 possibilidades para o algarismo das dezenas (1 a 4) e 5 possibilidades para o algarismo das unidades (0 a 4). Logo há $4 \cdot 5 = 20$ números de dois algarismos que não são grandinhos.

Como há $9 \cdot 10 = 90$ números de dois algarismos (9 possibilidades para a dezena e 10 para a unidade), $90 - 20 = 70$ números são grandinhos.

---

4. *Alternativa B*

Como a ordem dos números envolvidos não altera o resultado da soma $a + b + c$ nem do produto abc, $a + b + c = 1 + 2 + 3 = 6$ e $abc = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$, ambos pares.

Por outro lado, se $c = 2$ temos $ab + c = 3 \cdot 1 + 2 = 5$, que é ímpar e se $c \neq 2$ então c é ímpar e ab é par, ou seja, de qualquer forma $ab + c$ é ímpar.

Logo sempre há exatamente dois números pares.

---

5. *Alternativa B*

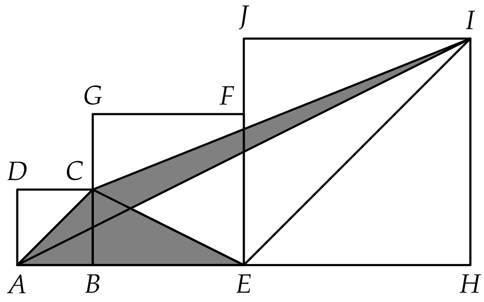
O aumento no preço da carta é

$$\frac{P}{100} \cdot V = \frac{P}{2} \iff V = 50 \text{ reais.}$$

---

6. *Alternativa B*

Trace a diagonal IE, que é paralela à diagonal AC:



Como IAC e EAC têm a mesma base AC e alturas iguais relativas a I e E, a área de ACI é igual à área de ACE, que é

$$\frac{AE \cdot BC}{2} = \frac{3 \cdot 1}{2} = 1{,}5.$$

Observação: A resposta do problema não depende da dimensão do quadrado $EHIJ$.

---

7. *Alternativa C*

Sendo n os dois últimos dígitos do ano, $25 \leq n \leq 99$, 6 de maio de 2000 e n é uma dividata se, e somente se, 5 é divisor de $n - 6$, ou seja, n deixa resto 1 na divisão por 5. Os valores de n são, então $26, 31, 36, \ldots, 96$, em um total de $\frac{96-26}{5} + 1 = 15$ dividatas.

---

8. *Alternativa D*

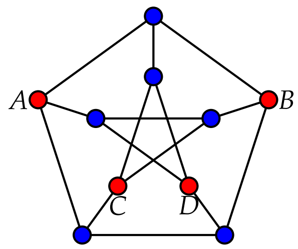
Daqui a 20 anos a soma das idades é $2 \cdot 900 = 1800$, ou seja, aumenta em $1800 - 900 = 900$ anos. Cada pessoa contribui com 20 anos a mais para essa soma, logo a quantidade de pessoas é $\frac{900}{20} = 45$.

---

9. *Alternativa C*

O Reino Estrelado tem dois ciclos de 5 cidades, uma no exterior (o pentágono) e outra no interior (a estrela). Podemos escolher no máximo 2 cidades de cada ciclo. Portanto um conjunto independente tem no máximo 4 cidades.

A seguir mostramos um conjunto independente de 4 cidades, A, B, C, D.



Observação: a configuração do problema é conhecida como *grafo de Petersen*, uma das estruturas mais importantes da *teoria dos grafos*. Pesquise mais sobre ele!

---

10. *Alternativa A*

Seja $AB = 10A + B$ um número impressionante. Então A divide $10A + B$ e, consequentemente, $10A + B - 10A = B$ e B divide $10A + B$ e, consequentemente, $10A + B - B = 10A$. Ou seja, A divide B, que divide $10A$. Com isso, sendo A e B dígitos, com $1 \leq A \leq 9$ e $0 \leq B \leq 9$, $B = A$ ou $B = 2A$ ou $B = 5A$.

Para $B = A$, há 9 possibilidades; para $B = 2A$, há 4 possibilidades (A igual a 1, 2, 3 ou 4); e para $B = 5A$, só é possível $A = 1$ e $B = 5$.

Assim, há 14 números impressionantes de dois algarismos.

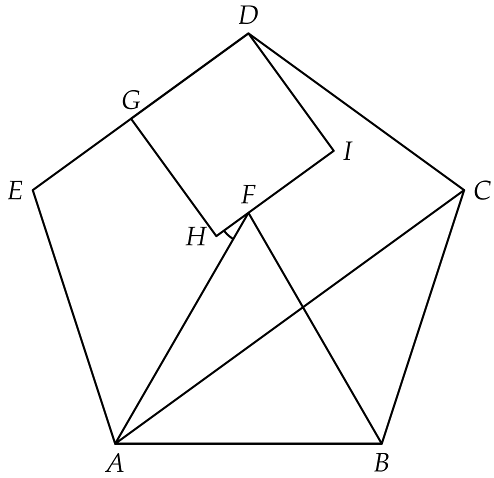
---

11. *Alternativa E*

Solução 1: Temos $\angle CDE = \frac{3 \cdot 180^\circ}{5} = 108^\circ$. Sendo o triângulo CDE isósceles, $\angle DEC = \frac{180^\circ - \angle CDE}{2} = 36^\circ$.

Considerando AB como uma reta horizontal, o ângulo formado por AF com a horizontal é $\angle FAB = 60^\circ$. Sendo DE e HI paralelos, o ângulo formado por HI com a horizontal é igual ao ângulo formado por DE com a horizontal, que é $\angle DEC = 36^\circ$.

Assim, $\angle AFH$ é a diferença entre esses dois ângulos, que é $60^\circ - 36^\circ = 24^\circ$.



Solução 2: Como visto na solução anterior, os ângulos internos do pentágono regular medem 108° e em particular $\angle DEA = \angle EAB = 108°$. Também temos de modo semelhante $\angle CAB = 36°$ e então $\angle EAC = 108° - 36° = 72°$.

Note então que, $\angle EAC + \angle AED = 72° + 108° = 180°$ e então ED é paralelo a AC. Como HI é paralelo a ED, segue que HI e AC são paralelos. Finalmente, por alternos internos:

$$\angle AFH = \angle FAC = \angle FAB - \angle CAB = 60° - 36° = 24°.$$

Solução 3: Vamos calcular os ângulos do pentágono $AEGHF$. Temos que $\angle GEA = 108°$, $\angle EGH = 90°$, $\angle GHF = 360° - 90° = 270°$ e $\angle EAF = \angle EAB - \angle FAB = 108° - 60° = 48°$. Como a soma dos ângulos internos de um pentágono (convexo ou não) é $180°(5-2) = 540°$, segue que

$$\angle AFH = 540° - \angle GHF - \angle EGH - \angle GEA - \angle EAF = 540° - 270° - 90° - 108° - 48° = 24°.$$

---

12. *Alternativa D*

Para simplificar, sejam $x = (AB)$ e $y = (CD)$, de modo que Diamantino nasceu em $1900 + x$ e Rubi nasceu em $2000 + y$.

Assim,

$$(2000+x)-(1900+y) = 7\big((2000+y)-(1900+x)\big) \iff 100+x-y = 7(100+y-x) \iff 8(x-y) = 600 \iff x-y = 75.$$

Com isso, a diferença verdadeira entre as datas de nascimento de Diamantino e Rubi é $(2000+y)-(1900+x) = 100-(x-y) = 100-75 = 25$.

Observação: uma possibilidade é Diamantino nascer em 1990 e Rubi nascer em 2015.

---

13. *Alternativa C*

Se há dois números consecutivos em A, digamos a e $a+1$, então não podem estar no conjunto $a+2$, $a+3$, $(a+1)+3 = a+4$, $a+5$, $(a+1)+5 = a+6$, $a+7$ e $(a+1)+7 = a+8$, $(a+1)-2 = a-1$, $a-2$, $a-3$, $(a+1)-5 = a-4$, $a-5$, $(a+1)-7 = a-6$ e $a-7$. Ou seja, dois números consecutivos eliminam os próximos 7 números e os 7 números anteriores. Com isso, nesse caso há no máximo três números em A (de fato, as únicas possibilidades são $A = \{1,2,10\}$ e $A = \{1,9,10\}$).

Se não há dois consecutivos em A, de cada quatro números consecutivos $a, a+1, a+2, a+3$ só podemos escolher um, pois a elimina $a+2$ e $a+3$, $a+1$ elimina $a+3$, $a+2$ elimina a e $a+3$ elimina a e $a+1$. Ou seja, a diferença entre dois elementos é pelo menos 4. Assim, como $10 = 2\cdot 4+2$, A pode ter no máximo 3 elementos também. As únicas possibilidades nesse caso são $A = \{1,5,9\}$ e $A = \{2,6,10\}$.

---

14. *Alternativa D*

Vamos contar a quantidade de caminhos de A para cada casa. Para chegar à casa X, devemos vir da casa imediatamente abaixo M, imediatamente à esquerda N ou imediatamente na diagonal abaixo à esquerda P (isso se cada casa existir, é claro). Se há m maneiras de se chegar a M, n maneiras de se chegar a N e p maneiras de se chegar a P, há então $m+n+p$ maneiras de se chegar a X.

Assim, podemos preencher as casas do tabuleiro com as quantidades:

1	9	41	129	321
1	7	25	63	129
1	5	13	25	41
1	3	5	7	9
1	1	1	1	1

Assim, há 321 caminhos de A para B.

---

15. *Alternativa B*

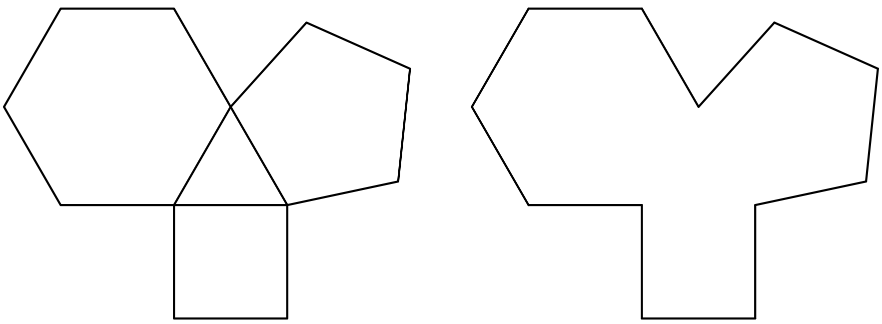
Como 2025 dividido por 360 deixa resto 225, P' é obtido girando P de algumas voltas mais 225°. Para que os vértices coincidam, 225° precisa ser divisível pelo ângulo central d°. Além disso, sabemos que d° também é divisor de 360°.

Como $\text{mdc}(360, 225) = \text{mdc}(2^3 \cdot 3^2 \cdot 5, 3^2 \cdot 5^2) = 3^2 \cdot 5 = 45$, d° deve dividir 45°. Como n é mínimo quando d é máximo, $d \leq 45$, e a igualdade ocorre, para $n = \frac{360^\circ}{45^\circ} = 8$ (ou seja, P é um octógono regular). O menor valor de n é 8.

Soluções – Respostas numéricas

16. *Resposta:* 0024

João obtém a seguinte figura:



A figura obtida tem em seu perímetro todos os lados do quadrado, do pentágono e do hexágono, exceto um de cada. Assim há $(4-1)+(5-1)+(6-1) = 12$ lados, e o perímetro é $12 \cdot 2 = 24$ cm.

---

17. *Resposta:* 0006

A corrida do professor Reginaldo dura $\frac{3{,}5}{10} = 0{,}35$ h $= 0{,}35 \cdot 60 = 21$ min. Assim, os cinco últimos algarismos começam 21:00. No final, os quatro primeiros algarismos mostram 03,50, de modo que o primeiro algarismo é sempre 0 e o segundo é no máximo 3. Com isso, os quatro primeiros algarismos coincidem com os quatro últimos nos últimos 4 minutos de corrida.

Além disso, o professor fez 3 km de corrida após $\frac{3}{3{,}5} \cdot 21 = 18$ minutos, ou seja, quando faltam $21 - 18 = 3$ minutos. Nessa situação, os dígitos são 03,00 e 03:00. Como os quatro primeiros dígitos só aumentam e os quatro últimos só diminuem, esse é o único momento em que os quatro primeiros algarismos coincidem com os quatro últimos. A soma dos oito algarismos é $0+3+0+0+0+3+0+0 = 6$.

---

18. *Resposta:* 0110

Temos $n = 10a + b$, de modo que

$$10a + b = b^3 - 2^a \iff 10a + 2^a = b^3 - b.$$

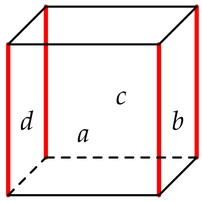
Testamos os valores:

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$10x + 2^x$	1	12	24	38	56	82	124	198	336	602
$x^3 - x$	0	0	6	24	60	120	210	336	504	720

Observando as coincidências, temos os seguintes valores de n: 23, 87, cuja soma é $23 + 87 = 110$.

19. *Resposta:* 0147

Considere as quatro arestas paralelas entre si, destacadas na figura a seguir:



Elas delimitam quatro faces que formam um ciclo. Sejam, na ordem do ciclo, a, b, c e d os números dessas faces, com a e c em faces opostas e b e d em faces opostas. Assim, $a + c = b + d = 7$. A soma dos quatro produtos dessas arestas é

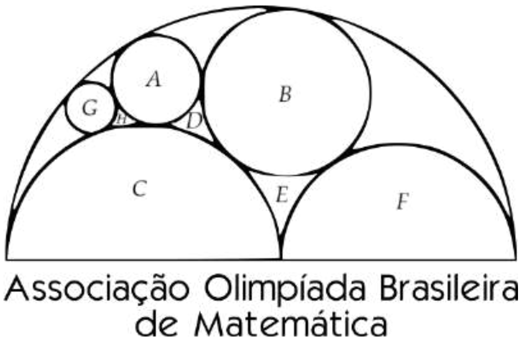
$$ab + bc + cd + da = b(a + c) + d(a + c) = 7b + 7d = 7(b + d) = 7 \cdot 7 = 49.$$

O mesmo vale para os outros dois conjuntos de quatro arestas paralelas entre si. Logo a soma pedida é $3 \cdot 49 = 147$.

---

20. *Resposta:* 1536

Marque as regiões de A a H, como mostra a figura a seguir:



Como as regiões A, B e C são tangentes duas a duas, devem ter cores diferentes. Há 4 escolhas de cor para a região A, 3 para a região B e 2 para a região C. Já usamos três cores, logo a região D deve ser pintada da cor que restou. Há $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$ possibilidades para as cores de (A, B, C, D).

As regiões E e F devem ter cores diferentes das regiões B e C. Sobraram só duas cores para E e F: E tem 2 possibilidades e F deve ser da cor que sobrou. Há 2 possibilidades para as cores de (E, F).

O mesmo argumento funciona para as regiões G e H. Há então 2 possibilidades para as cores de (G, H).

Cada uma das outras 4 regiões é vizinha de exatamente duas outras regiões. Com isso, cada uma dessas regiões tem 2 possibilidades.

A quantidade de pinturas é, então, $24 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2^4 = 1536$.

4ª COMPETIÇÃO JACOB PALIS JÚNIOR DE MATEMÁTICA

Nível 2 (8º ou 9º ano do Ensino Fundamental)

Respostas

Testes

1. D	2. B	3. C	4. B	5. D
6. C	7. B	8. E	9. C	10. C
11. B	12. B	13. A	14. D	15. D

Respostas Numéricas

Problema	16	17	18	19	20
Resposta	0006	0110	0225	0338	0038

Soluções – Testes

1. *Alternativa D*

A idade I é a diferença entre o ano do último aniversário, que pode ser 2024 ou 2025, e o ano de nascimento N. Assim,

$$I = 2024 - N \text{ ou } I = 2025 - N \iff I + N = 2024 \text{ ou } I + N = 2025,$$

ou seja, a soma da idade e do ano de nascimento de cada pessoa é 2024 ou 2025.

---

2. *Alternativa B*

O aumento no preço da carta é

$$\frac{P}{100} \cdot V = \frac{P}{2} \iff V = 50 \text{ reais.}$$

---

3. *Alternativa C*

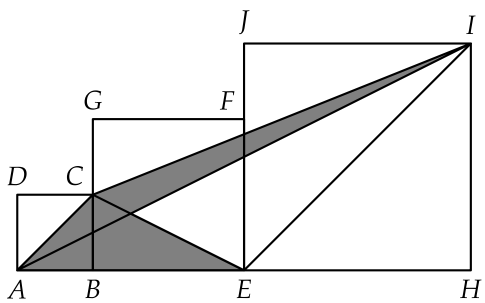
Um número *não* é grandinho quando ambos seus algarismos são menores do que 5. Há 4 possibilidades para o algarismo das dezenas (1 a 4) e 5 possibilidades para o algarismo das unidades (0 a 4). Logo há $4 \cdot 5 = 20$ números de dois algarismos que não são grandinhos.

Como há $9 \cdot 10 = 90$ números de dois algarismos (9 possibilidades para a dezena e 10 para a unidade), $90 - 20 = 70$ números são grandinhos.

---

4. *Alternativa B*

Trace a diagonal IE, que é paralela à diagonal AC:



Como IAC e EAC têm a mesma base AC e alturas iguais relativas a I e E, a área de ACI é igual à área de ACE, que é

$$\frac{AE \cdot BC}{2} = \frac{3 \cdot 1}{2} = 1{,}5.$$

Observação: A resposta do problema não depende da dimensão do quadrado $EHIJ$.

---

5. *Alternativa D*

Para simplificar, sejam $x = (AB)$ e $y = (CD)$, de modo que Diamantino nasceu em $1900 + x$ e Rubi nasceu em $2000 + y$.

Assim,

$$(2000+x)-(1900+y) = 7\big((2000+y)-(1900+x)\big) \iff 100+x-y = 7(100+y-x) \iff 8(x-y) = 600 \iff x-y = 75.$$

Com isso, a diferença verdadeira entre as datas de nascimento de Diamantino e Rubi é $(2000 + y) - (1900 + x) = 100 - (x - y) = 100 - 75 = 25$.

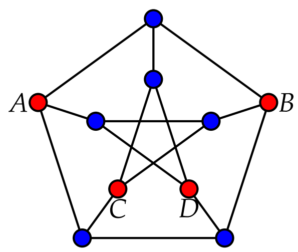
Observação: uma possibilidade é Diamantino nascer em 1990 e Rubi nascer em 2015.

---

6. *Alternativa C*

O Reino Estrelado tem dois ciclos de 5 cidades, uma no exterior (o pentágono) e outra no interior (a estrela). Podemos escolher no máximo 2 cidades de cada ciclo. Portanto um conjunto independente tem no máximo 4 cidades.

A seguir mostramos um conjunto independente de 4 cidades, A, B, C, D.



Observação: a configuração do problema é conhecida como *grafo de Petersen*, uma das estruturas mais importantes da *teoria dos grafos*. Pesquise mais sobre ele!

---

7. *Alternativa B*

Como a ordem dos números envolvidos não altera o resultado da soma $a + b + c$ nem do produto abc, $a + b + c = 1 + 2 + 3 = 6$ e $abc = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$, ambos pares.

Por outro lado, se $c = 2$ temos $ab + c = 3 \cdot 1 + 2 = 5$, que é ímpar e se $c \neq 2$ então c é ímpar e ab é par, ou seja, de qualquer forma $ab + c$ é ímpar.

Logo sempre há exatamente dois números pares.

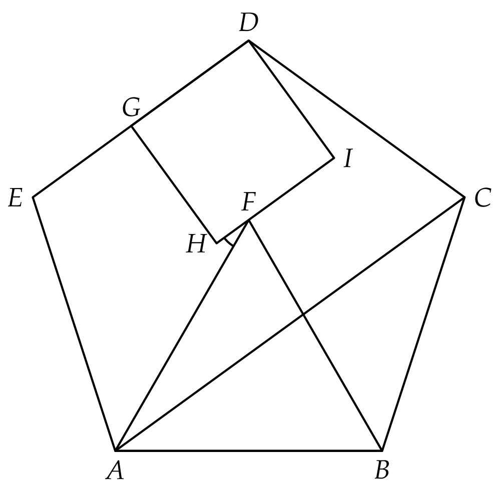
---

8. *Alternativa E*

Solução 1: Temos $\angle CDE = \frac{3\cdot 180°}{5} = 108°$. Sendo o triângulo CDE isósceles, $\angle DEC = \frac{180° - \angle CDE}{2} = 36°$.

Considerando AB como uma reta horizontal, o ângulo formado por AF com a horizontal é $\angle FAB = 60°$. Sendo DE e HI paralelos, o ângulo formado por HI com a horizontal é igual ao ângulo formado por DE com a horizontal, que é $\angle DEC = 36°$.

Assim, $\angle AFH$ é a diferença entre esses dois ângulos, que é $60° - 36° = 24°$.



Solução 2: Como visto na solução anterior, os ângulos internos do pentágono regular medem $108°$ e em particular $\angle DEA = \angle EAB = 108°$. Também temos de modo semelhante $\angle CAB = 36°$ e então $\angle EAC = 108° - 36° = 72°$.

Note então que, $\angle EAC + \angle AED = 72° + 108° = 180°$ e então ED é paralelo a AC. Como HI é paralelo a ED, segue que HI e AC são paralelos. Finalmente, por alternos internos:

$$\angle AFH = \angle FAC = \angle FAB - \angle CAB = 60° - 36° = 24°.$$

Solução 3: Vamos calcular os ângulos do pentágono $AEGHF$. Temos que $\angle GEA = 108°$, $\angle EGH = 90°$, $\angle GHF = 360° - 90° = 270°$ e $\angle EAF = \angle EAB - \angle FAB = 108° - 60° = 48°$. Como a soma dos ângulos internos de um pentágono (convexo ou não) é $180°(5-2) = 540°$, segue que

$$\angle AFH = 540° - \angle GHF - \angle EGH - \angle GEA - \angle EAF = 540° - 270° - 90° - 108° - 48° = 24°.$$

---

9. *Alternativa C*

Se há dois números consecutivos em A, digamos a e $a+1$, então não podem estar no conjunto $a+2$, $a+3$, $(a+1)+3 = a+4$, $a+5$, $(a+1)+5 = a+6$, $a+7$ e $(a+1)+7 = a+8$, $(a+1)-2 = a-1$, $a-2$, $a-3$, $(a+1)-5 = a-4$, $a-5$, $(a+1)-7 = a-6$ e $a-7$. Ou seja, dois números consecutivos eliminam os próximos 7 números e os 7 números anteriores. Com isso, nesse caso há no máximo três números em A (de fato, as únicas possibilidades são $A = \{1, 2, 10\}$ e $A = \{1, 9, 10\}$).

Se não há dois consecutivos em A, de cada quatro números consecutivos $a, a+1, a+2, a+3$ só podemos escolher um, pois a elimina $a+2$ e $a+3$, $a+1$ elimina $a+3$, $a+2$ elimina a e $a+3$ elimina a e $a+1$. Ou seja, a diferença entre dois elementos é pelo menos 4. Assim, como $10 = 2 \cdot 4 + 2$, A pode ter no máximo 3 elementos também. As únicas possibilidades nesse caso são $A = \{1, 5, 9\}$ e $A = \{2, 6, 10\}$.

---

10. *Alternativa C*

Temos $\angle EAB = 180° - 60° = 120°$. Observando o círculo de centro A, temos

$$\angle EDB = \frac{\angle EAB}{2} = \frac{120°}{2} = 60°.$$

No círculo de centro D,

$$\angle EFB = \frac{\angle EDB}{2} = \frac{60°}{2} = 30°.$$

---

11. *Alternativa B*

Como 2025 dividido por 360 deixa resto 225, P' é obtido girando P de algumas voltas mais $225°$. Para que os vértices coincidam, $225°$ precisa ser divisível pelo ângulo central $d°$. Além disso, sabemos que $d°$ também é divisor de $360°$.

Como $\mathrm{mdc}(360, 225) = \mathrm{mdc}(2^3 \cdot 3^2 \cdot 5, 3^2 \cdot 5^2) = 3^2 \cdot 5 = 45$, $d°$ deve dividir $45°$. Como n é mínimo quando d é máximo, $d \le 45$, e a igualdade ocorre, para $n = \frac{360°}{45°} = 8$ (ou seja, P é um octógono regular). O menor valor de n é 8.

---

12. *Alternativa B*

Sendo $a > b > 0$, então $a + b \neq 0$ e

$$\begin{cases} a + b = a^2 - b^2 \\ ab = a^2b^2 \end{cases} \iff \begin{cases} a + b = (a-b)(a+b) \\ ab = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} a + (-b) = 1 \\ a(-b) = -1 \end{cases}$$

Então a e $-b$ são as raízes de

$$t^2 - t - 1 = 0 \iff t = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \text{ ou } t = \frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

Como $a > 0$, $a = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$ e $b = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$, e, portanto,

$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2) = \sqrt{5} \cdot ((a-b)^2 + ab) = (1^2 + 1)\sqrt{5} = 2\sqrt{5}.$$

---

13. *Alternativa A*

Por simetria, $\angle AOE = \frac{360°}{3} = 120°$, e $\angle ACE = 180° - 2 \cdot 60° = 60°$.

Com isso, $\angle AOE + \angle ACE = 180°$, e portanto $AOEC$ é cíclico. Como $AO = OE$, CO é bissetriz de $\angle ACE$, e

$$\angle ACO = \frac{60°}{2} = 30°.$$

---

14. *Alternativa D*

Os múltiplos de 20^{25} que são divisores de $20^{25} \cdot 25^{20}$ são 20^{25} vezes os divisores de $25^{20} = 5^{40}$, num total de $40 + 1 = 41$ múltiplos.

Os múltiplos de 25^{20} que são divisores de $20^{25} \cdot 25^{20}$ são 25^{20} vezes os divisores de $20^{25} = 2^{50} \cdot 5^{25}$, num total de $(50 + 1)(25 + 1) = 1326$ múltiplos.

Os múltiplos comuns de 20^{25} e 25^{20}, que são múltiplos de $\operatorname{mmc}(20^{25}, 25^{20}) = 2^{50} \cdot 5^{40}$, que são divisores de $20^{25} \cdot 25^{20}$ são $2^{50} \cdot 5^{40}$ vezes os divisores de $\frac{20^{25} \cdot 25^{20}}{2^{50} \cdot 5^{40}} = 5^{25}$, num total de $25 + 1 = 26$ múltiplos.

Assim, o total pedido é $41 + 1326 - 26 = 1341$.

---

15. *Alternativa D*

A cor da casa na linha m e coluna n é determinada pela paridade de $m+n$. Assim, ao fazer $|P-B|$, multiplicamos mn por $(-1)^{m+n}$. Com isso,

$$|P - B| = \left|\sum_{m=1}^{201}\sum_{n=1}^{201}(-1)^{m+n}mn\right| = \left|\sum_{m=1}^{201}(-1)^m m \sum_{n=1}^{201}(-1)^n n\right| = (-1 + 2 - 3 + 4 - \cdots - 201)^2 = (-101)^2 = 10201.$$

Soluções – Respostas numéricas

16. *Resposta:* 0006

A corrida do professor Reginaldo dura $\frac{3,5}{10} = 0{,}35$ h $= 0{,}35 \cdot 60 = 21$ min. Assim, os cinco últimos algarismos começam 21:00. No final, os quatro primeiros algarismos mostram 03,50, de modo que o primeiro algarismo é sempre 0 e o segundo é no máximo 3. Com isso, os quatro primeiros algarismos coincidem com os quatro últimos nos últimos 4 minutos de corrida.

Além disso, o professor fez 3 km de corrida após $\frac{3}{3,5} \cdot 21 = 18$ minutos, ou seja, quando faltam $21 - 18 = 3$ minutos. Nessa situação, os dígitos são 03,00 e 03:00. Como os quatro primeiros dígitos só aumentam e os quatro últimos só diminuem, esse é o único momento em que os quatro primeiros algarismos coincidem com os quatro últimos. A soma dos oito algarismos é $0 + 3 + 0 + 0 + 0 + 3 + 0 + 0 = 6$.

---

17. *Resposta:* 0110

Temos $n = 10a + b$, de modo que

$$10a + b = b^3 - 2^a \iff 10a + 2^a = b^3 - b.$$

Testamos os valores:

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$10x + 2^x$	1	12	24	38	56	82	124	198	336	602
$x^3 - x$	0	0	6	24	60	120	210	336	504	720

Observando as coincidências, temos os seguintes valores de n: 23, 87, cuja soma é $23 + 87 = 110$.

---

18. *Resposta:* 0225

É conhecido que a soma dos dígitos de cada número inteiro positivo n deixa o mesmo resto na divisão por 9 que n. Deste modo, como trocamos dois algarismos por sua soma, o resto da divisão da soma dos dígitos por 9 é sempre a mesma, de modo que os números ligados a 2025, cuja soma dos dígitos é $2 + 0 + 2 + 5 = 9$, são todos múltiplos de 9.

Por outro lado, ao somar dois algarismos a e b de N, a quantidade de algarismos de N diminui se $a + b \leq 9$ ou se mantém se $a + b \geq 10$. Como a e b são algarismos, $a + b \leq 18$, e se escolhermos os algarismos na mesma posição, a quantidade de algarismos diminui. Com isso, é sempre possível ligar cada inteiro positivo a um número de somente um algarismo.

No nosso caso, como todos são múltiplos de 9, esse algarismo é 9. Logo todos os múltiplos de 9, incluindo 2025, são ligados entre si, e há $\frac{2025}{9} = 225$ números entre 1 e 2025 ligados a 2025.

Observação: o mesmo argumento mostra que todos os números congruentes módulo 9 estão ligados entre si.

---

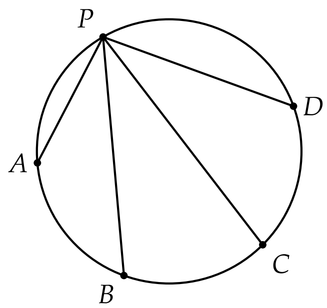
19. *Resposta:* 0338

Temos $2025^k = (3^4 \cdot 5^2)^k = 3^{4k} \cdot 5^{2k}$, num total de $6k$ fatores primos. Assim, como cada inteiro do produto tem pelo menos um fator primo, $6k \geq 2025 \iff k \geq 338$.

Para $k = 338$, podemos tomar $4 \cdot 338 = 1352$ números iguais a 3. Sobram $2k = 676$ fatores 5 para $2025 - 1352 = 673$ números, de modo que podemos escolher 670 números iguais a 5 e os 3 que sobraram iguais a 25.

---

20. *Resposta:* 0038



Solução 1: Como $\angle APB = \angle BPC = \angle CPD$, $AB = BC = CD$, e como $\angle APC = 2\angle APB = \angle BPD$, $AC = BD$. Pelo teorema de Ptolomeu,

$$PA \cdot BC + PC \cdot AB = AC \cdot PB \iff \frac{PA + PC}{PB} = \frac{AC}{AB}.$$

Analogamente,

$$\frac{PB + PD}{PC} = \frac{BD}{BC} = \frac{AC}{AB},$$

e portanto

$$\frac{PA + PC}{PB} = \frac{PB + PD}{PC} \iff \frac{9 + 16}{15} = \frac{15 + PD}{16} \iff PD = \frac{35}{3}.$$

Com isso, $p = 35$, $q = 3$ e $p + q = 38$.

Solução 2: Analogamente à solução anterior, como $\angle APB = \angle BPC = \angle CPD$, temos $AB = BC = CD$. Seja $AB = x$ e $\angle APB = \theta$. Pela lei dos cossenos no triângulo PAB, temos que

$$AB^2 = PA^2 + PB^2 - 2 \cdot PA \cdot PB \cdot \cos \angle APB \Rightarrow \cos\theta = \frac{9^2 + 15^2 - x^2}{2 \cdot 9 \cdot 15} = \frac{306 - x^2}{270}.$$

Pela lei dos cossenos no triângulo PBC, temos que

$$BC^2 = PB^2 + PC^2 - 2 \cdot PB \cdot PC \cdot \cos \angle BPC \Rightarrow \cos\theta = \frac{15^2 + 16^2 - x^2}{2 \cdot 15 \cdot 16} = \frac{481 - x^2}{480}.$$

Portanto, segue que

$$\frac{306 - x^2}{270} = \frac{481 - x^2}{480} = \frac{(481 - x^2) - (306 - x^2)}{480 - 270} = \frac{175}{210} = \frac{5}{6} \Rightarrow x^2 = 306 - 270 \cdot \frac{5}{6} = 81 \Rightarrow x = 9.$$

Em particular, temos $\cos\theta = \dfrac{481 - 9^2}{480} = \dfrac{5}{6}$. Finalmente, pela lei dos cossenos em PCD, obtemos

$$CD^2 = PC^2 + PD^2 - 2 \cdot PC \cdot PD \cdot \cos \angle CPD \Rightarrow 9^2 = 16^2 + PD^2 - 2 \cdot 16 \cdot PD \cdot \frac{5}{6}$$

Simplificando, obtemos $3PD^2 - 80PD + 525 = 0$, donde $PD = 15$ ou $PD = \dfrac{35}{3}$.

Suponha $PD = 15$. Note que $PA = AB = BC = 9$ e então $PABC$ é trapézio isósceles. Logo, $AC = PB = 15$ e como $AP = DC = 9$, segue que $APDC$ é um retângulo. Mas então $3\theta = 90° \Rightarrow \theta = 30° \Rightarrow \cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$, absurdo, pois $\cos\theta = \frac{5}{6}$. Logo, $PD = \dfrac{35}{3}$.

4ª COMPETIÇÃO JACOB PALIS JÚNIOR DE MATEMÁTICA

Nível 3 (Ensino Médio)

Respostas

Testes

1. B	2. B	3. C	4. C	5. B
6. B	7. C	8. B	9. A	10. D
11. C	12. B	13. C	14. E	15. C

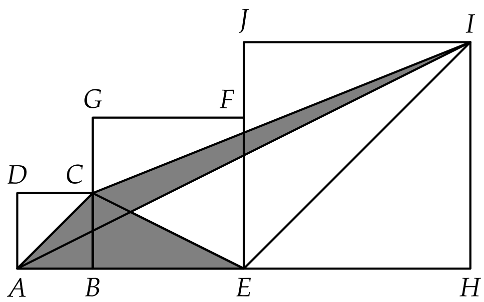
Respostas Numéricas

Problema	16	17	18	19	20
Resposta	0012	0338	1536	0008	0946

Soluções – Testes

1. *Alternativa B*

Trace a diagonal IE, que é paralela à diagonal AC:



Como IAC e EAC têm a mesma base AC e alturas iguais relativas a I e E, a área de ACI é igual à área de ACE, que é

$$\frac{AE \cdot BC}{2} = \frac{3 \cdot 1}{2} = 1{,}5.$$

Observação: A resposta do problema não depende da dimensão do quadrado $EHIJ$.

---

2. *Alternativa B*

O aumento no preço da carta é

$$\frac{P}{100} \cdot V = \frac{P}{2} \iff V = 50 \text{ reais.}$$

---

3. *Alternativa C*

Um número *não* é grandinho quando ambos seus algarismos são menores do que 5. Há 4 possibilidades para o algarismo das dezenas (1 a 4) e 5 possibilidades para o algarismo das unidades (0 a 4). Logo há $4 \cdot 5 = 20$ números de dois algarismos que não são grandinhos.

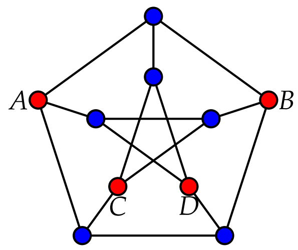
Como há $9 \cdot 10 = 90$ números de dois algarismos (9 possibilidades para a dezena e 10 para a unidade), $90 - 20 = 70$ números são grandinhos.

---

4. *Alternativa C*

O Reino Estrelado tem dois ciclos de 5 cidades, uma no exterior (o pentágono) e outra no interior (a estrela). Podemos escolher no máximo 2 cidades de cada ciclo. Portanto um conjunto independente tem no máximo 4 cidades.

A seguir mostramos um conjunto independente de 4 cidades, A, B, C, D.



Observação: a configuração do problema é conhecida como *grafo de Petersen*, uma das estruturas mais importantes da *teoria dos grafos*. Pesquise mais sobre ele!

---

5. *Alternativa B*

Como 2025 dividido por 360 deixa resto 225, P' é obtido girando P de algumas voltas mais $225°$. Para que os vértices coincidam, $225°$ precisa ser divisível pelo ângulo central $d°$. Além disso, sabemos que $d°$ também é divisor de $360°$.

Como $\text{mdc}(360, 225) = \text{mdc}(2^3 \cdot 3^2 \cdot 5, 3^2 \cdot 5^2) = 3^2 \cdot 5 = 45$, $d°$ deve dividir $45°$. Como n é mínimo quando d é máximo, $d \le 45$, e a igualdade ocorre, para $n = \frac{360°}{45°} = 8$ (ou seja, P é um octógono regular). O menor valor de n é 8.

---

6. *Alternativa B*

Como a ordem dos números envolvidos não altera o resultado da soma $a+b+c$ nem do produto abc, $a+b+c = 1+2+3 = 6$ e $abc = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$, ambos pares.

Por outro lado, se $c = 2$ temos $ab + c = 3 \cdot 1 + 2 = 5$, que é ímpar e se $c \neq 2$ então c é ímpar e ab é par, ou seja, de qualquer forma $ab + c$ é ímpar.

Logo sempre há exatamente dois números pares.

---

7. *Alternativa C*

Para $n \ge 4$,

$$a_n = a_{n-2} + ia_{n-1} = a_{n-2} + i(a_{n-3} + ia_{n-2}) = a_{n-2} + ia_{n-3} + i^2 a_{n-2} = a_{n-2} + ia_{n-3} - a_{n-2} = ia_{n-3},$$

de modo que, para $n \ge 7$, $a_n = ia_{n-3} = i \cdot ia_{n-6} = -a_{n-6}$ e para $n \ge 12$, $a_n = -a_{n-6} = a_{n-12}$.

Como 2025 dividido por 12 deixa resto 9,

$$a_{2025} = a_9 = -a_3 = -(a_1 + ia_2) = -(20 + 25i) = -20 - 25i.$$

---

8. *Alternativa B*

Sejam $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$ os elementos de A. Então, sendo $\frac{a_{i+1}}{a_i} \ge 2$ para $i = 1, 2, \ldots, n-1$, multiplicando essas $n-1$ desigualdades obtemos

$$\frac{a_2}{a_1} \cdot \frac{a_3}{a_2} \cdot \ldots \cdot \frac{a_n}{a_{n-1}} \ge 2^{n-1} \iff a_n \ge 2^{n-1} a_1.$$

Assim,

$$\frac{a_n}{a_1} \le 2025 \iff a_n \le 2025 a_1 \implies 2^{n-1} a_1 \le 2025 a_1 \iff 2^{n-1} \le 2025 < 2^{11} \iff n \le 11.$$

Um exemplo é $A = \{2^k, 0 \le k \le 10\}$. Note que os valores mínimo e máximo de A são 1 e $2^{10} = 1024$, respectivamente.

---

9. *Alternativa A*

Por simetria, $\angle AOE = \frac{360°}{3} = 120°$, e $\angle ACE = 180° - 2 \cdot 60° = 60°$.

Com isso, $\angle AOE + \angle ACE = 180°$, e portanto $AOEC$ é cíclico. Como $AO = OE$, CO é bissetriz de $\angle ACE$, e

$$\angle ACO = \frac{60°}{2} = 30°.$$

---

10. *Alternativa D*

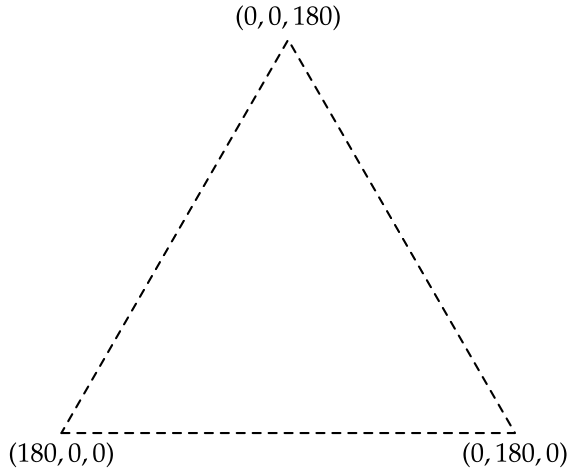
A cor da casa na linha m e coluna n é determinada pela paridade de $m+n$. Assim, ao fazer $|P-B|$, multiplicamos mn por $(-1)^{m+n}$. Com isso,

$$|P-B| = \left|\sum_{m=1}^{201}\sum_{n=1}^{201}(-1)^{m+n}mn\right| = \left|\sum_{m=1}^{201}(-1)^m m\sum_{n=1}^{201}(-1)^n n\right| = (-1+2-3+4-\cdots-201)^2 = (-101)^2 = 10201.$$

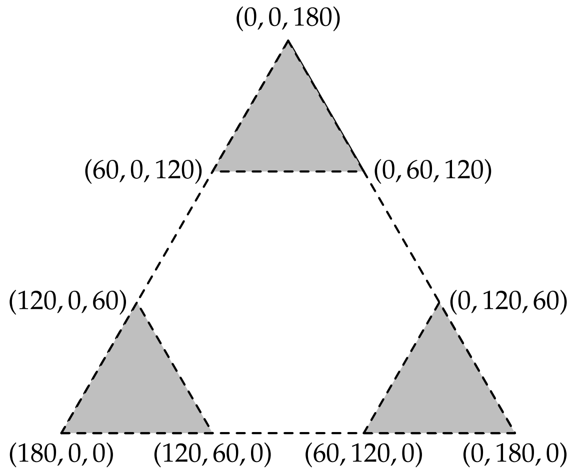
---

11. *Alternativa C*

O conjunto das triplas (α,β,γ) com $\alpha+\beta+\gamma = 180$ e $\alpha,\beta,\gamma > 0$ representa no espaço a região do plano $x+y+z = 180$ no primeiro octante:



O evento corresponde à união das interseções dessa região com cada um dos semiespaços $x > 120$, $y > 120$ e $z > 120$. A primeira interseção é a região de vértices $(180,0,0)$, $(120,60,0)$ e $(120,0,60)$; as outras são análogas. Assim, o evento pode ser sombreado na figura:



A probabilidade é, então, a razão entre a área sombreada e a área total. Como o triângulo maior é semelhante a cada triângulo sombreado com razão de semelhança $\frac{180}{60} = 3$, a área total é igual a $3^2 = 9$ vezes a área de cada triângulo sombreado, de modo que a probabilidade pedida é $\frac{3}{9} = \frac{1}{3}$.

---

12. *Alternativa B*

Seja T_{XY} o ponto de tangência da esfera na aresta XY, com $X, Y \in \{A,B,C,D\}$. Considerando os segmentos tangentes temos $AT_{AB} = AT_{AC} = AT_{AD}$, e é claro que valem resultados análogos.

Assim, em particular, sendo $XY = XT_{XY} + YT_{XY}$,

$$AD + BC = AT_{AD} + DT_{AD} + BT_{BC} + CT_{BC} = AT_{AC} + DT_{BD} + BT_{BD} + CT_{AC} = AC + BD,$$

e $AD = AC + BD - BC = 4 + 12 - 5 = 11$.

---

13. *Alternativa C*

Considere uma representação

$$n = \pm 2^{a_1} \pm 2^{a_2} \pm \cdots \pm 2^{a_k}.$$

Primeiro note que se $a_i = a_j = a$ então podemos juntar ou cancelar $\pm 2^a$ e $\pm 2^a$ em $\pm 2^{a+1}$ ou 0, diminuindo a quantidade de potências de 2. Assim podemos supor, sem perdas, que

$$a_1 > a_2 > \ldots > a_k.$$

Se n é par, $a_k > 0$ e a quantidade mínima de potências de 2 é igual à de $\frac{n}{2}$, ou seja, $f(n) = f\left(\frac{n}{2}\right)$.

Se n é ímpar, $a_k = 0$, e $f(n) = \min\{f(n+1), f(n-1)\}+1$. Sendo $n+1$ e $n-1$ ambos pares, $f(n) = \min\left\{f\left(\frac{n+1}{2}\right), f\left(\frac{n-1}{2}\right)\right\}$.

Assim, $f(2025) = \min\{f(1013), f(1012)\} + 1 = \min\{f(1013), f(506)\} + 1 = \min\{f(1013), f(253)\} + 1$.

Agora, $f(253) = \min\{f(126), f(127)\}+1 = \min\{f(63), f(127)\}+1$. Como $f(2^t-1) = \min\{f(2^{t-1}-1), f(2^{t-1})\}+1 = 2$, já que $f(2^{t-1}) = 1$, $f(253) = 3$, e $f(2025) \le 3 + 1 = 4$.

Por outro lado, $f(1013) = \min\{f(506), f(507)\} + 1 = \min\{f(253), f(507)\} + 1 = \min\{3, f(507)\} + 1$. Mas $f(507) = \min\{f(253), f(254)\} + 1 = \min\{3, f(127)\} + 1 = \min\{3, 2\} + 1 = 3$, logo $f(1013) = \min\{3, 3\} + 1 = 4$. Deste modo, $f(2025) = 4$.

---

14. *Alternativa E*

Como $2025 = 3^4 \cdot 5^2$ e $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5$, 2025 divide $\binom{n}{6}$ se, e somente se, 3^6 e 5^3 dividem $n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)$. Entre os seis números consecutivos de $n-5$ a n, há exatamente dois múltiplos de 3 e no máximo dois múltiplos de 5.

Como o mdc de dois múltiplos consecutivos de 3 é 3, um dos múltiplos de 3 é múltiplo de $3^5 = 243$ e como o mdc de dois múltiplos consecutivos de 5 é 5, um dos números é múltiplo de $5^2 = 25$.

O múltiplo de 25 mais próximo de 243 é $250 > 243 + 5$, logo $n - 5 > 243$. O múltiplo de 25 mais próximo de $2 \cdot 243 = 486$ é $475 < 486 - 5$, logo $n > 486$. O múltiplo de 25 mais próximo de $3 \cdot 243 = 729$ é 725. Como $725 < 729 < 730$, temos que $\binom{730}{6}$ é múltiplo de 2025. Se n não é múltiplo de 5, então teríamos que ter um múltiplo de $5^3 = 125$ próximo de 729. Como 125 não divide 725, esse não é o caso. Logo o menor valor de n é 730.

---

15. *Alternativa C*

Sejam $\sigma_1 = x + y + z$, $\sigma_2 = xy + yz + zx$ e $\sigma_3 = xyz$. Então, somando as equações obtemos

$$2x + 2y + 2z = xy + yz + zx \iff \sigma_2 = 2\sigma_1.$$

Subtraindo uma equação de outra obtemos $x - z = z(y - x)$, $y - x = x(z - y)$ e $z - y = y(x - z)$. Multiplicando tudo e lembrando que x, y, z são distintos, obtemos

$$(x-z)(y-x)(z-y) = z(y-x)x(z-y)y(x-z) \iff xyz = 1 \iff \sigma_3 = 1.$$

Observando que $x + y = yz \iff x = y(z-1)$, multiplicando as equações $x = y(z-1)$, $y = z(x-1)$ e $z = x(y-1)$, obtemos

$$xyz = y(z-1)z(x-1)x(y-1) \iff (x-1)(y-1)(z-1) = 1 \iff \sigma_3 - \sigma_2 + \sigma_1 - 1 = 1 \implies \sigma_1 - 2\sigma_1 = 1 \iff \sigma_1 = -1.$$

Assim, $\sigma_2 = 2\sigma_1 = -2$ e x, y, z são raízes da equação

$$t^3 - \sigma_1 t^2 + \sigma_2 t - \sigma_3 = 0 \iff t^3 + t^2 - 2t - 1 = 0.$$

Observação: pode-se provar que, em alguma ordem, x, y, z são as raízes da equação. De fato, sendo x uma raiz, de $xyz = 1$ temos $x + y = yz = \frac{1}{x} \implies y = \frac{1}{x} - x$. Basta mostrar que $\frac{1}{x} - x = \frac{1-x^2}{x}$ também é raiz:

$$\begin{aligned}
\left(\frac{1-x^2}{x}\right)^3 + \left(\frac{1-x^2}{x}\right)^2 - 2\left(\frac{1-x^2}{x}\right) - 1 = 0 &\iff (1-x^2)^3 + x(1-x^2)^2 - 2(1-x^2)x^2 - x^3 = 0 \\
&\iff 1 - 3x^2 + 3x^4 - x^6 + x - 2x^3 + x^5 - 2x^2 + 2x^4 - x^3 = 0 \\
&\iff x^6 - x^5 - 5x^4 + 3x^3 + 5x^2 - x - 1 = 0.
\end{aligned}$$

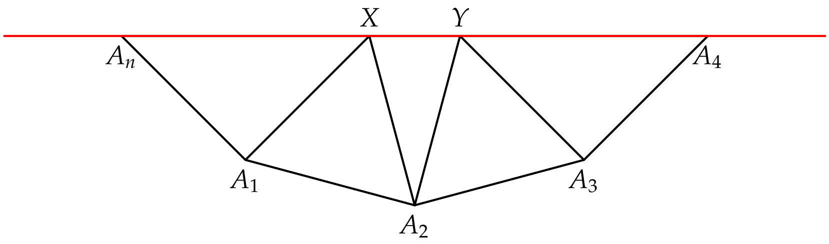
Mas $x^6 - x^5 - 5x^4 + 3x^3 + 5x^2 - x - 1 = (x^3 + x^2 - 2x - 1)(x^3 - 2x^2 - x + 1) = 0$, logo y é raiz. Analogamente, $z = \frac{1-y^2}{y}$ também é raiz.

Pode-se verificar que $x \ne y$: se $y = x$ então $x = \frac{1}{x} - x \iff 2x^2 = 1$, e $x^3 + x^2 - 2x - 1 = x \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - 2x - 1 = -\frac{3x+1}{2} \ne 0$, absurdo. Da mesma forma $z \ne y$ e $x \ne z$, e portanto x, y, z são as raízes do polinômio obtido.

Soluções – Respostas numéricas

16. *Resposta:* 0012

Vamos estudar o caso particular em que XY passa pelo próximo vértice A_4.

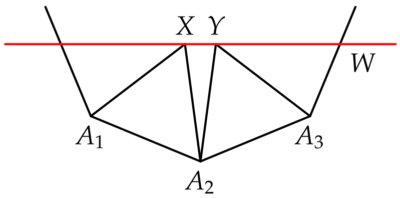


Nesse caso, sendo $\angle XA_2Y = 2x$, temos $\angle A_1A_2A_3 = \angle A_2A_3A_4 \iff 2 \cdot 60° + 2x = 60° + \angle YA_3A_4 \iff \angle YA_3A_4 = 2x + 60°$. Além disso, no triângulo isósceles A_2XY, $\angle A_2YX = 90° - x$. Com isso, $\angle A_3YA_4 = 180° - \angle A_2YX - 60° = 30° + x$. Sendo $A_3Y = A_2A_3 = A_3A_4$, o triângulo A_3A_4Y é isósceles com $\angle A_3A_4Y = \angle A_3YA_4 = 30° + x$. Somando os ângulos desse triângulo temos

$$2(30° + x) + 2x + 60° = 180° \iff 2x = 30°.$$

Com isso, o ângulo interno do polígono regular é $2 \cdot 60° + 2x = 150° = \frac{(n-2)180°}{n} \iff n = 12$.

Se $n < 12$, o ângulo interno diminui, ou seja, é menor do que 150°. A reta XY corta o perímetro do polígono regular em W, como na figura a seguir:



Então $\angle XA_2Y < 30°$, $\angle A_2YX > 75°$, $\angle A_3YW = 180° - 60° - \angle A_2YX < 45°$, $\angle YA_3W < 150° - 60° = 90°$. Assim,

$$\angle A_3WY = 180° - \angle A_3YW - \angle YA_3W > 180° - 45° - 90° = 45° > \angle A_3YW.$$

No triângulo A_3YW, isso implica $A_3W < A_3Y = A_2A_3$, ou seja, W está sobre A_3A_4, o que mostra que XY corta o polígono regular "antes" de qualquer outro vértice. Isso mostra que não é possível que $n < 12$.

---

17. *Resposta:* 0338

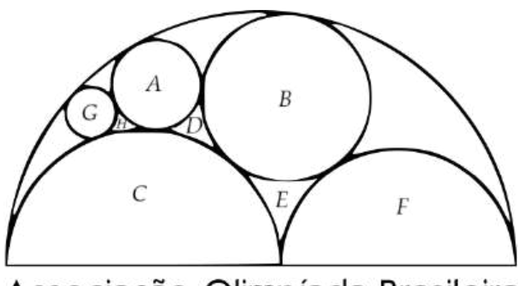
Temos $2025^k = (3^4 \cdot 5^2)^k = 3^{4k} \cdot 5^{2k}$, num total de $6k$ fatores primos. Assim, como cada inteiro do produto tem pelo menos um fator primo, $6k \geq 2025 \iff k \geq 338$.

Para $k = 338$, podemos tomar $4 \cdot 338 = 1352$ números iguais a 3. Sobram $2k = 676$ fatores 5 para $2025 - 1352 = 673$ números, de modo que podemos escolher 670 números iguais a 5 e os 3 que sobraram iguais a 25.

---

18. *Resposta:* 1536

Marque as regiões de A a H, como mostra a figura a seguir:



Como as regiões A, B e C são tangentes duas a duas, devem ter cores diferentes. Há 4 escolhas de cor para a região A, 3 para a região B e 2 para a região C. Já usamos três cores, logo a região D deve ser pintada da cor que restou. Há $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$ possibilidades para as cores de (A, B, C, D).

As regiões E e F devem ter cores diferentes das regiões B e C. Sobraram só duas cores para E e F: E tem 2 possibilidades e F deve ser da cor que sobrou. Há 2 possibilidades para as cores de (E, F).

O mesmo argumento funciona para as regiões G e H. Há então 2 possibilidades para as cores de (G, H).

Cada uma das outras 4 regiões é vizinha de exatamente duas outras regiões. Com isso, cada uma dessas regiões tem 2 possibilidades.

A quantidade de pinturas é, então, $24 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2^4 = 1536$.

---

19. *Resposta:* 0008

Considere $\frac{n^2+19}{n+19}$. Esse número é inteiro se, e somente se, $\frac{n^2+19}{n+19} - 1 = \frac{n(n-1)}{n+19}$ é inteiro, ou seja, $n(n-1)$ é múltiplo de $n + 19$. O mesmo argumento mostra que $\frac{n^2+18}{n+18}$ é inteiro se, e somente se, $n(n-1)$ é múltiplo de $n + 18$.

Temos $\operatorname{mdc}(n, n+19) = \operatorname{mdc}(n, 19)$. Se $\operatorname{mdc}(n, 19) = 19$ então $n = 19k$, k inteiro, e $19k + 19 = 19(k + 1)$ divide $19k^2 + 19$, o que é equivalente a $k + 1$ dividir $k^2 + 1$. Outro múltiplo de $k + 1$ é $k^2 - 1$, logo $k + 1$ divide $k^2 + 1 - (k^2 - 1) = 2$, ou seja, $k = -3$ ou $k = -2$ ou $k = 0$ ou $k = 1$. Nesse caso, $n \in \{-57, -38, 0, 19\}$. Verifica-se que somente $n = 0$ satisfaz $n(n-1)$ ser múltiplo de $n + 18$.

Se $\operatorname{mdc}(n, 19) = 1$ então $\operatorname{mdc}(n, n+19) = 1$, de modo que $n + 19$ deve dividir $n - 1$. Isso ocorre se, e somente se, $n + 19$ divide $n + 19 - (n - 1) = 20$. As possibilidades são $n + 19 \in \{-20, -10, -5, -4, -2, -1, 1, 2, 4, 5, 10, 20\}$.

Testando temos

$n+18$	-21	-11	-6	-5	-3	-2	0	1	3	4	9	19
n	-39	-29	-24	-23	-21	-20	-18	-17	-15	-14	-9	1
$n-1$	-40	-30	-25	-24	-22	-21	-19	-18	-16	-15	-10	0

As soluções nesse caso são $n \in \{-24, -21, -20, -17, -15, -9, 1\}$. Juntando com a solução $n = 0$ do caso anterior temos 8 soluções.

---

20. *Resposta:* 0946

Utilizaremos as identidades

$$\frac{x^{45}-1}{x-1} = x^{44} + x^{43} + \cdots + x + 1 \quad \text{e} \quad \frac{x^{45}+1}{x+1} = x^{44} - x^{43} + \cdots - x + 1.$$

Assim, sendo $2025 = 45 \cdot 45$, para $x = 2^{45} \implies x^{45} = 2^{2025}$,

$$\frac{2^{2025}-1}{2^{45}-1} = (2^{45})^{44} + (2^{45})^{43} + \cdots + 2^{45} + 1$$

tem 45 uns na base binária, nas posições $0, 45, 2 \cdot 45, \ldots, 44 \cdot 45$.

Por outro lado,

$$\frac{2^{2025}+1}{2^{45}+1} = (2^{45})^{44} - (2^{45})^{43} + \cdots - 2^{45} + 1.$$

Sendo, para $k = 1, 2, \ldots, 22$,

$$(2^{45})^{2k} - (2^{45})^{2k-1} = (2^{45})^{2k-1}(2^{45} - 1) = \underbrace{111\ldots1}_{45 \text{ uns}}\ \underbrace{000\ldots0}_{45(2k-1) \text{ zeros}}$$

um número com $2k$ dígitos binários, a representação binária de $\frac{2^{2025}+1}{2^{45}+1}$ é, da esquerda para a direita, 45 uns seguidos de 45 zeros repetidos 22 vezes, mais 44 zeros e 1 um (o 1 das unidades) no final. A soma desses algarismos é $45 \cdot 22 + 1 = 991$.

A diferença é, então $991 - 45 = 946$.