XXXI^a OLIMPÍADA de MAIO
Primeiro Nível
Maio de 2025

Duração da prova: 3 horas.
Cada problema vale 10 pontos.
Não é permitido o uso de calculadoras; não é permitido consultar livros ou anotações.
<u>Justifique cada uma das suas respostas.</u>
Ao participar, você se compromete a não divulgar os problemas até 30 de maio.

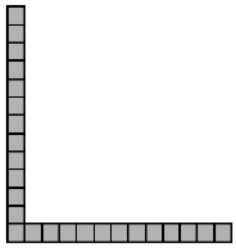
PROBLEMA 1

Na multiplicação a seguir, cada letra deve ser substituída por um algarismo, de modo que letras iguais correspondam a algarismos iguais e a multiplicação esteja correta. Encontre todas as posibilidades.

$$\begin{array}{cccc} & a & b & c \\ \times & & & 9 \\ \hline a & c & b & c \end{array}$$

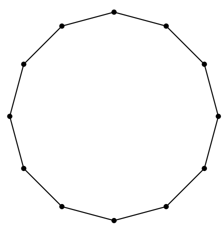
PROBLEMA 2

A figura ao lado é composta por 25 quadrados 1x1, dispostos em uma única peça. Um corte só pode ser feito ao longo de uma das linhas dos quadrados. Determine o número mínimo de cortes que devem ser feitos para que, com todas as peças resultantes, se possa formar um quadrado de 5x5. Indique como o quadrado pode ser montado e explique por que não é possível fazê-lo com menos cortes.



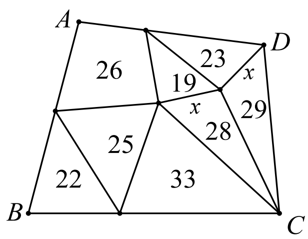
PROBLEMA 3

Em cada vértice deste polígono de 12 lados, deve-se escrever um número inteiro positivo, de forma que a seguinte condição seja satisfeita: sempre que um número é somado aos seus dois vizinhos, o resultado é igual a 31. Os números podem se repetir. De quantas maneiras isso pode ser feito?



PROBLEMA 4

O quadrilátero *ABCD* da figura a seguir está dividido em 7 triângulos e 1 quadrilátero. O número que aparece no interior de cada figura indica o seu perímetro. Além disso, os dois lados marcados com *x* têm o mesmo comprimento. Calcule o perímetro do quadrilátero *ABCD*.



PROBLEMA 5

Inicialmente, está escrito o número 3 num quadro. Ana e Beto jogam alternadamente, começando por Ana. Em cada jogada, deve-se escrever um número inteiro que seja maior que o último número escrito e menor ou igual ao quadrado do último número escrito. Por exemplo, na sua primeira jogada, Ana pode escrever 4,5,6,7,8 ou 9. Vence o jogo quem conseguir escrever o número 1000000.
Determine qual do dois jogadores tem uma estratégia que lhe garante a vitória, independentemente de como o oponente jogue. Descreva essa estratégia.

XXXIª OLIMPÍADA de MAIO
Segundo Nível
Maio de 2025

Duração da prova: 3 horas.
Cada problema vale 10 pontos.
Não é permitido o uso de calculadoras; não é permitido consultar livros ou anotações.
Justifique cada uma das suas respostas.
Ao participar, você se compromete a não divulgar os problemas até 30 de maio.

PROBLEMA 1
Um número de três dígitos *abc*, com *a* e *b* diferentes de 0, é chamado *bacana* se os números de dois dígitos *ab*, *bc* e *ac* são divisores de *abc*. Encontre todos os números bacanas.
Observação: Os dígitos *a*, *b*, *c* não precisam ser distintos.

PROBLEMA 2
Temos uma lista infinita de números inteiros que satisfaz as seguintes condições:

- O primeiro número da lista é 1.
- Cada número da lista, a partir do segundo, é maior que o número anterior.
- Para cada $n > 1$, o número na posição *n* da lista é menor ou igual a $2n - 2$.

Demostre que existem dois números nessa lista cuja diferença é exatamente 2025.

PROBLEMA 3
Seja *ABCD* um paralelogramo, de lados *AB*, *BC*, *CD* e *DA*, com $A\hat{B}C > 90^\circ$. Constrói-se um quadrado *ABEF*, exterior ao paralelogramo, com lados *AB*, *BE*, *EF* e *FA*. Seja F' simétrico de *F* em relação a *DE*. Encontre o valor do ângulo $B\hat{F}'C$.
Observação: o *simétrico* de um ponto *P* em relação a uma reta ℓ é o ponto *Q* tal que ℓ é perpendicular ao segmento *PQ* e o corta no seu ponto médio.

PROBLEMA 4
Seja $S = \{2025, 2026, 2027, \dots\}$ o conjunto de todos os inteiros maiores ou iguais a 2025. Determine se é possível pintar cada número de *S* de vermelho, azul ou verde, de maneira que se cumpram as seguintes condições:

- Para cada cor, existe pelo menos um número de *S* pintado com essa cor.
- Sempre que dois números distintos de *S*, digamos *a* e *b*, estiverem pintados com duas cores diferentes, o número mcd(*a*,*b*) + mmc(*a*,*b*) deve estar pintado com a terceira cor.

Observação: Denotamos mcd(*a*,*b*) como o máximo divisor comum de *a* e *b*, e mmc(*a*,*b*) como o mínimo múltiplo comum de *a* e *b*.

PROBLEMA 5
Determine se existe algum número inteiro positivo *m* tal que os quatro primeiros dígitos após a vírgula do número $\sqrt{m}$ formem o número 2025.
Observação: Por exemplo, o número que se forma com os quatro primeiros dígitos após a vírgula de $\sqrt{2} = 1,\underline{4142}1356\ldots$ é 4142.