40° OLIMPÍADA IBEROAMERICANA DE MATEMÁTICA

Dia 1

25 de Setembro de 2025

Problema 1

Uma sucessão de números reais $a_1, a_2, \ldots$ chama-se *mapuche* se $a_1 > 0$ e além disso, para todo $n \geq 2$, tem-se

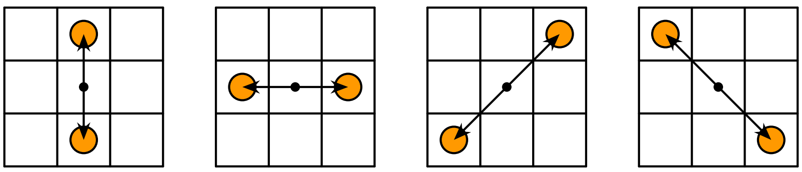
$$a_1 a_2 \cdots a_{n-1} a_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1}.$$

Qual é o número máximo de inteiros que uma sucessão mapuche pode ter?

Note que o produto tem n fatores e a soma tem $n-1$ parcelas.

Problema 2

Tem-se um tabuleiro de $n \times n$ dividido en n^2 casas, com $n \geq 3$. Inicialmente, escolhe-se uma casa onde se colocam n^2 moedas. Um *movimento* consiste em escolher uma casa que contenha, pelo menos, duas moedas e deslocar duas moedas para duas casas que sejam simétricas relativamente à casa escolhida e que tenham, pelo menos, um vértice em comum com ela.
De seguida, mostram-se os quatro tipos de movimentos possíveis:



Tipo 1 Tipo 2 Tipo 3 Tipo 4

Se depois de vários movimentos resulta que em cada casa do tabuleiro há exatamente uma moeda, demonstre que o número de movimentos realizados do tipo 3 é igual ao número de movimentos realizados do tipo 4.

Problema 3

Sejam b e n inteiros positivos com $b \geq 2$. Define-se $s_b(n)$ como a soma dos dígitos de n escrito na base b. Existe algum inteiro $n \geq 2$ tal que

$$s_2(n) \geq s_3(n) \geq \cdots \geq s_{2025}(n)\ ?$$

Nota: Os dígitos de n escrito na base b são os números inteiros $a_0, a_1, \cdots, a_k$ tais que $n = a_0 + a_1 b^1 + a_2 b^2 + \cdots + a_k b^k$, com $a_k \neq 0$ e $0 \leq a_i \leq b-1$ para $i = 0, 1, \cdots, k$.

Duração da prova: 4 horas 30 minutos.
Pontuação de cada problema: 7 pontos

40° OLIMPÍADA IBEROAMERICANA DE MATEMÁTICA
Dia 2
26 de Setembro de 2025

Problema 4

Determine todos os pares de números primos (p, q) com $p > q > 1$, tais que

$$(p-q-1)^3 + (p-q)^3 + \cdots + (p-1)^3 + p^3 + (p+1)^3 + \cdots + (p+q)^3 + (p+q+1)^3 = (3pq)^2.$$

Note que o lado esquerdo da igualdade tem $2q+3$ parcelas, as quais são cubos de números consecutivos.

Problema 5

O triângulo ABC é acutângulo com $AB < AC$. Sejam ω a circunferência inscrita no triângulo ABC e Γ a sua circunferência circunscrita. Seja D o ponto de tangência de ω com o lado BC e seja L o ponto de ω diametralmente oposto a D. A reta AL intersecta o lado BC no ponto E. Seja N o ponto médio do arco BC de Γ que contém A. A reta NL intersecta novamente ω no ponto K.

Demonstre que os pontos A, N, E e K estão em uma mesma circunferência.

Problema 6

Um sultão capturou 23 magos e propõe um jogo para libertá-los. O sultão diz que vai construir 11 poços numerados de 1 a 11 e uma torre. Dentro de cada poço colocará dois dos magos e colocará o último na torre. Em cada mago nos poços colocará um chapéu de uma entre quatro cores (conhecidas por todos) e no da torre colocará um chapéu de uma entre 2025 cores (distintas das outras 4 e conhecidas por todos).

Nenhum mago saberá a cor do seu chapéu. Depois de ser colocado no poço, cada mago saberá o número do poço em que está, além disso, verá unicamente o chapéu do mago da torre e o do seu companheiro de poço. O mago da torre conhecerá o número de cada poço e poderá ver os chapéus de todos os outros magos. Num determinado momento, o sultão dará uma ordem e, simultaneamente, cada mago dirá: «A cor do meu chapéu é x», onde «x» é uma cor. Se pelo menos um mago diz uma frase verdadeira, todos os magos ganham e ficam livres, em outro caso, perdem.

Antes de serem postos nos seus lugares e de receber os seus chapéus, os magos terão à disposição um tempo para combinar uma estratégia, mas não poderão comunicar entre si depois disto. Os magos poderão assegurar a vitória, independentemente do que o sultão faça?

Duração da prova: 4 horas 30 minutos.
Pontuação de cada problema: 7 pontos