



## Primeiro Dia

28 de Outubro de 2025

**Problema 1.** Esmeralda e Sara jogam um jogo escolhendo números. Primeiro, Esmeralda escolhe um número primo p. Depois, Sara escolhe um número inteiro positivo k. O objetivo de Esmeralda é encontrar um conjunto infinito S de números inteiros positivos múltiplos de  $p^k$  tal que **exatamente** os k últimos dígitos de todos os elementos de S coincidem e são **não nulos**. Por exemplo, exatamente os três últimos dígitos de 9012345, 5345, 345, 15345 coincidem e são não nulos.

Prove que Esmeralda pode escolher um primo p para cumprir seu objetivo, independentemente da escolha de Sara.

**Problema 2.** Sejam a, b números inteiros tais que 1 < b < a. Suponha que

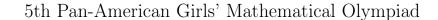
$$(a^2-1)(b^2-1)$$

é um quadrado perfeito.

- a) Demonstre que a + b é composto.
- b) Se a-b é primo, demonstre que 6ab-3 é um quadrado perfeito.

**Problema 3.** Seja ABC um triângulo com AB < AC e com circunferência circunscrita Γ. Seja M o ponto médio de BC. A mediatriz do segmento BC intersecta a reta AB em Y e a reta AC em X. Seja  $\omega$  a circunferência que passa por B, X e M. As circunferências  $\omega$  e Γ se intersectam em Z, com  $Z \neq B$ . Seja N a interseção da reta AZ com a reta XY. Mostre que N é o ponto médio de XY.

Duração: 4 horas e 30 minutos Cada problema vale 7 pontos





## Segundo Dia

29 de Outubro de 2025

**Problema 4.** Seja ABC um triângulo acutângulo e seja M o ponto médio de AC. Seja  $\Gamma$  a circunferência de centro M que passa por A. A reta BM intersecta  $\Gamma$  em D e E, onde D está dentro de ABC e E está fora de ABC. Seja r a reta perpendicular a BC que passa por B, e seja F a interseção de r com a reta AD. Demonstre que a reta CF é tangente à circunferência  $\omega$  que passa pelos pontos B, C e E.

**Problema 5.** Alice e Beatriz jogam em turnos, colocando peças retangulares em um tabuleiro  $2025 \times 2025$ . Alice joga primeiro. Uma jogada consiste em colocar uma peça no tabuleiro cobrindo uma quantidade inteira de casas. Não é permitido jogar uma peça do mesmo tamanho que a peça colocada pela oponente no turno imediatamente anterior. Cada peça deve ter todos os lados sobre as linhas do tabuleiro e não é permitido que as peças se sobreponham. Existem infinitas peças de cada tamanho possível, mas nenhuma de tamanho  $2025 \times 2025$ . Perde quem não consegue realizar uma jogada válida. Determine se existe uma estratégia ganhadora e, se existir, quem a possui.

**Observação:** Uma peça de tamanho  $a \times b$  é igual a uma peça  $b \times a$ .

**Problema 6.** Uma sequência estritamente crescente de inteiros  $(a_n)_{n\geq 1}$  é sertaneja se, para todo n,

$$a_{n+1} \le a_n + 3.$$

Suponha que em alguma sequência sertaneja não existam índices i, j, k, l, distintos dois a dois, tais que

$$a_i + a_j + a_k = a_l.$$

Demonstre que, ao dividir cada termo dessa sequência por 3, existe algum resto (0,1 ou 2) que não aparece.

Duração: 4 horas e 30 minutos Cada problema vale 7 pontos