

Primeiro dia

29 de setembro de 2025

Problema 1. Considere dois conjuntos $\mathcal{P}, \mathcal{Q} \subseteq \mathbb{R}^2$ que satisfazem as seguintes três condições:

1. $(n, 1) \in \mathcal{P}$ para todo $n \in \mathbb{Z}$.
2. Se $(a, b) \in \mathcal{P}$, então $(a, 0) \in \mathcal{Q}$.
3. Se um trapézio tem dois lados paralelos ao eixo- Y , com dois vértices em $\mathcal{P}$ e os outros dois vértices em $\mathcal{Q}$, então o ponto de interseção de suas diagonais também está em $\mathcal{P}$.

Demonstre que $\mathbb{Q} \times \{0\} \subseteq \mathcal{Q}$.

Problema 2. Seja $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $F(x, y) = (x + y - x^3, y - y^3)$. Defina $F^1 = F$ e $F^{n+1} = F \circ F^n$ para $n \geq 1$.

- a) Demonstre que se $|x| \leq 1/2$ e $|y| \leq 1/2$, então $\lim_{n \rightarrow \infty} F^n(x, y) = (0, 0)$.
- b) Demonstre que, para quaisquer $K > 0$, $\varepsilon > 0$, existem um inteiro positivo n e $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ com $0 < |(x_0, y_0)| < \varepsilon$ tais que $|F^n(x_0, y_0)| > K|(x_0, y_0)|$.

Problema 3. Seja $\mathcal{E}$ uma elipse com semieixos $a > b$ e seja B uma extremidade do eixo menor da elipse. Para todo ponto P da elipse, defina $m(P)$ como a maior distância de P a qualquer outro ponto da elipse; isto é, defina a função

$$m(P) = \max_{Q \in \mathcal{E}} PQ,$$

onde PQ denota a distância de P a Q .

- a) Demonstre que $m(B) \leq m(P)$ para todo ponto P da elipse.
- b) Determine o valor de $m(B)$ em função de a e b .

Cada problema vale 10 pontos
Tempo máximo: 4h 30m.

Segundo dia

30 de setembro de 2025

Problema 4. Encontre infinitas funções diferenciáveis $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ tais que $f(20, 25) = 2025$ e, para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$, valha

$$(f(x, y))^3 + (f_x(x, y))^3 + (f_y(x, y))^3 = 3f(x, y)f_x(x, y)f_y(x, y).$$

Nota: $f_x = \frac{\partial f}{\partial x}$ e $f_y = \frac{\partial f}{\partial y}$.

Problema 5. Seja n um inteiro positivo. No espaço das matrizes $n \times n$ com entradas reais, considere o subconjunto M_n das matrizes com entradas no conjunto $\{-1, 1\}$. Demonstre que no mínimo 25% das matrizes em M_n são invertíveis.

Problema 6. Demonstre que existem números reais positivos C e t , com $t > 1$, tais que se $n \geq 2$ e S é um conjunto de $2n$ pontos do plano em posição geral, com n pontos vermelhos e n pontos azuis, então há pelo menos Cn^t triângulos com dois vértices vermelhos e um vértice azul cujo interior não contém nenhum ponto de S .

Nota: Um conjunto de pontos é dito em posição geral se não há três pontos colineares.

Cada problema vale 10 pontos
Tempo máximo: 4h 30m.