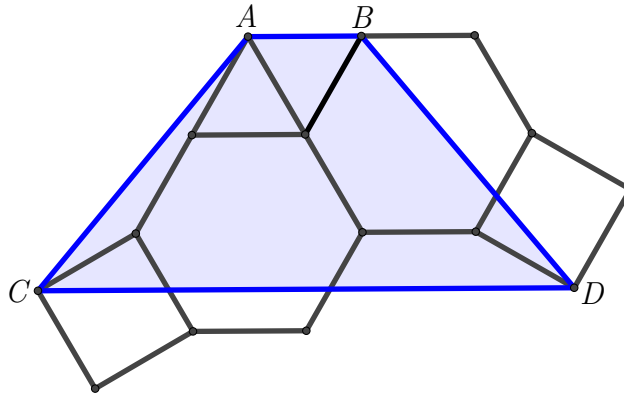




10^a Olimpíada Iraniana de Geometria
Nível Elementar
22 de outubro de 2023

Os problemas desta prova devem ser mantidos em sigilo até que sejam publicados no site oficial da IGO: igo-official.com

Problem 1. Todos os polígonos da figura abaixo são regulares. Prove que $ABCD$ é um trapézio isósceles.



Problem 2. Em um triângulo isósceles ABC com $AB = AC$ e $\angle A = 30^\circ$, pontos L e M estão nos lados AB e AC , respectivamente tais que $AL = CM$. O ponto K está no segmento AB de forma que $\angle AMK = 45^\circ$. Se $\angle LMC = 75^\circ$, demonstre que $KM + ML = BC$.

Problem 3. Seja $ABCD$ um quadrado de lado 1. Quantos pontos P no interior do quadrado (não nos lados) têm a propriedade de que o quadrado pode ser cortado em 10 triângulos de mesma área tais que todos tenham P como vértice?

Problem 4. Seja $ABCD$ um quadrilátero convexo. Seja E a interseção de suas diagonais. Suponha que $CD = BC = BE$. Mostre que $AD + DC \geq AB$.

Problem 5. Um polígono é decomposto em triângulos ao desenhar algumas diagonais interiores que não se intersectam de forma que para todo par de triângulos da triangulação que tem um lado em comum vale que a soma dos ângulos opostos ao lado em comum é maior que 180° .

1. Prove que tal polígono é convexo.
2. Prove que o circuncírculo de todo triângulo usado na decomposição contém o polígono inteiro em seu interior.

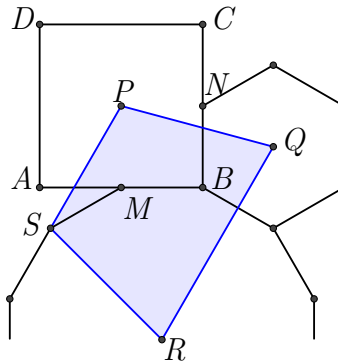
Tempo: 4 horas.
Cada problema vale 8 points.



10^a Olimpíada Iraniana de Geometria
Nível Intermediário
22 de outubro de 2023

Os problemas desta prova devem ser mantidos em sigilo até que sejam publicados no site oficial da IGO: igo-official.com

Problem 1. Os pontos M e N são os pontos médios dos lados AB e BC do quadrado $ABCD$. De acordo com a figura, temos desenhado um hexágono regular e um 12-ágono regular. Os pontos P , Q e R são os centros desses três polígonos. Prove que $PQRS$ é um quadrilátero cíclico.



Problem 2. Um hexágono convexo $ABCDEF$ com um ponto interior P é dado. Assuma que $BCEF$ é um quadrado em que ambos ABP e PCD são triângulos retângulos isósceles com ângulos retos em B e C , respectivamente. As retas AF e DE se intersectam em G . Prove que GP é perpendicular a BC .

Problem 3. Seja ω o circuncírculo de um triângulo ABC com $\angle B = 3\angle C$. A bissetriz interna de $\angle A$ intersecta ω e BC em M e D , respectivamente. O ponto E está na reta MC tal que M está entre C , E e ME é igual ao raio de ω . Prove que os circuncírculos dos triângulos ACE e BDM são tangentes.

Problem 4. Seja ABC um triângulo e P o ponto médio do arco BAC do circuncírculo do triângulo ABC com ortocentro H . Sejam Q, S os pontos tais que $HAPQ$ e $SACQ$ são paralelogramos. Seja T o ponto médio de AQ e R a interseção das retas SQ e PB . Prove que AB, SH e TR são concorrentes.

Problem 5. São dados n pontos no plano tais que ao menos 99% dos quadriláteros com vértices nesses pontos são convexos. Podemos achar um polígono convexo no plano tendo ao menos 90% dos pontos como vértices?

Tempo: 4 horas.
Cada problema vale 8 points.



10ª Olimpíada Iraniana de Geometria
Nível Avançado
22 de outubro de 2023

Os problemas desta prova devem ser mantidos em sigilo até que sejam publicados no site oficial da IGO: igo-official.com

Problem 1. Seja ABC um triângulo acutângulo. A bissetriz de $\angle BAC$ intersecta BC em P . Os pontos D e E estão nos segmentos AB e AC , respectivamente, tais que $BC \parallel DE$. Os pontos K e L estão nos segmentos PD e PE , respectivamente, tais que os pontos A, D, E, K, L são concíclicos. Prove que B, C, K, L também são concíclicos.

Problem 2. Seja ABC um triângulo com incentro I . As retas BI, CI intersectam os lados AC, AB em X, Y , respectivamente. Seja M o ponto médio do arco BAC do circuncírculo de ABC . Suponha que o quadrilátero $MXIY$ é cíclico. Prove que a área do quadrilátero $MBIC$ é igual à área do pentágono $BCXIY$.

Problem 3. São dados finitos pontos, $A_1, A_2, \dots, A_n$ em um segmento S de comprimento L . Para cada ponto A_i , seja c_i um disco fechado com centro em A_i e raio menor ou igual a 1. Denote a união dos c_i 's por C . Prove que o perímetro de C é menor que $4L + 8$. (Os raios dos discos não são necessariamente iguais).

Problem 4. Suponha que as bissetrizes de $\angle B$ e $\angle C$ em um triângulo ABC intersectam AC e AB em E e F , respectivamente. Denote o ponto de interseção de BE, CF por I e seja D o pé da perpendicular por I a BC . Sejam M e N os ortocentros dos triângulos AIF e AIE , respectivamente. As retas EM e FN concorrem em P . Seja X o ponto médio de BC . Seja Y o ponto na reta AD tal que $XY \perp IP$. Prove que a reta AI bissecta o segmento XY .

Problem 5. Em um triângulo ABC os pontos médios de AC e AB são M e N , respectivamente, e D é a projeção de A em BC . O ponto O é o circuncentro de ABC e os circuncírculos de BOC, DMN se intersectam em R, T . As retas DT, DR intersectam MN em E e F , respectivamente. As retas CT, BR se intersectam em K . Considere P um ponto em KD tal que PK é bissetriz de $\angle BPC$. Prove que os circuncírculos de ART e PEF são tangentes.

Tempo: 4 horas.
Cada problema vale 8 points.