

47ª OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA

Fase Única – Nível 1 (6º ou 7º ano)



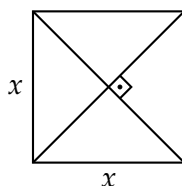
1. Um ano A é dito *inteiraço* quando os dois últimos algarismos de A **não** são 00 e a divisão de A pelo número formado pelos dois últimos dígitos de A tem como resultado um número inteiro. Por exemplo, 2025 e 2002 são anos inteiraços, pois $\frac{2025}{25} = 81$ e $\frac{2002}{02} = \frac{2002}{2} = 1001$ são inteiros. Já 2000 e 2003 não são inteiraços, pois 2000 termina em 00 e $\frac{2003}{3}$ não é inteiro.

(a) Quais são os próximos três anos inteiraços depois de 2025? Justifique sua resposta.

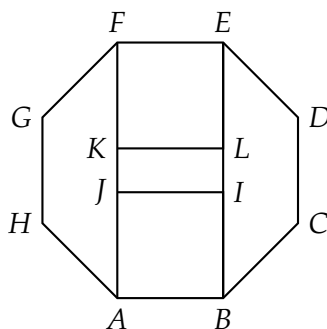
(b) Há quantos anos inteiraços entre 1900 e 1999? Justifique sua resposta.

2.

(a) A figura a seguir mostra um quadrado de lado x de diagonal 2 cm. Obtemos uma equação ao calcular a área do quadrado de duas formas: diretamente usando o lado do quadrado ou somando as quatro áreas dos triângulos formados pelos lados e pelas diagonais. Encontre essa equação e calcule o valor de x .



(b) A figura a seguir apresenta um octógono regular $ABCDEFGH$ de lado 2 cm. Cada um dos ângulos internos do octógono regular mede 135° . No interior do octógono, sobre os lados AB e EF foram construídos dois quadrados $ABIJ$ e $EFLK$, respectivamente. Qual é a área do quadrilátero $IJKL$?



3. Ana e Beto decidem disputar um jogo. Inicialmente estão escritos numa lousa os 25 números inteiros de 1 até 25 e nenhum deles está circulado. Eles jogam alternadamente com Ana jogando primeiro. Na sua vez, o jogador escolhe um número não circulado e o circula. Uma configuração é dita *final* se há três números circulados tal que a soma dos três é divisível por 3. O primeiro jogador que após sua jogada deixar uma configuração final perde o jogo.

(a) Suponha que os números circulados são 1, 2 e 4. Agora é a vez de Beto jogar. Como Beto deve jogar para vencer o jogo? Justifique!

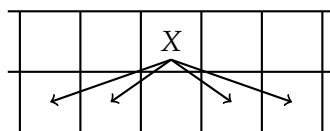
(b) Considerando o jogo no estado inicial em que nenhum número está circulado e Ana fará a primeira jogada, qual dos dois jogadores possui uma estratégia vencedora, ou seja, consegue vencer não importando quais sejam as jogadas de seu oponente? Lembre-se de explicar como o jogador que possui estratégia vencedora deve fazer suas jogadas para garantir a vitória.

4. Vamos chamar de *supersoma* de um número inteiro positivo N a soma de todos os números formados pelas ordenações dos algarismos de N . Vamos denotar a supersoma por $S(N)$. Por exemplo, se $N = AB$ tem dois algarismos ($A \neq 0$), então a supersoma de N é dada por $S(N) = AB + BA$, e se $N = ABC$ tem três algarismos ($A \neq 0$), então a supersoma de N é dada por $S(N) = ABC + ACB + BAC + BCA + CAB + CBA$. Observe que mesmo que N tenha algarismos repetidos fazemos todas as ordenações possíveis como se fossem algarismos todos distintos. Por exemplo, 100 tem supersoma $S(100) = 100 + 100 + 010 + 010 + 001 + 001 = 222$. Veja que não podemos considerar $N = 010$ com três algarismos, pois se N tem três algarismos, então é da forma ABC com A diferente de zero.

- (a) Encontre um N que não é múltiplo de 9, mas sua supersoma $S(N)$ é igual a um múltiplo de 9.
- (b) Prove que se N é múltiplo de 9, então a sua supersoma $S(N)$ é também um múltiplo de 9.
- (c) Qual é o menor número inteiro positivo N tal que $S(N)$ é um múltiplo de 2025?

5. Uma cartela do jogo *arrumadinho caótico* é um tabuleiro $2 \times n$ em que na primeira fila aparecem os números $1, 2, \dots, n$, nessa mesma ordem, e, na segunda fila, aparecem os mesmos números arrumados de forma diferente, satisfazendo as seguintes regras:

- (I) Um número escrito na primeira fila só pode aparecer na segunda fila em uma das duas colunas mais próximas que ficam à esquerda ou à direita da coluna em que ele está na primeira fila. Note que ele não pode aparecer na mesma coluna nas duas filas, ou seja, não há coluna com dois números iguais.



- (II) O conjunto de números escritos nas k primeiras casas consecutivas da segunda fila, contando da esquerda para a direita, nunca é igual ao conjunto $\{1, 2, 3, \dots, k\}$, exceto se $k = n$.

Por exemplo, na figura a seguir, os tabuleiros 1 a 4 não são cartelas do jogo. O Tabuleiro 1 não satisfaz a regra (I): o número 4 da segunda fila está três colunas à esquerda da quarta coluna. O Tabuleiro 2 não satisfaz a regra (II): as três primeiras casas da segunda fila formam o conjunto $\{1, 2, 3\}$. O Tabuleiro 3 não satisfaz a regra (I): temos uma coluna com dois números iguais e também o número 1 da segunda fila está três colunas à direita da primeira coluna (ou seja, a regra foi desrespeitada duas vezes). O Tabuleiro 4 não satisfaz nem a regra (I) nem a regra (II).

1	2	3	4	5
4	1	2	5	3

Tabuleiro 1
não é cartela

1	2	3	4	5
3	1	2	5	4

Tabuleiro 2
não é cartela

1	2	3	4	5
3	2	5	1	4

Tabuleiro 3
não é cartela

1	2	3	4	5
4	3	1	2	5

Tabuleiro 4
não é cartela

- (a) Copie a cartela a seguir na sua folha de solução e dê um exemplo de preenchimento para ela fazer parte do jogo.

1	2	3	4	5	6	7	8

- (b) Qual o número de cartelas 2×2025 desse jogo?