47ª OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA

Fase Única – Nível 2 (8º ou 9º ano)

PRIMEIRO DIA

---

1. Determine o menor valor possível para a soma dos dígitos de uma potência de 2 que tenha pelo menos dois dígitos e justifique por que não é possível encontrar uma potência de 2 com soma dos dígitos menor que a resposta encontrada.

---

2. Seja m um inteiro positivo. Ana e Banana jogam o seguinte jogo em um tabuleiro 5×5, inicialmente com 0 em todas as casas. Alternadamente, elas escolhem uma casa do tabuleiro e somam ao número escrito nela um inteiro do conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5\}$, de forma que o número escrito na casa não ultrapasse o número m. Ganha quem fizer uma jogada que complete as cinco casas de uma linha, uma coluna ou uma das duas diagonais com o número m em todas as casas. Para quais inteiros positivos m, Ana, a primeira a jogar, possui uma estratégia vencedora?

---

3. Seja ABC um triângulo acutângulo com $AB < AC$. Sejam D, E, F os pés das alturas de A, B, C, respectivamente, e seja M o ponto médio de BC. Seja P o ponto de interseção das retas EF e BC. Seja H o ortocentro de ABC. A reta PH intersecta o círculo de diâmetro AH novamente no ponto J. Seja R a reflexão de A por BC. As retas JD e PR se encontram em K. Prove que o quadrilátero $KDMR$ é cíclico.

47ª OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA

Fase Única – Nível 2 (8º ou 9º ano)

SEGUNDO DIA

Olimpíada Brasileira de Matemática

---

4. Seja ABC um triângulo com incentro I e exincentro relativo ao vértice A igual a K. Seja D o pé da bissetriz interna relativa ao vértice A e E o circuncentro do triângulo BDK. Seja também $F \neq C$ a segunda interseção de AC com a circunferência circunscrita a BEC.

(a) Prove que os pontos D, E, F são colineares.

(b) Prove que $ID = IF$.

- *O* incentro *de ABC é o ponto de interseção das bissetrizes internas de* $\angle A$, $\angle B$ *e* $\angle C$.
- *O* exincentro *de ABC relativo ao vértice A é o ponto de interseção da bissetriz interna de* $\angle A$*, a bissetriz do ângulo externo de B e a bissetriz do ângulo externo de C.*

---

5. A equação $ax^2 + bx + c = 0$, com a, b, c inteiros não nulos, tem uma solução real positiva menor do que $\frac{1}{2025}$.

(a) Dê um exemplo de equação satisfazendo o enunciado em que um dos números a, b, c é igual a 2025 e os outros dois números têm valor absoluto menor ou igual a 2025. Lembre-se de que $a \neq 0$, $b \neq 0$ e $c \neq 0$.

(b) Prove que pelo menos um dos números a, b ou c tem valor absoluto maior ou igual a 2025.

---

6. Seja $\mathcal{P}$ um polígono convexo de n vértices, $n \geq 4$. Podemos particionar $\mathcal{P}$ em triângulos, traçando diagonais que não se intersectam no interior de $\mathcal{P}$. Uma partição desse tipo é chamada de *triangulação*. Um conjunto X de diagonais de $\mathcal{P}$ é dito *obstrutivo* se tem a seguinte propriedade:

Qualquer triangulação de $\mathcal{P}$ utiliza ao menos uma diagonal que pertence ao conjunto X.

Determine, em função de n, qual é a menor quantidade possível de elementos de um conjunto obstrutivo.