

47ª OLIMPIÁDA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA

Fase Única – Nível 3 (Ensino Médio)

PRIMEIRO DIA



1. Prove que existe um inteiro positivo n e $2n$ números reais não negativos

$$0 \leq a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \dots \leq a_n \quad \text{e} \quad 0 \leq b_1 \leq b_2 \leq b_3 \leq \dots \leq b_n$$

satisfazendo as três propriedades a seguir:

- (i) $a_1 + a_2 + \dots + a_n \geq 2025^{2025}$;
- (ii) $b_1 + b_2 + \dots + b_n \geq 2025^{2025}$;
- (iii) $c_1 + c_2 + \dots + c_n \leq \frac{1}{2025^{2025}}$, onde $c_i = \min\{a_i, b_i\}$ para todo $i \in \{1, 2, \dots, n\}$.

Além disso, encontre o menor inteiro positivo n com tal propriedade.

2. Seja ABC um triângulo acutângulo com $AB < AC$ e seja Γ sua circunferência circunscrita. Defina M como o ponto médio do lado BC , e D , E e F como os pés das alturas relativas aos lados BC , AC e AB , respectivamente. Tome o ponto N como a interseção de EF e AM . Sejam R , S as interseções de EF e Γ , de forma que R esteja no arco menor AB de Γ e S esteja no arco menor AC de Γ . Além disso, suponha que BS e CR se encontram no ponto T . Mostre que DA é bissetriz do ângulo $\angle TDN$.

3. Seja $(a_n)_{n \geq 1}$ uma sequência infinita de inteiros positivos tal que

- (i) $a_1, a_2, \dots, a_{10000}$ são inteiros positivos distintos dois a dois;
- (ii) para $n > 10000$, define-se a_n como o menor inteiro positivo diferente de $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}$ tal que $|a_n - a_{n-1}|$ é uma potência de 2025 (note que 1 é uma potência de 2025).

Prove que todo inteiro positivo aparece na sequência.

47ª OLIMPIÁDA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA

Fase Única – Nível 3 (Ensino Médio)

SEGUNDO DIA



4. Para todo n inteiro positivo, defina

$$f(n) = \lfloor \sqrt{1} \rfloor + \lfloor \sqrt{2} \rfloor + \cdots + \lfloor \sqrt{n} \rfloor.$$

Determine todos os inteiros positivos k tais que existe um inteiro positivo n satisfazendo $f(n) = nk$.

Observação: para um número real x , define-se $\lfloor x \rfloor$ como o maior inteiro que é menor ou igual a x . Por exemplo, $\lfloor \sqrt{1} \rfloor = \lfloor 1 \rfloor = 1$, $\lfloor \sqrt{2} \rfloor = 1$ e $\lfloor \sqrt{14} \rfloor = 3$.

5. Seja $\mathcal{P}$ um polígono convexo de n vértices, $n \geq 4$. Podemos particionar $\mathcal{P}$ em triângulos, traçando diagonais que não se intersectam no interior de $\mathcal{P}$. Uma partição desse tipo é chamada de *triangulação*. Um conjunto X de diagonais de $\mathcal{P}$ é dito *obstrutivo* se tem a seguinte propriedade:

Qualquer triangulação de $\mathcal{P}$ utiliza ao menos uma diagonal que pertence ao conjunto X .

Determine, em função de n , qual é a menor quantidade possível de elementos de um conjunto obstrutivo.

6. Seja $ABCD$ um quadrilátero convexo satisfazendo $90^\circ > \angle ABC > \angle CDA > \angle DAB$. Seja $\mathcal{R}$ o conjunto de todas as retas ℓ tais que existe uma circunferência tangente às quatro reflexões de ℓ pelos quatro lados do quadrilátero $ABCD$. Prove que $\mathcal{R}$ pode ser particionado em 8 conjuntos de modo que as retas de cada conjunto sejam todas concorrentes ou todas paralelas.