13ª Olimpíada de Matemática da Comunidade dos Países de Língua Portuguesa

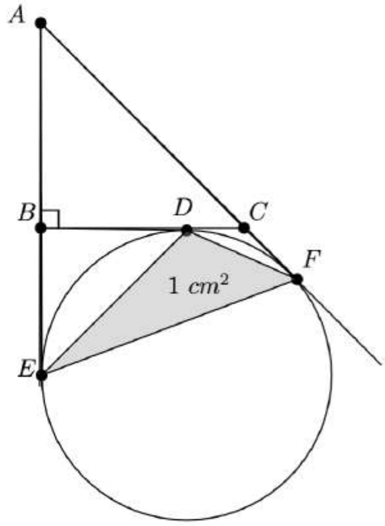
Primeiro dia – 29 de outubro de 2025

1. Dados números reais x, y e z, prove que $4x(y+z)(xy+xz+yz)+y^2z^2 \geq 0$.

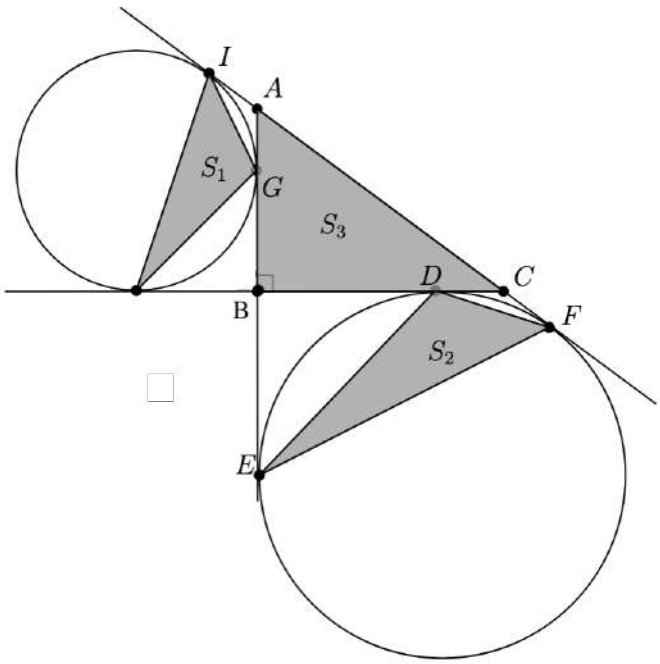
2. Encontre todos os inteiros positivos n e p tais que p é primo e $p^3+(np)^2+1=n^6$.

3. Resolva os itens a seguir:

a) Na figura ao lado, o triângulo ABC é isósceles e retângulo em B. Os pontos D, E e F são os pontos de tangência da circunferência ex-inscrita com os lados do triângulo. Se a área do triângulo DEF é $1\ cm^2$, encontre a área do triângulo ABC.



b) No triângulo ABC retângulo em B, se $AB = 3\,cm$ e $BC = 4\,cm$, encontre o valor de $\dfrac{S_1+S_2}{S_3}$, onde S_1, S_2 e S_3 são as áreas conforme a figura a seguir:



13ª Olimpíada de Matemática da Comunidade dos Países de Língua Portuguesa

Segundo dia – 30 de outubro de 2025

4. Os reais positivos a e b são tais que

$$2a + b + \frac{4}{ab} = 10.$$

Encontre, com justificativa, o maior valor possível de a.

5. Em um triângulo ABC, M é o ponto médio do lado AC e H é o ponto de interseção da reta perpendicular a AB traçada por C com o segmento AB. Prove que CH passa pelo ponto médio do segmento BM se, e somente se

$$3AC^2 = 3BC^2 + AB^2.$$

6. Em um tabuleiro 8×8, um sapo pula de casa em casa (sempre da casa em que está para uma casa que tenha um lado em comum com a mesma). Começando da casa de um dos cantos do tabuleiro, ele dá 64 saltos, de modo que visita todas as casas do tabuleiro e, por fim, retorna à casa inicial. A cada pulo, a distância do centro da casa em que o sapo está até o centro do tabuleiro é calculada. Um salto do sapo é considerado *elegante* se a distância ao centro, após o salto, diminuir. Calcule, com justificativa, o maior número possível de saltos elegantes dados pelo sapo.