

Outra técnica muito útil em Combinatória é o **princípio da inclusão-exclusão (PIE)** uma fórmula que permite contar o total de elementos da *união finita* de conjuntos finitos.

Os casos mais simples se referem aos números de elementos da união de dois ou três conjuntos finitos, nos quais o princípio da inclusão-exclusão garante que

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) \quad (1)$$

e

$$\begin{aligned} n(A \cup B \cup C) &= n(A) + n(B) + n(C) \\ &\quad - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) \\ &\quad + n(A \cap B \cap C), \end{aligned} \quad (2)$$

em que  $n(X)$  representa o número de elementos do conjunto finito  $X$ .

Para verificar (1), basta observar que a soma  $n(A) + n(B)$  conta todos os elementos de  $A \cup B$ , mas os elementos de  $A \cap B$  são contados exatamente duas vezes e, por isso, devemos descontar  $n(A \cap B)$  uma vez.

Por outro lado, para verificar (2), basta aplicarmos (1) três vezes, obtendo

$$\begin{aligned} n(A \cup B \cup C) &= n((A \cup B) \cup C) \\ &= n(A \cup B) + n(C) - n((A \cup B) \cap C) \\ &= n(A) + n(B) - n(A \cap B) + n(C) \\ &\quad - n((A \cap C) \cup (B \cap C)) \\ &= n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) \\ &\quad - n(A \cap C) - n(B \cap C) \\ &\quad + n((A \cap C) \cap (B \cap C)) \\ &= n(A) + n(B) + n(C) \\ &\quad - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) \\ &\quad + n(A \cap B \cap C). \end{aligned}$$

Vejamos, em dois exemplos simples, como aplicar o princípio da inclusão-exclusão em Combinatória.

**Exemplo 1.** Numa classe de 30 alunos, 14 falam inglês, 5 falam alemão e 3 falam inglês e alemão. Quantos alunos falam pelo menos uma língua, dentre inglês e alemão?

**Solução.** Seja  $I$  o conjunto dos alunos que falam inglês e  $A$  o conjunto dos alunos que falam alemão. O que queremos descobrir é o total de alunos que falam pelo menos uma das línguas, ou seja, queremos contar o número de elementos do conjunto  $I \cup A$ . Como  $n(I) = 14$ ,  $n(A) = 5$  e  $n(I \cap A) = 3$ , segue de (1) que

$$n(I \cup A) = 14 + 5 - 3 = 16.$$

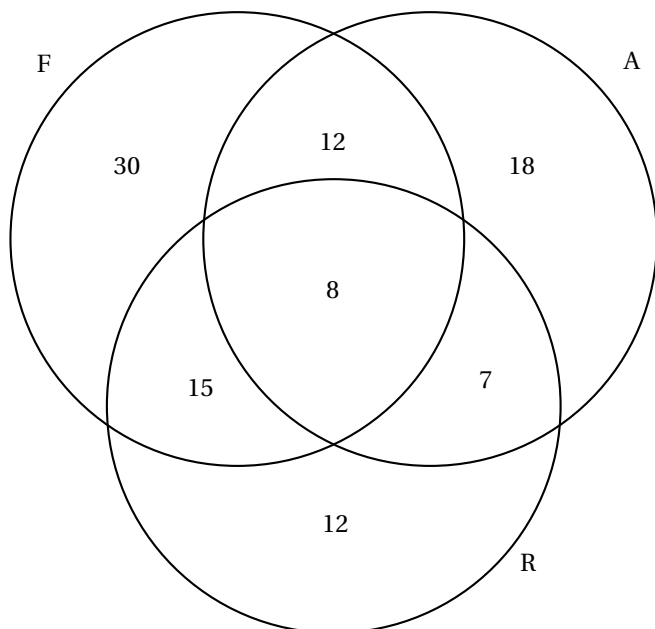
□

**Exemplo 2.** Em uma faculdade, 65 alunos estudam francês, 45 estudam alemão, 42 estudam russo, 20 estudam francês e alemão, 25 estudam francês e russo, 15 estudam alemão e russo e 8 estudam os 3 idiomas. Encontre o número de alunos de que estudam pelo menos um, dentre tais idiomas,

**Solução.** Queremos encontrar  $n(F \cup A \cup R)$ , onde  $F$ ,  $A$  e  $R$  denotam os conjuntos de alunos estudando francês, alemão e russo, respectivamente. Pelo princípio da inclusão-exclusão para três conjuntos, temos

$$\begin{aligned} n(F \cup A \cup R) &= n(F) + n(A) + n(R) \\ &\quad - n(F \cap A) - n(F \cap R) - n(A \cap R) \\ &\quad + n(F \cap A \cap R) \\ &= 65 + 45 + 42 - 20 - 25 - 15 + 8 \\ &= 100. \end{aligned}$$

Uma outra maneira de resolver esse problema seria montar o **diagrama de Venn** abaixo.



Observando que  $a + b + d + e = n(F) = 65$ ,  $b + c + e + f = n(A) = 45$ ,  $d + e + f + g = n(R) = 42$ ,  $b + e = n(F \cap A) = 20$ ,  $d + e = n(F \cap R) = 25$ ,  $e + f = n(A \cap R) = 15$  e  $e = n(F \cap A \cap R) = 3$ , obtemos o sistema de equações

$$\begin{cases} a + b + d + e = 65 \\ b + c + e + f = 45 \\ d + e + f + g = 42 \\ b + e = 20 \\ d + e = 25 \\ e + f = 15 \\ e = 3 \end{cases},$$

o qual pode ser resolvido facilmente e fornece  $a = 30$ ,  $b = 12$ ,  $c = 18$ ,  $d = 15$ ,  $e = 8$ ,  $f = 7$  e  $g = 12$ . Logo,

$$\begin{aligned} n(F \cup A \cup R) &= a + b + c + d + e + f + g \\ &= 30 + 12 + 18 + 12 + 15 + 7 + 8 \\ &= 100. \end{aligned}$$

□

De maneira geral, dados  $n$  conjuntos finitos  $A_1, A_2, \dots, A_n$ , o número de elementos de sua união é

$$\begin{aligned} n(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) &= \sum_{i=1}^n n(A_i) - \sum_{1 \leq i < j} n(A_i \cap A_j) \\ &\quad + \sum_{1 \leq i < j < k} n(A_i \cap A_j \cap A_k) \\ &\quad - \sum_{1 \leq i < j < k < p} n(A_i \cap A_j \cap A_k \cap A_p) \\ &\quad + \dots \\ &\quad + (-1)^{n-1} n(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n). \end{aligned} \quad (3)$$

**Teorema 1. (Princípio da inclusão e da exclusão)** O número de elementos na união de  $n$  conjuntos finitos  $A_1, A_2, \dots, A_n$  é dado por (3).

**Demonstração 1.** Precisamos mostrar que um elemento que pertença a  $p$ , para  $p = 1, 2, 3, \dots, n$ , dos conjuntos  $A_i$ 's é contado por (3) somente uma vez. Pertencendo a  $p$  dos conjuntos  $A_i$ 's ele será contado  $p$  vezes em

$$\sum_{i=1}^n n(A_i).$$

Em

$$\sum_{1 \leq i < j} n(A_i \cap A_j)$$

será contado  $\binom{p}{2}$ , em

$$\sum_{1 \leq i < j < k} n(A_i \cap A_j \cap A_k)$$

$\binom{p}{3}$ , e assim sucessivamente até o termo  $n(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_p)$ , que nos dará uma contribuição igual a 1. É claro que a interseção de mais do que  $p$  conjuntos não fornecerá nenhuma contribuição, uma vez que o elemento, em questão, pertence a exatamente  $p$  dos conjuntos  $A_1, A_2, \dots, A_n$ . Somando todas estas contribuições temos:

$$\binom{p}{1} - \binom{p}{2} + \binom{p}{3} - \binom{p}{4} + \dots + (-1)^p \binom{p}{p} = 1.$$

### Exercícios propostos

- Há 190 pessoas na praia. 110 usam óculos, 70 usam trajes de banho e 95 usam chapéu. Todo mundo está usando pelo menos um desses itens, 30 usam trajes de banho e óculos escuros, 25 estão vestindo trajes de banho e chapéu e 40 usam óculos escuros e chapéu. Quantas pessoas estão usando os três itens?
- Denotemos por  $n(X)$  o número de elementos de um conjunto finito  $X$ . Sejam  $A, B$  e  $C$  conjuntos tais que  $n(AB) = 8$ ,  $n(AC) = 9$ ,  $n(BC) = 10$ ,  $n(ABC) = 11$  e  $n(\overline{ABC}) = 2$ . Determine  $n(A) + n(B) + n(C)$ .
- Um número telefônico de 7 algarismos  $d_1 d_2 d_3 - d_4 d_5 d_6 d_7$  será chamado de *memorizável* se o prefixo  $d_1 d_2 d_3$  é exatamente igual a  $d_4 d_5 d_6$  ou  $d_5 d_6 d_7$  (possivelmente ambos). Assuma que cada  $d_i$  pode ser qualquer um dos dez algarismos 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Determine o total de números memorizáveis.
- Quantos inteiros entre 1 e 3600, inclusive, são divisíveis por 3, 5 ou 7?
- Quantas são as permutações das letras da palavra BRASIL em que o B ocupa o primeiro lugar, ou o R em segundo lugar, ou o L em sexto lugar?
- Dentre os inteiros de 1 a 1000000, inclusive, quantos não são quadrados perfeitos, cubos perfeitos e nem quartas potências perfeitas?
- Uma permutação de  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$  será chamada de caótica quando nenhum dos  $a_i$ 's se encontra na posição original, isto é, na  $i$ -ésima posição. Determine o total de permutações caóticas para quatro elementos distintos.
- Cada quadradinho unitário de um quadrado  $3 \times 3$  será colorido de azul ou vermelho. Quantas colorações possuem um quadrado  $2 \times 2$  vermelho?