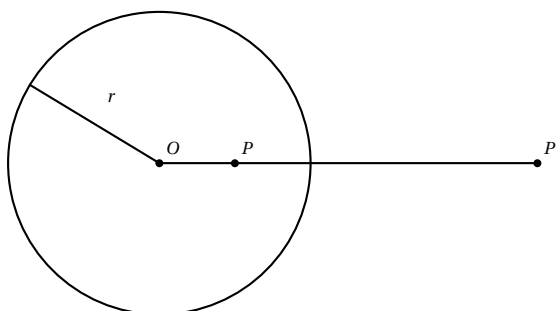


Inversão

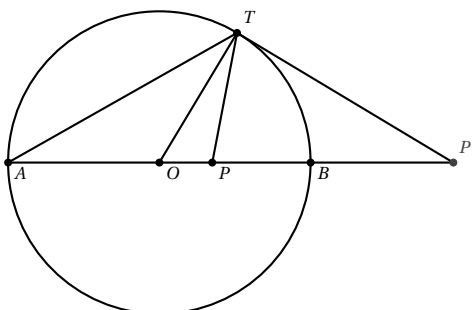
Definição 1. A inversão é uma transformação entre os pontos do plano e se realiza com a ajuda de uma circunferência Γ , de centro O e raio r , a que chamaremos de **circunferência de inversão**. Diremos que P' é o **ponto inverso** de P com a relação $\Gamma = (O, r)$ se

- (a) P' se encontra na reta que parte de O em direção a P .
- (b) $OP \cdot OP' = r^2$.



Da definição são imediatas as seguintes afirmações:

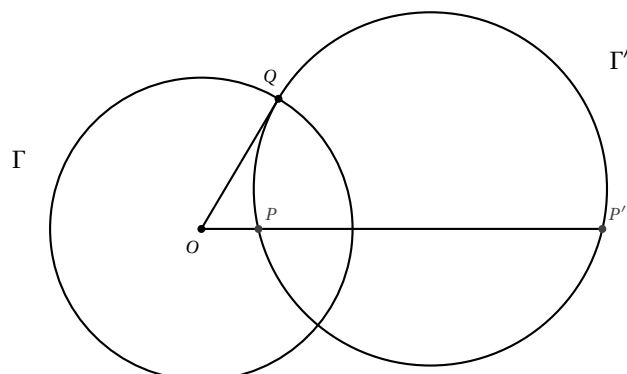
- (i) Se P' é o inverso de P , então P é o inverso de P' .
- (ii) Os pontos de Γ são seus próprios inversos e são os únicos pontos com essa propriedade.
- (iii) Para os pontos inversos P e P' , que não estão sobre Γ , temos que um se encontra no interior de Γ e o outro no exterior.
- (iv) Se P' está no exterior de Γ e T é um ponto sobre Γ tal que $P'T$ é tangente a Γ , então o pé da perpendicular de T sobre OP' é P , o inverso de P' . (Este fato segue do fato de que os triângulos OTP' e OPT são semelhantes).
- (v) Se P está no interior de Γ e T é a intersecção da perpendicular a OP por P com a circunferência, então a tangente a Γ por T intersecta OP em P' , o inverso de P .
- (vi) Com a ajuda de (iv) e (v) é fácil construir com régua e compasso o inverso de um ponto.
- (vii) O ponto O , centro da circunferência de inversão, não possui inverso.
- (viii) Se A e B são extremos de um diâmetro de (O, r) então os pontos P e P' são **conjugados harmônicos** com relação a A e B , ou seja, $\frac{AP}{PB} = \frac{AP'}{P'B}$.



Temos que

$$\frac{AP}{PB} = \frac{AP'}{P'B} \Leftrightarrow \frac{r + OP}{r - OP} = \frac{r + OP'}{OP' - r} \Leftrightarrow (r + OP)(OP' - r) = (r + OP')(r - OP) \Leftrightarrow OP \cdot OP' = r^2.$$

(ix) Toda circunferência que passa por dois pontos inversos P e P' é ortogonal à circunferência de inversão.



Seja Q um dos pontos de intersecção de Γ com a circunferência Γ' que passa por P e P' . Como $OP \cdot OP' = r^2 = OQ^2$, (considerando a potência do O com relação a Γ'), temos que OQ é tangente a Γ' . Logo, Γ e Γ' são ortogonais.

(x) Seja Γ' uma circunferência ortogonal a Γ . O inverso P' , de um ponto P de Γ' , se encontra também em Γ' .

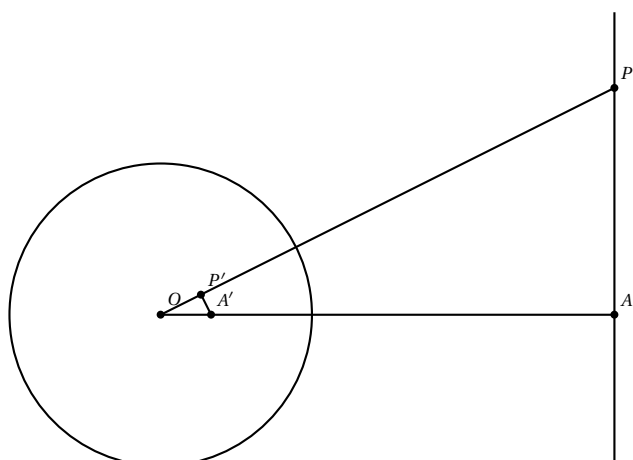
Sejam P em Γ' e P' o ponto de intersecção da reta OP com Γ' . Para Q , o ponto comum às circunferências ortogonais Γ e Γ' , temos que OQ é tangente a Γ' . Como a potência de O com relação a Γ' é $OQ^2 = OP \cdot OP'$, temos que P e P' são pontos inversos.

Teorema 1. Seja $\Gamma = (O, r)$ uma circunferência de inversão.

- (i) Uma reta que passa por O , se inverte nela mesma.
- (ii) O inverso de uma reta que não passa por O , é uma circunferência que passa por O .
- (ii) O inverso de uma circunferência que passa por O , é uma reta que não passa por O .

Demonstração 1. (i) Para uma reta l que passa por O , é claro que o inverso de um ponto P de l , se encontra sobre l . Recorde que O é o único ponto que não possui inverso, o que na realidade estamos querendo inverter a reta l sem o ponto O .

(ii) Sejam l uma reta que não passa por O , A o pé da perpendicular de O sobre l e A' o inverso de A .

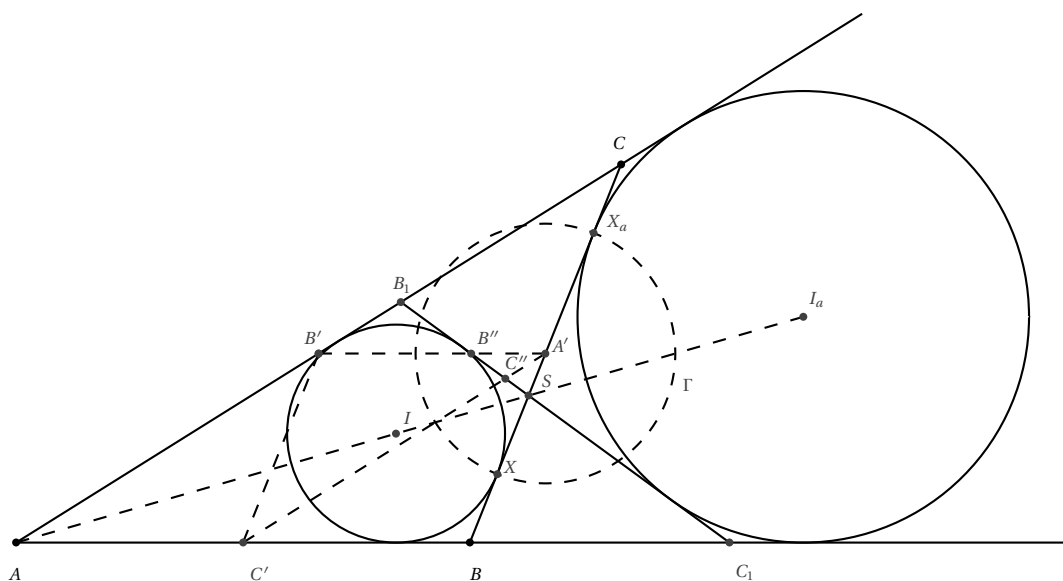


Sejam P um ponto de l e P' seu inverso, como $OP \cdot OP' = OA \cdot OA'$, os triângulos OAP e $OP'A'$ são semelhantes. Porém OAP é um triângulo retângulo com ângulo reto em A , logo o triângulo $OP'A'$ é um triângulo retângulo com o ângulo reto em P' , ou seja, P' se encontra sobre a circunferência de diâmetro OA' . Reciprocamente qualquer ponto P' de tal circunferência é inverso do ponto de intersecção da reta OP' com l . Assim o inverso de l é a circunferência de diâmetro OA' , não incluindo o ponto O .

(iii) Basta seguir os passos inversos da demonstração de (ii).

Teorema 2. (Feuerbach) O círculo dos nove pontos de um triângulo é tangente à circunferência inscrita e as três circunferências ex - inscritas.

Demonstração 2. A figura abaixo mostra o triângulo ABC , o triângulo formado pelos pontos médios A' , B' e C' , a circunferência inscrita com centro em I que tangencia BC no ponto X , o círculo ex - inscrito com centro em I_a que tangencia BC em X_a e uma tangente comum às circunferências B_1C_1 que intersecta os três lados do triângulo ABC . Temos também a circunferência Γ com diâmetro XX_a e os pontos S , B'' , C'' que são as intersecções de B_1C_1 com BC , $A'B'$ e $A'C'$. Como Γ é ortogonal à circunferência inscrita e à circunferência ex - inscrita com, com centro em I_a , a inversão por Γ deixa ambos os círculos invariantes. Provaremos que Γ inverte o círculo dos nove pontos na reta B_1C_1 .



Já sabemos que $BX = X_aC = p - b$, que o centro de Γ é A' , ponto médio de BC e o diâmetro de Γ é $XX_a = |a - 2(p - b)| = |b - c|$. O círculo dos 9 pontos passa pelo centro A' de Γ , ou seja, sua imagem pela inversão é uma reta. Vamos mostrar que essa reta passa por B'' e C'' e, portanto, passa por B_1 e C_1 , mostrando que B'' e C'' são os inversos de B' e C' , respectivamente. Sendo S o encontro da bissetriz interna relativa ao vértice A com o lado BC , já sabemos provar que $CS = \frac{ab}{b+c}$ e $SB = \frac{ac}{b+c}$ e que $SA' = |\frac{1}{2}(CS - BS)| = \frac{1}{2}|\frac{ab}{b+c} - \frac{ac}{b+c}| = |\frac{a(b-c)}{2(b+c)}|$. Além disso, $BC_1 = |AC_1 - AB| = |AC - AB| = |b - c|$ e, de maneira análoga, $CB_1 = |b - c|$. Temos que $\Delta SA'B'' \sim \Delta SBC_1$ e $\Delta SA'C'' \sim \Delta SCB_1$, ou seja,

$$\frac{A'B''}{|b-c|} = \frac{A'B''}{BC_1} = \frac{SA'}{SB} = \frac{|b-c|}{2c}$$

e

$$\frac{A'C''}{|b-c|} = \frac{A'C''}{CB_1} = \frac{SA'}{SC} = \frac{|b-c|}{2b}.$$

Portanto, $A'B' \cdot A'B'' = \frac{c}{2} \frac{(b-c)^2}{2c} = \left(\frac{b-c}{2}\right)^2$ e $A'C' \cdot A'C'' = \frac{b}{2} \frac{(b-c)^2}{2b} = \left(\frac{b-c}{2}\right)^2$. Assim, Γ , cujo raio mede $\frac{|b-c|}{2}$, inverte B' em B'' e C' em C'' , como desejado. Finalmente, Γ mantém fixos pela inversão o círculo inscrito e a circunferência ex - inscrita de centro I_a e a tangente comum a esses círculos no círculo dos nove pontos e, com isso, provamos que o círculo dos nove pontos tangencia a circunferência inscrita e as três circunferências ex - inscritas.

Exercícios propostos

1. Seja ABC um triângulo com incentro I . Prove que se uma circunferência é tangente a BC e a AI em I , será também tangente ao círculo circunscrito ao triângulo ABC .
2. Seja ABC um triângulo com semi-perímetro p . Sejam D e E pontos sobre AB de maneira que $CD = CE = p$. Prove que a circunferência ex - inscrita de ABC , relativa ao vértice C , é tangente ao círculo circunscrito ao triângulo CDE .
3. (Shortlist IMO) Sejam $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ e Γ_4 circunferências distintas tais que Γ_1, Γ_3 são externamente tangentes em P , e Γ_2, Γ_4 são externamente tangentes no mesmo ponto P . Se Γ_1 e Γ_2 ; Γ_2 e Γ_3 ; Γ_3 e Γ_4 ; Γ_4 e Γ_1 intersectam - se em A, B, C, D , respectivamente, e todos esses pontos são diferentes de P , prove que

$$\frac{AB \cdot BC}{AD \cdot DC} = \frac{PB^2}{PD^2}.$$

4. (Romênia) Seja ABC um triângulo e um ponto D sobre BC . Duas circunferências são tangentes exteriormente em um ponto M sobre o segmento AD , são tangentes à circunferência circunscrita ao triângulo ABC e são tangentes ao lado BC . Prove que AD é bissetriz do ângulo $\angle A$.
5. Prove que para qualquer conjunto finito de pontos no plano, tais que não existem três colineares e nem todos eles estão sobre uma circunferência, então existe uma circunferência que passa por exatamente três deles.