

# Nas paralelas do circuncesso (Lista)

Nível 2 - Semana Olímpica/2026

Prof. Armando Barbosa

Vitória/ES, 30 de janeiro de 2026

**Problema 1.** (OBM/2025 - N2/P4) Dado um triângulo  $ABC$ , seja  $I$  seu incentro e  $K$  seu  $A$ -exincentro. Seja  $D = BC \cap AK$  e  $E$  o circuncentro do  $\triangle BDK$ . Seja  $F \neq C$  tais que  $\{C, F\} = AC \cap (BEC)$ . Prove que:

- $E, D$  e  $F$  são colineares.
- $ID = IF$ .

**Problema 2.** (Hong Kong/TST - 2017) Num triângulo  $ABC$ , seja  $AD$  a bissetriz do ângulo  $\angle BAC$ , com  $D$  pertencente ao segmento  $BC$ . A perpendicular de  $B$  a  $AD$  intersecta o circuncírculo do triângulo  $ABD$  nos pontos  $B$  e  $E$ . Sendo  $O$  o circuncentro do triângulo  $ABC$ , prove que  $A, O$  e  $E$  são colineares.

**Problema 3.** (Pan-africana/2019) As tangentes ao circuncírculo do triângulo  $ABC$  em  $B$  e  $C$  encontram-se em  $D$ . O circuncírculo do triângulo  $BCD$  encontra os lados  $AC$  e  $AB$  novamente em  $E$  e  $F$ , respectivamente. Sendo  $O$  o circuncentro do triângulo  $ABC$ , prove que  $AO \perp EF$ .

**Problema 4.** (Bangladesh-2025) Seja  $ABC$  um triângulo dado com circuncentro  $O$  e ortocentro  $H$ . Sejam  $D, E$  e  $F$  os pés das perpendiculares de  $A, B$  e  $C$  aos lados opostos, respectivamente. Sendo  $A'$  a reflexão de  $A$  em relação a  $EF$ , prove que  $HOA'D$  é um quadrilátero cíclico.

**Problema 5.** (Centro-americana/2022) Seja  $ABC$  um triângulo acutângulo com ortocentro  $H$  e circuncentro  $O$ . Seja  $D$  a interseção de  $AO$  e  $BH$ . Seja  $P$  o ponto em  $AB$  tal que  $PH = PD$ . Prove que os pontos  $B, D, O$  e  $P$  pertencem a uma circunferência.

**Problema 6.** (Cone Sul/2017) Seja  $ABC$  um triângulo acutângulo com circuncentro  $O$ . Os pontos  $X$  e  $Y$  são escolhidos tais que:

- $\angle XAB = \angle YCB = 90^\circ$
- $\angle ABC = \angle BXA = \angle BYC$
- $X$  e  $C$  estão em semi-planos diferentes em relação a  $AB$
- $Y$  e  $A$  estão em semi-planos diferentes em relação a  $BC$

Prove que  $O$  é ponto médio de  $XY$ .

**Problema 7.** (IMO/SL - 2015/G1) Seja  $ABC$  um triângulo acutângulo com ortocentro  $H$ . Seja  $G$  o ponto tal que o quadrilátero  $ABGH$  é um paralelogramo. Seja  $I$  o ponto na reta  $GH$  tal que  $AC$  passa pelo ponto médio de  $HI$ . Sejam  $C$  e  $J$  os pontos em que a reta  $AC$  intersecta a circunferência circunscrita do  $\triangle GCI$ . Prove que  $IJ = AH$ .

**Problema 8.** (IMO/SL - 2023/G1) Seja  $ABCDE$  um pentágono convexo tal que  $\angle ABC = \angle AED = 90^\circ$ . Sabe-se que o ponto médio de  $CD$  é o circuncentro do  $\triangle ABE$ . Seja  $O$  o circuncentro do  $\triangle ACD$ . Prove que  $AO$  passa pelo ponto médio de  $BE$ .

## 0.1 Outras do tema

**Problema 9.** (Cone Sul/2025) Seja  $ABCD$  um quadrilátero convexo com lados  $AB, BC, CD$  e  $DA$ , tal que  $AB > BC$ . O quadrilátero satisfaz as seguintes condições:  $\angle ABD = 60^\circ, \angle CBD = 60^\circ$  e  $\angle ACD = 30^\circ$ . Prove que  $\angle BAC = \angle DAC$ .

**Problema 10.** (Grécia/2025) Seja  $ABC$  um triângulo acutângulo e  $D$  um ponto de lado  $BC$ . Considere os pontos  $E, Z$  na reta  $AD$  tais que  $EB \perp AB$  e  $ZC \perp AC$ , e os pontos  $H, T$  na reta  $BC$  tais que  $EH \parallel AC$  e  $ZT \parallel AB$ . O circuncírculo do triângulo  $BHE$  intersecta pela segunda reta  $AB$  no ponto  $M (M \neq B)$  e o circuncírculo do triângulo  $CTZ$  intersecta pela segunda reta  $AC$  no ponto  $N (N \neq C)$ . Prove que as retas  $MH, NT$  e  $AD$  coincidem.

## 0.2 Duas de Reim (somente na versão online)

**Problema 11.** (Indonésia/2020) Dado um quadrilátero cíclico  $ABCD$ , sejam  $X$  um ponto no segmento  $BC (X \neq BC)$  tal que a reta  $AX$  seja perpendicular à bissetriz do ângulo  $\angle CBD$  e  $Y$  um ponto no segmento  $AD (Y \neq D)$  tal que  $BY$  seja perpendicular à bissetriz do ângulo  $\angle CAD$ . Prove que  $XY \parallel CD$ .

**Problema 12.** (IMO/2018) Seja  $\Gamma$  o circuncírculo do triângulo  $ABC$ . Os pontos  $D$  e  $E$  estão sobre os segmentos  $AB$  e  $AC$ , respectivamente, de modo que  $AD = AE$ . As mediatrizes de  $BD$  e  $CE$  intersectam os arcos menores  $AB$  e  $AC$  de  $\Gamma$  nos pontos  $F$  e  $G$ , respectivamente. Prove que as retas  $DE$  e  $FG$  são paralelas (ou são a mesma reta).