

Álgebra

Carlos Shine

1 Algumas dicas

Além das usuais fórmulas de fatoração, produtos notáveis e equações do segundo grau, considere também:

- Caso algo apareça muitas vezes, pode valer a pena trocar de variável.
- Considere as propriedades de proporções

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d} = \frac{a-c}{b-d},$$

se $b+d \neq 0$ e $b-d \neq 0$ (se necessário, estude esses casos separadamente.)

- Muitas vezes, a melhor maneira de fatorar é fazer aparecer diferenças.
- Um jeito de fatorar bastante utilizado é o bom e velho agrupamento: por exemplo,

$$ab + bc + cd + da = b(a+c) + d(c+a) = (a+c)(b+d).$$

- Nem sempre vale a pena manter a simetria. Um exemplo típico é quando aparecem $x-y$, $y-z$ e $z-x$; nesse caso, pode valer a pena fazer $z-x = -(x-y) - (y-z)$ e ver se $x-y$ e/ou $y-z$ fatoram, ou até fazer $a = x-y$ e $b = y-z$, para os quais $z-x = -a-b$.
- Não abra contas tudo de uma vez. Tente fatorar aos poucos ou dividindo os termos em partes.
- Em geral, fatorar é mais ou menos como arrumar o quarto: primeiro, a gente abre tudo e fica bagunçado e depois organiza para deixar tudo mais arrumado. Então, não hesite em fazer algumas contas grandes!

2 Problemas

1. Calcule

$$\frac{1}{2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{4 + \frac{1}{\dots + \frac{1}{2026}}}}} + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{3 + \frac{1}{4 + \frac{1}{\dots + \frac{1}{2026}}}}}.$$

2. Se $x \neq 1$, $y \neq 1$, $x \neq y$ e $\frac{yz-x^2}{1-x} = \frac{xz-y^2}{1-y}$, demonstre que ambas as frações são iguais a $x+y+z$.
3. Sendo a, b, c racionais distintos, prove que

$$\frac{1}{(a-b)^2} + \frac{1}{(b-c)^2} + \frac{1}{(c-a)^2}$$

é sempre o quadrado de um número racional.

4. Mostre que se

$$\frac{x}{y+z+t} = \frac{y}{z+t+x} = \frac{z}{t+x+y} = \frac{t}{x+y+z},$$

então

$$\frac{x+y}{z+t} + \frac{y+z}{t+x} + \frac{z+t}{x+y} + \frac{t+x}{y+z}$$

é um inteiro.

5. Prove que se $\sqrt{x^2 + \sqrt[3]{x^4 y^2}} + \sqrt{y^2 + \sqrt[3]{x^2 y^4}} = a$ então $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$.

6. Fatore as expressões.

(a) $x^5 + x^4 + 1$

(b) $(b-c)^3 + (c-a)^3 + (a-b)^3$

(c) $ab(a^2 - b^2) + bc(b^2 - c^2) + ca(c^2 - a^2)$

(d) $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$

(e) $x^4 + 4y^4$

(f) $2a^2b^2 + 2b^2c^2 + 2c^2a^2 - a^4 - b^4 - c^4$

(g) $2(x^4 + y^4 + z^4 + w^4) - (x^2 + y^2 + z^2 + w^2)^2 + 8xyzw$

7. Calcule

$$\frac{(10^4 + 324)(22^4 + 324)(34^4 + 324)(46^4 + 324)(58^4 + 324)}{(4^4 + 324)(16^4 + 324)(28^4 + 324)(40^4 + 324)(52^4 + 324)}.$$

8. Sabe-se que $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{a+b+c}$. Prove que, para todo inteiro ímpar m , $\frac{1}{a^m} + \frac{1}{b^m} + \frac{1}{c^m} = \frac{1}{a^m + b^m + c^m}$.

9. (a) Sendo $x = t + \frac{1}{t}$, calcule $x^2 - 2$.

(b) Considere uma sequência de números reais definida por

$$a_{n+1} = a_n + \frac{1}{a_n} \quad \text{para } n = 0, 1, 2, \dots$$

Demonstrar que, qualquer que seja o número real positivo a_0 , tem-se que a_{1996} é maior que 63.

10. Sendo $m = \frac{a-b}{a+b}$, $n = \frac{b-c}{b+c}$ e $p = \frac{c-a}{c+a}$, prove que

$$(1+m)(1+n)(1+p) = (1-m)(1-n)(1-p).$$

11. Dado que $\frac{(a-b)(b-c)(c-a)}{(a+b)(b+c)(c+a)} = \frac{1}{11}$, qual é o valor de $\frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a}$?

12. Resolva, em reais, a equação

$$x^2 + \frac{x^2}{(x+1)^2} = 3.$$

13. Resolva, em reais, a equação

$$\sqrt{x - \frac{1}{x}} + \sqrt{1 - \frac{1}{x}} = x.$$

14. Resolva, em reais, a equação

$$\frac{x-a-b}{c} + \frac{x-b-c}{a} + \frac{x-c-a}{b} = 3.$$

15. Resolva a equação $\sqrt{5 - \sqrt{5 + x}} = x$.

16. Simplifique

$$\begin{aligned} \text{(a)} & \left(\frac{b^2 - bc + c^2}{a} + \frac{a^2}{b+c} - \frac{3}{\frac{1}{b} + \frac{1}{c}} \right) \cdot \frac{\frac{2}{b} + \frac{2}{c}}{\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca}} + (a+b+c)^2 \\ \text{(b)} & \frac{\frac{b^2 - c^2}{a} + \frac{c^2 - a^2}{b} + \frac{a^2 - b^2}{c}}{\frac{a-b}{c} + \frac{b-c}{a} + \frac{c-a}{b}} \\ \text{(c)} & \frac{a^2(a+b)(a+c)}{(a-b)(a-c)} + \frac{b^2(b+a)(b+c)}{(b-a)(b-c)} + \frac{c^2(c+a)(c+b)}{(c-a)(c-b)} \\ \text{(d)} & \frac{(a-b)(a+b+c)(a+b-c)}{2a^2b^2 + 2b^2c^2 + 2c^2a^2 - a^4 - b^4 - c^4} \\ \text{(e)} & \frac{(a^2 - b^2)^3 + (b^2 - c^2)^3 + (c^2 - a^2)^3}{(a-b)^3 + (b-c)^3 + (c-a)^3} \end{aligned}$$

17. Sendo $x + y + z = 0$, calcule

$$\left(\frac{x-y}{z} + \frac{y-z}{x} + \frac{z-x}{y} \right) \left(\frac{z}{x-y} + \frac{x}{y-z} + \frac{y}{z-x} \right).$$

18. Sabe-se que $ab + bc + ca = 0$. Prove que $P(a-b) + P(b-c) + P(c-a) = 2P(a+b+c)$, em que $P(x) = mx^4 + nx^2$, m, n reais quaisquer.

19. Sejam a, b e c reais não nulos tais que $a + b + c = 0$. Calcule os possíveis valores de

$$\frac{(a^3 + b^3 + c^3)^2(a^4 + b^4 + c^4)}{(a^5 + b^5 + c^5)^2}.$$

20. Temos que $a^3 - 3a^2 + 5a = 1$ e $b^3 - 3b^2 + 5b = 5$, onde $a, b \in \mathbb{R}$. Calcule $a + b$.

21. Sejam a, b e c números reais tais que

$$(bc - a^2)^{-1} + (ca - b^2)^{-1} + (ab - c^2)^{-1} = 0.$$

Prove que

$$a(bc - a^2)^{-2} + b(ca - b^2)^{-2} + c(ab - c^2)^{-2} = 0.$$

22. Sabe-se que $ax + by + cz = 0$. Simplifique

$$\frac{ax^2 + by^2 + cz^2}{bc(y-z)^2 + ca(z-x)^2 + ab(x-y)^2}.$$

23. Sendo $A = a + b + c + d$, $B = a + b - c - d$, $C = a - b + c - d$ e $D = a - b - c + d$, prove que se $ab(a^2 + b^2) = cd(c^2 + d^2) \neq 0$ então

$$AB(A^2 + B^2) = CD(C^2 + D^2).$$

24. Sabe-se que $a^3 + b^3 + c^3 = (a+b)(b+c)(c+a)$ e $(b^2 + c^2 - a^2)x = (c^2 + a^2 - b^2)y = (a^2 + b^2 - c^2)z \neq 0$. Prove que

$$x^3 + y^3 + z^3 = (x+y)(y+z)(z+x).$$