

EUREKA!

N° 43

OBM - Olimpíada Brasileira de Matemática

Janeiro - 2024

Sociedade Brasileira de Matemática - SBM
Presidente: Jaqueline Godoy Mesquita.

Apoio:
Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico - CNPq

Comissão Nacional de Olimpíada de Matemática da SBM
Av. Rio Branco, 109 sala 703 - Centro, Rio de Janeiro - RJ CEP 20040-004
Telefone: (21) 2391-8072
e-mail: contato@associacaodaobm.org Página eletrônica: www.obm.org.br

Coordenadores:
Carlos Gustavo Tamm de Araújo Moreira e Edmilson Luis Rodrigues Motta.

Membros da Comissão:
Alex Corrêa Abreu, Antônio Cardoso do Amaral, Carlos Yuzo Shine, Carlos Alexandre Gomes da Silva, Carmen Vieira Mathias, Cícero Thiago Magalhães, Eduardo Tengan, Eduardo Wagner, Élio Mega, Emiliano Augusto Chagas, Fabio Enrique Brochero Martínez, Fabricio Siqueira Benevides, Francisco Bruno Holanda, Frederico Vale Girão, Krerley Irraciel Oliveira, Kellem Corrêa Santos, Luciano Guimarães Monteiro de Castro, Marcelo Xavier de Mendonça, Maria João Lima Soares de Resende, Nicolau Corção Saldanha, Onofre Campos da Silva Farias, Pablo Rodrigo Ganassim, Ralph Costa Teixeira, Régis Prado Barbosa, Rodrigo Villard Milet, Samuel Barbosa Feitosa, Tertuliano Franco Santos Franco, Washington Alves, Yoshiharu Kohayakawa, Yuri Lima.

Comissão júnior:
Adenilson Arcanjo de Moura Júnior, Alan Anderson Silva Pereira, Ana Karoline Borges Carneiro, André Macieira Braga Costa, Andrey Jhen Shan Chen, Davi Lima, Davi Lopes Alves de Medeiros, Deborah Barbosa Alves, Diego Eloi Misquita Gomes, George Lucas Diniz Alencar, Gustavo Lisboa Empinotti, Israel Franklin Dourado Carrah, Jorge Henrique Craveiro de Andrade, José Armando Barbosa Filho, Luíze Mello D'Urso Viana, Matheus Secco Torres da Silva (coordenador), Murilo Vasconcelos de Andrade, Rafael Filipe dos Santos, Rafael Kazuhiko Miyazaki, Raphael Mendes de Oliveira, Renan Henrique Finder, Thiago Barros Rodrigues Costa.

Editores Responsáveis:

Carlos Alexandre Gomes da Silva.
Carlos Gustavo Tamm de Araújo Moreira.
Fábio Enrique Brochero Martinez.

Desenho da Capa:
Carolina Fontenelle de Mello Souza.
Daniel Assunção Andrade.

Digitação e Figuras:

Carlos Alexandre Gomes da Silva
Carlos Augusto David Ribeiro.

Diagramação Final:

Carlos Alexandre Gomes da Silva.

Tiragem:

3000 exemplares

EUREKA! 43, 2024 - ISSN 1415-479X

Os artigos assinados são da responsabilidade dos autores. É permitida a reprodução de artigos, desde que seja citada a fonte.

Sumário

57th IMO - Olimpíada Internacional de Matemática - 2016	1
58th IMO - Olimpíada Internacional de Matemática - 2017	4
59th IMO - Olimpíada Internacional de Matemática - 2018	7
60th IMO - Olimpíada Internacional de Matemática - 2019	9
61th IMO - Olimpíada Internacional de Matemática - 2020	11
62th IMO - Olimpíada Internacional de Matemática - 2021	13
63th IMO - Olimpíada Internacional de Matemática - 2022	15
64th IMO - Olimpíada Internacional de Matemática - 2023	17
Artigo: Permutações Caóticas Generalizadas	20
Artigo: Transformações Geométricas na OBM	27
Artigo: Teorema de Casey, a ida e a volta	42
Artigo: Pontos que se movem!	58
Artigo: Racionalizando o Logotipo da OBM	74
Olimpíadas ao redor do mundo	95
Problemas propostos e soluções	97
Solução dos Problemas Propostos Eureka! 37	97
Solução dos Problemas Propostos Eureka! 39	101

Coordenadores regionais**109**

Aos leitores

Eureka 43! É com esse espírito de descoberta e entusiasmo que apresentamos à comunidade olímpica mais uma edição da nossa revista. Os últimos anos têm sido transformadores para diversos setores e hábitos da nossa sociedade. Com a comunidade olímpica não tem sido diferente. O fácil acesso ao conhecimento, o aumento do número de materiais, sejam notas de aulas, livros, vídeos, entre tantos outros, vêm mudando completamente a velocidade e os hábitos de aprendizado de todos nós, especialmente do público mais jovem. Mesmo diante de todas essas mudanças, a comunidade olímpica mantém o seu interesse e expectativa pela continuidade da Eureka!, que desde sua origem sempre se mostrou como um importante canal de comunicação e aprendizado para toda a comunidade olímpica, especialmente a brasileira. Nesta edição estamos retomando a publicação de artigos trazendo temas de interesse da comunidade olímpica e também algumas outras seções de enorme aceitação em épocas anteriores, como *Olimpíadas ao redor do mundo*, onde levamos ao leitor a conhecer um pouco de belos problemas que apareceram em competições matemáticas pelo mundo afora. Acreditamos que dessa forma alguns estudantes (especialmente os menos experientes) possam conhecer um pouco de outras competições matemáticas e sentir-se estimulados em buscar mais sobre elas por conta própria. Além disso, abrimos a presente edição com os enunciados dos problemas propostos nas últimas oito edições da IMO-International Mathematical Olympiad (de 2016 a 2023) e os resultados alcançados pelas equipes brasileiras.

Esperamos que a comunidade olímpica sinta-se estimulada e continue, com o entusiasmo de sempre, contribuindo para a manutenção desse importante canal de comunicação que é a nossa revista Eureka! Problemas, soluções, sugestões, artigos são muito bem vindos. Para enviá-los basta seguir as instruções publicadas em nosso endereço eletrônico <https://www.obm.org.br/> ou escrever para contato@associacaodaobm.org

O presente número da Eureka! foi editado pelos professores Carlos Alexandre Gomes da Silva - UFRN, Carlos Gustavo Tamm de Araújo Moreira - IMPA-RJ, Fábio Enrique Brochero Martinez - UFMG. Não podemos deixar de registrar aqui o enorme esforço de todos os membros da Comissão nacional de Olimpíadas de Matemática e de muitos ex-olímpicos que continuam com o mesmo entusiasmo de sempre, sem os quais essa publicação não poderia se tornar realidade. Agradecemos especialmente ao professor Carlos Augusto David Ribeiro (UFDPar), pelo importante trabalho de revisão desta edição.

Saudações Olímpicas!
Os editores.

57th IMO - Olimpíada Internacional de Matemática - 2016

Vamos abrir esta edição da Eureka! trazendo os enunciados do problemas propostos nas últimas 8 edições da IMO - Olimpíada internacional de Matemática, e os resultados das equipes brasileiras no período de 2016 a 2023. As soluções dos problemas podem ser encontradas em diversos sites, como por exemplo,

[https:](https://artofproblemsolving.com/wiki/index.php/IMO_Problems_and_Solutions)

//artofproblemsolving.com/wiki/index.php/IMO_Problems_and_Solutions

Enunciados - IMO 2016 - Hong Kong.

PRIMEIRO DIA

Problema 1. *O triângulo BCF é retângulo em B. Seja A o ponto da reta CF tal que FA = FB e que F esteja entre A e C. Escolhe-se o ponto D de modo que DA = DC e que AC seja a bissetriz do ângulo $\angle DAB$. Escolhe-se o ponto E de modo que EA = ED e que AD seja a bissetriz do ângulo $\angle EAC$. Seja M o ponto médio de CF. Seja X o ponto tal que AMXE seja um paralelogramo (com $AM \parallel EX$ e $AE \parallel MX$). Demonstre que as retas BD, FX e ME são concorrentes.*

Problema 2. *Determine todos os inteiros positivos n tais que pode-se preencher cada casa de um tabuleiro $n \times n$ com uma das letras I, M e O de tal forma que ambas as condições seguintes sejam satisfeitas:*

- *em cada linha e em cada coluna, exatamente um terço das casas tenha um I, um terço tenha um M e um terço tenha um O;*
- *em cada diagonal formada por um número de casas que seja múltiplo de 3, exatamente um terço das casas tenha um I, um terço tenha um M e um terço tenha um O.*

Observação 1. *As linhas e as colunas de um tabuleiro $n \times n$ são numeradas de 1 a n . Assim, cada casa corresponde a um par de inteiros positivos (i, j) com $1 \leq i, j \leq n$. Para $n > 1$, o tabuleiro tem $4n - 2$ diagonais de dois tipos. Uma diagonal do primeiro tipo é formada por todas as casas (i, j) para as quais $i + j$ é igual a uma constante. Uma diagonal do segundo tipo é formada por todas as casas (i, j) para as quais $i - j$ é igual a uma constante.*

Problema 3. *Seja $P = A_1A_2\dots A_k$ um polígono convexo no plano. Os vértices A_1, A_2, \dots, A_k têm coordenadas inteiras e pertencem a uma circunferência. Seja S a área de P . Seja n um inteiro positivo ímpar tal que os quadrados dos comprimentos dos lados de P sejam todos números inteiros divisíveis por n . Demonstre que $2S$ é um inteiro divisível por n .*

SEGUNDO DIA

Problema 4. Um conjunto de números inteiros positivos é chamado *fragante* se contém pelo menos dois elementos e cada um de seus elementos tem algum fator primo em comum com pelo menos um dos elementos restantes. Seja $P(n) = n^2 + n + 1$. Determine o menor número inteiro positivo b para o qual existe algum número inteiro não negativo a tal que o conjunto

$$\{P(a+1), P(a+2), \dots, P(a+b)\}$$

seja fragante.

Problema 5. No quadro está escrita a equação

$$(x-1)(x-2)\cdots(x-2016) = (x-1)(x-2)\cdots(x-2016)$$

que tem 2016 fatores lineares de cada lado. Determine o menor valor possível de k para o qual é possível apagar exatamente k destes 4032 fatores lineares, de modo que fique pelo menos um fator de cada lado e que a equação resultante não admita nenhuma solução real.

Problema 6. Há $n \geq 2$ segmentos no plano tais que cada par de segmentos se intersecta num ponto interior a ambos e não há três segmentos que tenham um ponto em comum. Geoff deve escolher um dos extremos de cada segmento e colocar sobre ele um sapo, virado para o outro extremo. Depois ele baterá palmas $n-1$ vezes. Cada vez que ele bater as mãos, cada sapo saltará imediatamente para a frente até o próximo ponto de interseção sobre o seu segmento. Os sapos nunca mudam a direção dos seus saltos. Geoff deseja colocar os sapos de tal forma que dois sapos nunca ocupem ao mesmo tempo o mesmo ponto de interseção.

- (a) Prove que se n é ímpar, Geoff sempre tem uma maneira de realizar o seu desejo.
- (b) Prove que se n é par, Geoff nunca realiza o seu desejo.

Resultado da equipe brasileira - IMO - 2016

Líder: Nicolau C. Saldanha.

Vice-líder: Samuel Barbosa Feitosa.

Nome	Cidade - Estado	Premiação
João César Campos Vargas	São Paulo-SP	Prata
Andrey Jhen Shan Chen	Valinhos-SP	Prata
Daniel Lima Braga	Eusébio-CE	Prata
Pedro Henrique S. de Oliveira	São Paulo-SP	Prata
Gabriel Toneatti Vercelli	Osasco-SP	Prata
George Lucas Diniz Alencar	Fortaleza-CE	Bronze

58th IMO - Olimpíada Internacional de Matemática - 2017

Enunciados - IMO 2017 - Rio de Janeiro, Brasil.

PRIMEIRO DIA

Problema 1. Para cada inteiro $a_0 > 1$, define-se a sequência a_0, a_1, a_2, \dots tal que, para cada $n \geq 0$:

$$a_{n+1} = \begin{cases} \sqrt{a_n}, & \text{se } \sqrt{a_n} \text{ é inteiro,} \\ a_n + 3, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Determine todos os valores de a_0 para os quais existe um número A tal que $a_n = A$ para infinitos valores de n .

Problema 2. Seja \mathbb{R} o conjunto dos números reais. Determine todas as funções $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tais que, para quaisquer números reais x e y ,

$$f(f(x)f(y)) + f(x+y) = f(xy).$$

Problema 3. Um coelho invisível e um caçador jogam da seguinte forma no plano euclidiano. O ponto de partida A_0 do coelho e o ponto de partida B_0 do caçador são iguais. Depois de $n-1$ rodadas do jogo, o coelho encontra-se no ponto A_{n-1} e o caçador encontra-se no ponto B_{n-1} . Na n -ésima rodada do jogo, ocorrem três coisas na seguinte ordem:

- (i) O coelho move-se de forma invisível para um ponto A_n tal que a distância entre A_{n-1} e A_n é exatamente 1.
- (ii) Um aparelho de localização informa um ponto P_n ao caçador. A única informação garantida pelo aparelho ao caçador é que a distância entre P_n e A_n é menor ou igual a 1.
- (iii) O caçador move-se de forma visível para um ponto B_n tal que a distância entre B_{n-1} e B_n é exatamente 1.

É sempre possível que, qualquer que seja a maneira em que se move o coelho e quaisquer que sejam os pontos informados pelo aparelho de localização, o caçador possa escolher os seus movimentos de modo que depois de 10^9 rodadas o caçador possa garantir que a distância entre ele e o coelho seja menor ou igual que 100?

SEGUNDO DIA

Problema 4. Sejam R e S pontos distintos sobre a circunferência Ω tais que RS não é um diâmetro de Ω . Seja ℓ a reta tangente a Ω em R . O ponto T é tal que S é o ponto médio do segmento RT . O ponto J escolhe-se no menor arco RS de Ω de maneira que Γ , a circunferência circunscrita ao triângulo JST , intersetá ℓ em dois pontos distintos. Seja A o ponto comum de Γ e ℓ mais próximo de R . A reta AJ intersetá Ω pela segunda vez em K . Demonstre que a reta KT é tangente a Γ .

Problema 5. Seja $N \geq 2$ um inteiro dado. Um conjunto de $N(N+1)$ jogadores de futebol, todos de diferentes alturas, colocam-se em fila. O treinador deseja retirar $N(N-1)$ jogadores desta fila, de modo que a fila que sobra formada pelos $2N$ jogadores restantes satisfaça as N condições seguintes:

- (1) Não resta ninguém entre os dois jogadores mais altos.
 - (2) Não resta ninguém entre o terceiro jogador mais alto e o quarto jogador mais alto.
- \vdots
- (N) Não resta ninguém entre os dois jogadores mais baixos.

Demonstre que isto é sempre possível.

Problema 6. Um par ordenado (x, y) de inteiros é um ponto primitivo se o máximo divisor comum entre x e y é 1. Dado um conjunto finito S de pontos primitivos, demonstre que existem um inteiro positivo n e inteiros a_0, a_1, \dots, a_n tais que, para cada (x, y) de S , se verifica:

$$a_0x^n + a_1x^{n-1}y + a_2x^{n-2}y^2 + \dots + a_{n-1}xy^{n-1} + a_ny^n = 1.$$

Resultado da equipe brasileira - IMO - 2017**Líder:** Krerley Irraciel Martins Oliveira.**Vice-líder:** Frederico Vale Girão.

Nome	Cidade - Estado	Premiação
João César Campos Vargas	Passa Tempo-MG	Prata
Davi Cavalcanti Sena	Fortaleza-CE	Prata
George Lucas Diniz Alencar	Fortaleza-CE	Bronze
André Yuji Hisatsuga	Belo São Paulo-SP	Menção honrosa
Bruno Brasil Meinhart	Fortaleza-CE	Menção honrosa
Pedro Henrique S. de Oliveira	São Paulo-SP	Menção honrosa

59th IMO - Olimpíada Internacional de Matemática - 2018

Enunciados - IMO 2018 - Cluj-Napoca, Romênia.

PRIMEIRO DIA

Problema 1. Seja Γ o circuncírculo do triângulo acutângulo ABC. Os pontos D e E estão sobre os segmentos AB e AC, respectivamente, de modo que $AD = AE$. As mediatriizes de BD e CE intersectam os arcos menores AB e AC de Γ nos pontos F e G, respectivamente. Prove que as retas DE e FG são paralelas (ou são a mesma reta).

Problema 2. Determine todos os inteiros $n \geq 3$ para os quais existem números reais a_1, a_2, \dots, a_{n+2} , tais que $a_{n+1} = a_1, a_{n+2} = a_2$ e

$$a_i a_{i+1} + 1 = a_{i+2}$$

para $i = 1, 2, \dots, n$.

Problema 3. Um triângulo anti-Pascal é uma disposição de números em forma de triângulo equilátero tal que, exceto para os números na última linha, cada número é o módulo da diferença entre os dois números imediatamente abaixo dele. Por exemplo, a seguinte disposição de números é um triângulo anti-Pascal com quatro linhas que contém todos os inteiros de 1 até 10.

		4		
	2		6	
5		7		1
8	3		10	9

Determine se existe um triângulo anti-Pascal com 2018 linhas que contenha todos os inteiros de 1 até $1 + 2 + \dots + 2018$.

SEGUNDO DIA

Problema 4. Um local é um ponto (x, y) no plano tal que x e y são ambos inteiros positivos menores ou iguais a 20.

Inicialmente, cada um dos 400 locais está vazio. Ana e Beto colocam pedras alternadamente com Ana a iniciar. Na sua vez, Ana coloca uma nova pedra vermelha num local vazio tal que a distância entre quaisquer dois locais ocupados por pedras vermelhas seja diferente de $\sqrt{5}$. Na sua vez, Beto coloca uma nova pedra azul em qualquer local vazio. (Um local ocupado por uma pedra azul pode estar a qualquer distância de outro local ocupado.) Eles param quando um dos jogadores não pode colocar uma pedra.

Determine o maior K tal que Ana pode garantir que ela coloca pelo menos K pedras vermelhas, não importando como Beto coloca suas pedras azuis.

Problema 5. Sejam a_1, a_2, \dots uma sequência infinita de inteiros positivos. Suponha que existe um inteiro $N > 1$ tal que, para cada $n \geq N$, o número

$$\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{a_n} + \frac{a_n}{a_1}$$

é um inteiro. Prove que existe um inteiro positivo M tal que $a_m = a_{m+1}$ para todo $m \geq M$.

Problema 6. Um quadrilátero convexo ABCD satisfaz $AB \cdot CD = BC \cdot DA$. O ponto X está no interior de ABCD de modo que

$$\angle XAB = \angle XCD \quad \text{e} \quad \angle XBC = \angle XDA.$$

Prove que $\angle BXA + \angle D XC = 180^\circ$.

Resultado da equipe brasileira - IMO - 2018

Líder: Régis Prado Barbosa.

Vice-líder: José Armando Barbosa Filho.

Nome	Cidade - Estado	Premiação
Pedro Lucas Lanaro Sponchiado	São Paulo-SP	Ouro
Bruno Brasil Meinhart	Fortaleza-CE	Bronze
Pedro Gomes Cabral	Recife-PE	Bronze
Bernardo Peruzzo Trevizan	São Paulo-SP	Bronze
André Yuji Hisatsuga	São Paulo-SP	Bronze
Lucas Hiroshi H. Harada	São Paulo-SP	Menção honrosa

60th IMO - Olimpíada Internacional de Matemática - 2019

Enunciados - IMO 2019 - Bath, Reino Unido.

PRIMEIRO DIA

Problema 1. Seja \mathbb{Z} o conjunto dos números inteiros. Determine todas as funções $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ tais que, para quaisquer inteiros a e b ,

$$f(2a) + 2f(b) = f(f(a+b)).$$

Problema 2. No triângulo ABC, o ponto A_1 está no lado BC e o ponto B_1 está no lado AC. Sejam P e Q pontos nos segmentos AA_1 e BB_1 , respectivamente, tal que PQ é paralelo a AB. Seja P_1 um ponto na reta PB_1 , tal que B_1 está estritamente entre P e P_1 e $\angle PP_1C = \angle BAC$. Analogamente, seja Q_1 um ponto na reta QA_1 , tal que A_1 está estritamente entre Q e Q_1 e $\angle CQ_1Q = \angle CBA$.

Prove que os pontos P, Q, P_1 e Q_1 são concíclicos.

Problema 3. Uma rede social possui 2019 usuários, alguns deles são amigos. Sempre que o usuário A é amigo do usuário B, o usuário B também é amigo do usuário A. Eventos do seguinte tipo podem acontecer repetidamente, um de cada vez:

Três usuários A, B e C tais que A é amigo de B e A é amigo de C, mas B e C não são amigos, mudam seus estados de amizade de modo que B e C agora são amigos, mas A deixa de ser amigo de B e A deixa de ser amigo de C. Todos os outros estados de amizade não são alterados.

Inicialmente, 1010 usuários possuem exatamente 1009 amigos cada e 1009 usuários possuem exatamente 1010 amigos cada. Prove que existe uma sequência de tais eventos tal que, após essa sequência, cada usuário é amigo de no máximo um outro usuário.

SEGUNDO DIA

Problema 4. Encontre todos os pares (k, n) de inteiros positivos tais que

$$k! = (2^n - 1)(2^n - 2)(2^n - 4) \cdots (2^n - 2^{n-1})$$

Problema 5. O Banco de Bath emite moedas com um H num lado e um T no outro. Harry possui n dessas moedas colocadas em linha, ordenadas da esquerda para a direita. Ele repetidamente realiza a seguinte operação: se há exatamente $k > 0$ moedas mostrando H, então ele vira a k -ésima moeda contada da esquerda para a direita; caso contrário, todas as moedas mostram T e ele para. Por exemplo, se $n = 3$ o processo começando com a configuração THT é THT \rightarrow HHT \rightarrow HTT \rightarrow TTT, que acaba depois de três operações.

- (a) Mostre que, para qualquer configuração inicial, Harry para após um número finito de operações.
- (b) Para cada configuração inicial C , seja $L(C)$ o número de operações antes de Harry parar. Por exemplo, $L(THT) = 3$ e $L(ITT) = 0$. Determine a média de $L(C)$ sobre todas as 2^n possíveis configurações iniciais C .

Problema 6. Seja I o incentro do triângulo acutângulo ABC com $AB \neq AC$. A circunferência inscrita (incírculo) ω de ABC é tangente aos lados BC , CA e AB nos pontos D , E e F , respectivamente. A reta que passa por D perpendicular a EF intersecta ω novamente em R . A reta AR intersecta ω novamente em P . As circunferências circuncritas (circuncírculos) dos triângulos PCE e PBF se intersectam novamente no ponto Q .

Prove que as retas DI e PQ se intersectam sobre a reta que passa por A perpendicular a AI .

Resultado da equipe brasileira - IMO - 2019

Líder: Edmilson Motta.

Vice-líder: Carlos Yuzo Shine.

Nome	Cidade - Estado	Premiação
Samuel Prieto Lima	Fortaleza-CE	Prata
Pedro Gomes Cabral	Fortaleza-CE	Prata
Bernardo Peruzzo Trevizan	São Paulo-SP	Bronze
Pedro Lucas Lanaro Sponchiado	São Paulo-SP	Bronze
Guilherme Zeus Dantas e Moura	Maricá-RJ	Bronze
Felipe Chen Wu	Rio de Janeiro-RJ	Bronze

61th IMO - Olimpíada Internacional de Matemática - 2020

Enunciados - IMO 2020 - São Petersburgo, Rússia.

PRIMEIRO DIA

Problema 1. Considere o quadrilátero convexo ABCD. O ponto P está no interior de ABCD. Verificam-se as seguintes igualdades entre razões:

$$\angle PAD : \angle PBA : \angle DPA = 1 : 2 : 3 = \angle CBP : \angle BAP : \angle BPC.$$

Prove que as três seguintes retas se intersetam num ponto: as bissetrizes internas dos ângulos $\angle ADP$ e $\angle PCB$ e a mediatrix do segmento AB.

Problema 2. Problema 2. Os números reais a, b, c, d são tais que $a \geq b \geq c \geq d > 0$ e $a + b + c + d = 1$. Prove que

$$(a + 2b + 3c + 4d)a^a b^b c^c d^d < 1.$$

Problema 3. Temos $4n$ pedras com pesos $1, 2, 3, \dots, 4n$. Cada pedra está colorida com uma de n cores e há quatro pedras de cada cor. Mostre que podemos organizar as pedras em dois grupos de modo que as seguintes condições são ambas satisfeitas:

- Os pesos totais dos dois grupos são iguais.
- Cada grupo contém duas pedras de cada cor.

SEGUNDO DIA

Problema 4. Seja $n > 1$ um inteiro. Na encosta de uma montanha existem n^2 estações, todas com diferentes altitudes. Duas companhias de teleféricos, A e B, operam k teleféricos cada uma. Cada teleférico faz a viagem de uma estação para uma de maior altitude (sem paragens intermédias). Os k teleféricos de A partem de k estações diferentes e terminam em k estações diferentes; além disso, se um teleférico parte de uma estação de maior altitude do que a de partida de outro, também termina numa estação de maior altitude do que a de chegada desse outro. A companhia B satisfaz as mesmas condições. Dizemos que duas estações estão ligadas por uma companhia se podemos começar na estação com menor altitude e chegar à de maior altitude usando um ou mais teleféricos dessa companhia (não são permitidos quaisquer outros movimentos entre estações).

Determine o menor inteiro positivo k que garante que existam duas estações ligadas por ambas as companhias.

Problema 5. Temos um baralho de $n > 1$ cartas, com um inteiro positivo escrito em cada carta. O baralho tem a propriedade de que a média aritmética dos números escritos em cada par de cartas é também a média geométrica dos números escritos nalguma coleção de uma ou mais cartas.

Para que valores de n podemos concluir que os números escritos nas cartas são todos iguais?

Problema 6. Prove que existe uma constante positiva c para a qual a seguinte afirmação é verdadeira:

Considere um inteiro $n > 1$, e um conjunto S de n pontos no plano tal que a distância entre quaisquer dois pontos diferentes de S é pelo menos 1. Então existe uma reta ℓ que separa S tal que a distância de qualquer ponto de S a ℓ é pelo menos $cn^{-1/3}$.

(Uma reta ℓ separa um conjunto de pontos S se existe algum segmento com extremos em dois pontos de S que interseca ℓ .)

Nota. A resultados mais fracos obtidos substituindo $cn^{-1/3}$ por $cn^{-\alpha}$ podem ser atribuídos pontos dependendo do valor da constante $\alpha > 1/3$.

Resultado da equipe brasileira - IMO - 2020

Líder: Carlos Gustavo Tamm de Araújo Moreira.

Vice-líder: Matheus Secco Torres da Silva.

Nome	Cidade - Estado	Premiação
Pedro Gomes Cabral	Fortaleza-CE	Ouro
Bernardo Peruzzo Trevizan	São Paulo-SP	Prata
Guilherme Zeus Dantas e Moura	Maricá-RJ	Prata
Francisco Moreira M. Neto	Fortaleza-CE	Prata
Gabriel Ribeiro Paiva	Fortaleza-CE	Prata
Pablo Andrade Carvalho Barros	Teresina-PI	Prata

62th IMO - Olimpíada Internacional de Matemática - 2021

Enunciados - IMO 2021 - São Petersburgo, Rússia.

PRIMEIRO DIA

Problema 1. Seja $n \geq 100$ um inteiro. O Ivan escreve cada um dos números $n, n + 1, \dots, 2n$ numa carta diferente. Depois de baralhar estas $n + 1$ cartas, divide-as em dois montes. Prove que pelo menos um desses montes contém duas cartas tais que a soma dos seus números é um quadrado perfeito.

Problema 2. Mostre que a desigualdade

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sqrt{|x_i - x_j|} \leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sqrt{|x_i + x_j|}$$

é satisfeita por todos os números reais x_1, \dots, x_n .

Problema 3. Seja D um ponto interior de um triângulo acutângulo ABC , com $AB > AC$, tal que $\angle DAB = \angle CAD$. O ponto E , no segmento AC , satisfaz $\angle ADE = \angle BCD$; o ponto F , no segmento AB , satisfaz $\angle FDA = \angle DBC$ e o ponto X , na reta AC , satisfaz $CX = BX$. Sejam O_1 e O_2 os circuncentros dos triângulos ADC e EXD , respectivamente. Prove que as retas BC, EF e O_1O_2 são concorrentes.

SEGUNDO DIA

Problema 4. Sejam Γ uma circunferência com centro I e $ABCD$ um quadrilátero convexo tal que cada um dos segmentos AB, BC, CD e DA é tangente a Γ . Seja Ω a circunferência circunscrita do triângulo AIC . O prolongamento de BA para além de A interseca Ω em X , e o prolongamento de BC para além de C interseca Ω em Z . Os prolongamentos de AD e CD para além de D interseparam Ω em Y e T , respectivamente. Prove que

$$AD + DT + TX + XA = CD + DY + YZ + ZC$$

Problema 5. Dois esquilos, Bushy e Jumpy, recolheram 2021 nozes para o inverno. O Jumpy numera as nozes desde 1 até 2021 e escava 2021 pequenos buracos no chão numa disposição circular à volta da sua árvore favorita. Na manhã seguinte, o Jumpy observa que o Bushy colocou uma noz em cada buraco, mas sem ter em conta a numeração. Não contente com isto, o Jumpy decide reordenar as nozes realizando uma sequência de 2021 movimentos. No k -ésimo movimento o Jumpy troca as posições das duas nozes adjacentes à noz com o número k . Prove que existe um valor de k tal que, no k -ésimo movimento, as nozes trocadas têm números a e b tais que $a < k < b$.

Problema 6. Sejam $m \geq 2$ um inteiro, A um conjunto finito de inteiros (não necessariamente positivos) e $B_1, B_2, B_3, \dots, B_m$ subconjuntos de A . Suponhamos que, para cada $k = 1, 2, \dots, m$, a soma dos elementos de B_k é m^k . Prove que A contém pelo menos $m/2$ elementos.

Resultado da equipe brasileira - IMO - 2021

Líder: Edmilson Motta.

Vice-líder: Davi Lopes Alves de Medeiros.

Nome	Cidade - Estado	Premiação
Marcelo Machado Lage	Belo Horizonte-MG	Prata
Olavo Paschoal Longo	São Paulo-SP	Prata
Gabriel Ribeiro Paiva	Fortaleza-CE	Bronze
Pablo Andrade Carvalho Barros	Teresina-PI	Bronze
Gustavo Neves da Cruz	Belo Horizonte-MG	Bronze
Pedro de Oliveira L. Lack	Nova Friburgo-RJ	Menção honrosa

63th IMO - Olimpíada Internacional de Matemática - 2022

Enunciados - IMO 2022 - Oslo, Noruega

PRIMEIRO DIA

Problema 1. O Banco de Oslo emite dois tipos de moedas: moedas de alumínio (denotadas por A) e moedas de bronze (denotadas por B). Marianne tem n moedas de alumínio e n moedas de bronze, dispostas numa linha em alguma ordem inicial arbitrária. Um bloco é qualquer subsequência de moedas consecutivas do mesmo tipo. Dado um inteiro positivo fixo $k \leq 2n$, Marianne realiza repetidamente a seguinte operação: ela identifica o bloco mais longo contendo a k -ésima moeda da esquerda para a direita, e move todas as moedas desse bloco para o extremo esquerdo da linha. Por exemplo, se $n = 4$ e $k = 4$, o processo começando com a seguinte ordem AABBBABA seria

$$\begin{aligned} \text{AABBBABA} &\rightarrow \text{BBBAAABA} \rightarrow \text{AAA\underline{BBBBA}} \rightarrow \\ &\rightarrow \text{BBB\underline{BAAAA}} \rightarrow \text{BBB\underline{BAAAA}} \rightarrow \dots . \end{aligned}$$

Encontre todos os pares (n, k) com $1 \leq k \leq 2n$ tais que, para qualquer ordem inicial, em algum momento durante o processo, as n moedas mais à esquerda serão todas do mesmo tipo.

Problema 2. Seja \mathbb{R}^+ o conjunto dos números reais positivos. Encontre todas as funções $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ tais que para cada $x \in \mathbb{R}^+$, existe exatamente um $y \in \mathbb{R}^+$ satisfazendo

$$xf(y) + yf(x) \leq 2.$$

Problema 3. Seja k um inteiro positivo e seja S um conjunto finito de números primos ímpares. Prove que existe no máximo uma forma (a menos de rotação e reflexão) de colocar os elementos de S ao redor de uma circunferência de modo que o produto de quaisquer dois vizinhos é da forma $x^2 + x + k$ para algum inteiro positivo x .

SEGUNDO DIA

Problema 4. Seja ABCDE um pentágono convexo tal que $BC = DE$. Suponha que existe um ponto T no interior de ABCDE com $TB = TD$, $TC = TE$ e $\angle ABT = \angle TEA$. A reta AB intersecta as retas CD e CT nos pontos P e Q, respectivamente. Suponha que os pontos P, B, A e Q aparecem na reta nesta ordem. A reta AE intersecta as retas CD e DT nos pontos R e S, respectivamente. Suponha que os pontos R, E, A e S aparecem na reta nesta ordem. Prove que os pontos P, S, Q e R estão sobre uma circunferência.

Problema 5. Encontre todas as triplas (a, b, p) de inteiros positivos tais que p é primo e

$$a^p = b! + p$$

Problema 6. Seja n um inteiro positivo. Um quadrado Nôrdico é um tabuleiro $n \times n$ contendo todos os inteiros de 1 até n^2 de modo que cada quadradinho contém exatamente um número. Dois quadradinhos diferentes são considerados adjacentes se eles têm um lado em comum. Um quadradinho que é adjacente apenas a quadradinhos com números maiores é chamado de um vale. Um caminho crescente é uma sequência de um ou mais quadradinhos tais que:

- (i) o primeiro quadradinho da sequência é um vale,
- (ii) cada quadradinho a partir do segundo é adjacente ao quadradinho anterior,
- (iii) os números contidos nos quadradinhos da sequência estão em ordem crescente.

Encontre, em função de n , a menor quantidade possível de caminhos crescentes de um quadrado Nôrdico.

Resultado da equipe brasileira - IMO - 2022

Líder: Regis Prado Barbosa.

Vice-líder: Rafael Kazuhiro Miyazaki.

Nome	Cidade - Estado	Premiação
Olavo Paschoal Longo	São Paulo-SP	Ouro
Marcelo Machado Lage	Belo Horizonte-MG	Ouro
Rodrigo Salgado Domingos Porto	Rio de Janeiro-RJ	Prata
Eduardo Henrique R. do Nascimento	São Paulo-SP	Bronze
Gabriel C. V Torkomian	São Carlos-SP	Bronze
Joao Pedro R. V. Costa	Fortaleza-CE	Menção honrosa

64th IMO - Olimpíada Internacional de Matemática - 2023

Enunciados - IMO 2023 - Chiba, Japão.

PRIMEIRO DIA

Problema 1. Determine todos os números inteiros $n > 1$ compostos que satisfazem a seguinte propriedade: se d_1, d_2, \dots, d_k são todos os divisores positivos de n com $1 = d_1 < d_2 < \dots < d_k = n$, então d_i divide $d_{i+1} + d_{i+2}$ para todo $1 \leq i \leq k-2$.

Problema 2. Seja ABC um triângulo acutângulo com $AB < AC$. Seja Ω o circuncírculo de ABC . Seja S o ponto médio do arco CB de Ω contendo A . A reta perpendicular a BC que passa por A intersecta o segmento BS em D e intersecta Ω novamente em $E \neq A$. A reta paralela a BC que passa por D intersecta a reta BE em L . Denote o circuncírculo do triângulo BDL por ω . A circunferência ω intersecta Ω novamente em $P \neq B$.

Prove que a reta tangente a ω em P intersecta a reta BS num ponto sobre a bissetriz interna de $\angle BAC$.

Problema 3. Para cada inteiro $k \geq 2$, determine todas as sequências infinitas de inteiros positivos a_1, a_2, \dots para as quais existe um polinómio P da forma $P(x) = x^k + c_{k-1}x^{k-1} + \dots + c_1x + c_0$, em que c_0, c_1, \dots, c_{k-1} são inteiros não negativos, tal que

$$P(a_n) = a_{n+1}a_{n+2} \cdots a_{n+k}$$

para todo inteiro $n \geq 1$.

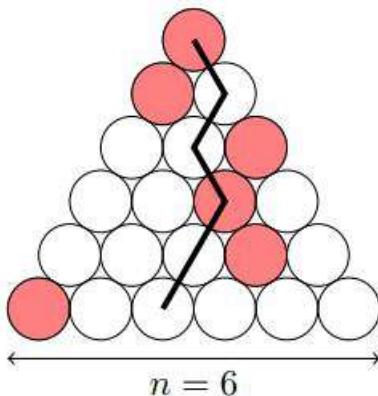
SEGUNDO DIA

Problema 4. Sejam $x_1, x_2, \dots, x_{2023}$ números reais positivos, distintos dois a dois, tais que

$$a_n = \sqrt{(x_1 + x_2 + \dots + x_n) \left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n} \right)}$$

é um inteiro para todo $n = 1, 2, \dots, 2023$. Prove que $a_{2023} \geq 3034$.

Problema 5. Seja n um inteiro positivo. Um triângulo japonês consiste em $1+2+\dots+n$ círculos iguais formando um triângulo equilátero tal que para cada $i = 1, 2, \dots, n$, a i -ésima linha contém exatamente i círculos, com exatamente um deles pintado de vermelho. Um caminho ninja num triângulo japonês é uma sequência de n círculos começando com o círculo da primeira linha e indo sucessivamente de um círculo para um dos dois círculos imediatamente abaixo dele e terminando na última linha. Na figura seguinte há um exemplo de um triângulo japonês com $n = 6$, no qual há um caminho ninja contendo dois círculos vermelhos.



Em função de n , encontre o maior k tal que em qualquer triângulo japonês existe um caminho ninja contendo pelo menos k círculos vermelhos.

Problema 6. Seja ABC um triângulo equilátero. Sejam A_1, B_1, C_1 pontos no interior de ABC tais que $BA_1 = A_1C, CB_1 = B_1A, AC_1 = C_1B$ e

$$\angle B A_1 C + \angle C B_1 A + \angle A C_1 B = 480^\circ.$$

As retas BC_1 e CB_1 se intersectam em A_2 , as retas CA_1 e AC_1 se intersectam em B_2 e as retas AB_1 e B_1A se intersectam em C_2 .

Prove que, se o triângulo $A_1B_1C_1$ é escaleno, então os três circuncírculos dos triângulos AA_1A_2, BB_1B_2 e CC_1C_2 possuem dois pontos em comum.

Nota: um triângulo escaleno é um triângulo que não possui dois lados com a mesma medida.

Resultado da equipe brasileira - IMO - 2023

Líder: Edmilson Motta.

Vice-líder: Samuel Barbosa Feitosa.

Nome	Cidade - Estado	Premiação
Matheus Alencar de Moraes	Fortaleza-CE	Ouro
Rodrigo Salgado D. Porto	Rio de Janeiro-RJ	Prata
Leonardo Henrique F. Maldonado	Sorocaba-SP	Prata
Luís Felipe Pestana Giglio	Niterói-RJ	Bronze
Eduardo Henrique R. do Nascimento	Goiânia-GO	Bronze
Felipe Makoto Shimamura Silva	São Paulo-SP	Bronze

Artigo: Permutações Caóticas Generalizadas

- Nível Avançado

Jesus C. Diniz, Bruno S. Góis e Juan R. Cruz
UFRN - Natal/RN

Introdução

Um problema já bem conhecido em combinatória é o do número *permutações caóticas* de um conjunto $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ de n elementos, comumente representado por D_n ou $!n$. Este problema foi proposto primeiramente por Pierre Raymond de Montmort , [1] em 1708, e resolvido pelo próprio em 1713. Nicholas Bernoulli também o resolveu, aproximadamente no mesmo período, usando o *princípio da inclusão e exclusão*.

Uma permutação caótica dos elementos do conjunto $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ é o conjunto das permutações dos elementos de A nas quais nenhum deles aparece em sua posição inicial, ou de maneira mais formal, o conjunto das funções bijetivas $f : A \rightarrow A$ tais que $f(a_i) \neq a_i$ para todo $i \in \{1, \dots, n\}$. Sendo \mathcal{C}_n o conjunto de todas as permutações caóticas que $D_n = \#\mathcal{C}_n$ (a cardinalidade de \mathcal{C}_n), em [2] é dada uma expressão para o cálculo de D_n , ademais é mostrado que D_n é o inteiro mais próximo de $\frac{n!}{e}$.

$$D_n = n! \sum_{j=0}^n \frac{(-1)^j}{j!} \quad \text{e} \quad D_n = \left\lfloor \frac{n!}{e} \right\rfloor \quad (1)$$

Exemplo 1. Sejam $I_n := \{1, \dots, n\}$ o conjunto dos n primeiros inteiros positivos e \mathcal{C}_n de todas as permutações caóticas de I_n . Determine \mathcal{C}_4 e D_4 .

Solução. Seja $I_4 = \{1, 2, 3, 4\}$, tem-se portanto que

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_4 = & \{(2, 1, 4, 3), (2, 4, 1, 3), (2, 3, 4, 1), (3, 1, 4, 2), (3, 4, 1, 2), (3, 4, 2, 1), \\ & (4, 3, 2, 1), (4, 3, 1, 2), (4, 1, 2, 3)\} \quad \text{e} \quad D_4 = 9. \end{aligned}$$

Exemplo 2. Um técnico de futsal dispõe de um elenco de 8 jogadores de linha: 2 laterais esquerdo, 2 laterais direito, 2 fixos, 2 pivôs além de 2 goleiros. De quantos modos o técnico pode escalar o time, se apenas o goleiro puder jogar em sua posição natural?

Solução. Há $\binom{2}{1}\binom{2}{1}\binom{2}{1}\binom{2}{1}\binom{2}{1} = 2^5$ maneiras de se escolher os 4 jogadores de linha e o goleiro que serão titulares, para cada uma destas escolhas, há uma possibilidade de escalação do goleiro e D_4 possibilidades para os jogadores de linha. Assim, segue-se pelo princípio fundamental da contagem que há $2^5 \times 1 \times 9$ possibilidades de escalação do time.

Neste artigo generalizaremos o cálculo do número de permutações caóticas D_n obtidos entre dois conjuntos de mesmos elementos para dois conjuntos quaisquer. Denotaremos por D_n^k o número de permutações caóticas entre dois conjuntos A e A^* de n elementos dos quais k deles são não comuns aos dois conjuntos, isto é, $|A \cap A^*| = n - k$, para todo $k \in \{1, \dots, n\}$. Existem duas soluções para este caso. A primeira delas será demonstrada por indução a partir de uma recorrência, enquanto a segunda será determinada por um argumento combinatório.

Teorema 1. *Sejam A e A^* dois conjuntos tais que $|A \cap A^*| = n - k$ e $|A| = |A^*| = n$, então para todo $k \in \{0, \dots, n\}$*

$$D_n^k = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} D_{n-j}. \quad (2)$$

1. O valor de D_n é um caso particular da Eq. 2 com $k = 0$; pois se $k = 0$, então $A = A^*$ e D_n^0 é o número de permutações caóticas entre dois conjuntos de mesmos elementos, ou seja, $D_n^0 = D_n$;
2. Se $k = n$, então os conjuntos A e A^* não apresentam nenhum elemento em comum, neste caso $D_n^n = n!$.

Prova pelo princípio da indução finita

Sejam A e A^* dois conjuntos tais que $|A \cap A^*| = n - k$ e $|A| = |A^*| = n$. Sem perda de generalidades, consideremos

$$A = \{1, \dots, k, k+1, \dots, n\} \quad \text{e} \quad A^* = \{1^*, \dots, k^*, k+1, \dots, n\} \quad \text{com} \\ D_n^k \quad \text{o número das permutações caóticas entre os elementos de } A \text{ e } A^*.$$

Diferentemente do problema clássico das permutações caóticas, nos quais os dois conjuntos continham os mesmos elementos, temos agora k elementos não comuns aos dois conjuntos, e com isso há novas possibilidades de permutações caóticas dos elementos entre os conjuntos A e A^* .

Para todo $i \in \{1, \dots, k\}$ seja A_i o conjunto das permutações caóticas nas quais o elemento i^* de A^* ocupa a posição i .

O número de permutações caóticas poderá ser calculado a partir do condicionamento nos elementos não comuns aos dois conjuntos que ocupam ou não as suas posições naturais. Falando de modo mais específico, se ao menos um elemento $i^* \in \{1^*, 2^*, \dots, k^*\}$ ocupa a posição i , $A_1 \cup \dots \cup A_k$, ou nenhum elemento i^* de A^* estiver em sua posição natural, $(A_1 \cup \dots \cup A_k)^c$. Assim, pelo princípio aditivo tem-se

$$D_n^k = |(A_1 \cup \dots \cup A_k)^c| + |(A_1 \cup \dots \cup A_k)| \\ = |A_1^c \cap \dots \cap A_k^c| + |(A_1 \cup \dots \cup A_k)| \quad (3)$$

e desde que para todo $k \in \{1, \dots, n\}$

$$|A_1^c \cap \dots \cap A_k^c| = D_n \quad (4)$$

tem-se de (3) e (4) que

$$D_n^k = D_n + |(A_1 \cup \dots \cup A_k)|. \quad (5)$$

Ademais, tem-se que

$$\begin{aligned} \forall j \in \{1, \dots, k\} \text{ com } \{i_1, i_2, \dots, i_j\} \subset \{1, \dots, k\} \\ |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_j}| = D_{n-j}^{k-j}, \text{ com } D_{n-j}^0 = D_{n-j}. \end{aligned} \quad (6)$$

Para $k = 1$, então $j = 1$ e segue-se de (5) e (6) que

$$D_n^1 = |A_1^c| + |A_1| = D_n + D_{n-1}. \quad (7)$$

Para $k = 2$, então de (6) segue-se que para todo $i_1 \in \{1, 2\}$

$$|A_{i_1}| = D_{n-1}^1 \quad (k=2, j=1) \quad \text{e} \quad |A_1 \cap A_2| = D_{n-2} \quad (k=2, j=2).$$

Logo de (5) e (7), tem-se

$$\begin{aligned} D_n^2 &= D_n + |(A_1 \cup A_2)| \\ &= D_n + \sum_{1 \leq i_1 \leq 2} |A_{i_1}| - |A_{i_1} \cap A_{i_2}| \\ &= D_n + 2D_{n-1}^1 + D_{n-2} \\ &= D_n + 2(D_{n-1} + D_{n-2}) - D_{n-2} \\ &= D_n + 2D_{n-1} + D_{n-2}. \end{aligned} \quad (8)$$

Para $k = 3$, então de (6) com $i_1 \in \{1, 2, 3\}$ e $\{i_1, i_2\} \subset \{1, 2, 3\}$

$$|A_{i_1}| = D_{n-1}^2 \quad (j=1), \quad |A_{i_1} \cap A_{i_2}| = D_{n-2}^1 \quad (j=2) \quad \text{e} \quad |A_1 \cap A_2 \cap A_3| = D_{n-3} \quad (j=3).$$

Logo de (5), (6), (7) e (8) segue-se que

$$\begin{aligned} D_n^3 &= D_n + |(A_1 \cup A_2 \cup A_3)| \\ &= D_n + \sum_{1 \leq i_1 \leq 3} |A_{i_1}| - \sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq 3} |A_{i_1} \cap A_{i_2}| + |A_1 \cap A_2 \cap A_3| \\ &= D_n + 3D_{n-1}^2 - 3D_{n-2}^1 + D_{n-3} \\ &= D_n + 3(D_{n-1} + 2D_{n-2} + D_{n-3}) - 3(D_{n-2} + D_{n-3}) + D_{n-3} \\ &= D_n + 3D_{n-1} + 3D_{n-2} + D_{n-3}. \end{aligned} \quad (9)$$

Admitamos como hipótese de indução que para um certo $k \in \mathbb{N}$,

$$D_n^k = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} D_{n-j} \quad (10)$$

Lema 1. Para todo $k \in \mathbb{N}$,

$$D_n^{k+1} = D_n^k + D_{n-1}^k$$

Demonstração. Tem-se que D_n^{k+1} é o total de permutações caóticas entre dois conjuntos de n -elementos com $k+1$ elementos não comuns a ambos. Para todo $j \in \{1, \dots, k+1\}$ particionando o conjunto das permutações caóticas em relação a qualquer um dos A_j , A_1 por exemplo, tem-se:

$$D_n^{k+1} = |A_1^c| + |A_1| = D_n^k + D_{n-1}^k \quad (11)$$

□

Usando a recorrência (11) e a hipótese de indução dada em (10), segue-se que

$$\begin{aligned} D_n^{k+1} &= D_n^k + D_{n-1}^k \\ &= \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} D_{n-j} + \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} D_{n-1-j} \\ &= \binom{k}{0} D_n + \binom{k}{1} D_{n-1} + \binom{k}{2} D_{n-2} + \dots + \binom{k}{k} D_{n-k} + \\ &\quad \binom{k}{0} D_{n-1} + \binom{k}{1} D_{n-2} + \dots + \binom{k}{k-1} D_{n-k} + \binom{k}{k} D_{n-1-k} \\ &= \binom{k}{0} D_n + \left[\binom{k}{0} + \binom{k}{1} \right] D_{n-1} + \dots + \left[\binom{k}{k-1} + \binom{k}{k} \right] D_{n-k} + \binom{k}{k} D_{n-1-k} \\ &= \binom{k+1}{0} D_n + \binom{k+1}{1} D_{n-1} + \dots + \binom{k+1}{k} D_{n-k} + \binom{k+1}{k+1} D_{n-(k+1)} \\ &= \sum_{j=0}^{k+1} \binom{k+1}{j} D_{n-j}. \end{aligned}$$

Prova por um argumento combinatório

Considere o conjunto das permutações caóticas entre os elementos dos conjuntos

$$A = \{1, \dots, k, k+1, \dots, n\} \quad \text{e} \quad A^* = \{1^*, \dots, k^*, k+1, \dots, n\}$$

e A_i o conjunto das permutações caóticas nas quais o elemento i^* de A^* ocupa a posição i , para todo $i \in \{1, \dots, k\}$.

O número de permutações caóticas poderá ser calculado a partir do condicionamento na quantidade Q_j de permutações caóticas nas quais exatamente $j \in \{1, \dots, k\}$ elementos não comuns a A e A^* ocupam as suas posições naturais, isto é, na quantidade das permutações caóticas que pertencem a exatamente j eventos A_i , $i \in \{1, \dots, k\}$. Assim, poderemos ter desde que nenhum dos k elementos não comuns aos dois conjuntos A e A^* ocupem a sua posição natural até no máximo k deles ocuparem as suas posições naturais. Logo,

$$D_n^k = Q_0 + Q_1 + \dots + Q_k, \quad \text{em que } Q_j = \binom{k}{j} D_{n-j} \quad (12)$$

onde a última igualdade de (12) segue do fato de que há $\binom{k}{j}$ maneiras de se escolher exatamente j dos k elementos não comuns aos dois conjuntos ocupando as suas posições naturais com os demais $n - j$ elementos podendo ser permutados caoticamente por D_{n-j} . Segue-se portanto que

$$D_n^k = Q_0 + Q_1 + \dots + Q_k = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} D_{n-j}$$

Exemplo 3. Num congresso matemático n pessoas encontram-se sentadas num auditório de $n+k$ cadeiras. Elas vão para uma outra sala e quando retornam ao auditório, sentam-se novamente e é observado que nenhuma delas ocupa a mesma cadeira que antes. Mostre que o número de maneiras que isto pode ocorrer é D_{n+k}^k .

Solução. Sem perda de generalidade, suponhamos as cadeiras numeradas de 1 a $n+k$, com as n primeiras sendo previamente ocupadas por pessoas numeradas de 1 a n . Ademais, considere para todo $(i, j) \in \{1, \dots, n\} \times \{1, \dots, n+k\}$ a seguinte convenção: (i, j) representando a cadeira j sendo ocupada pela pessoa i e para $l \in \{(n+1)^*, \dots, (n+k)^*\}$ (l, j) se a cadeira j estiver vazia. Assim, o número de maneiras da sala ser ocupada sem as posições iniciais serem repetidas por nenhum dos presentes, é o conjunto das permutações caóticas entre os conjuntos $A^* = \{1, \dots, n, (n+1)^*, \dots, (n+k)^*\}$ e $A = \{1, \dots, n, (n+1), \dots, (n+k)\}$, i.e.,

$$D_{n+k}^k = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} D_{n+k-j} \quad (13)$$

■

Observação 2. O resultado dado em (13) a partir do Teorema 1; é uma generalização do problema 13, página 173 de [4] para o caso em que $k = 1$.

Problemas propostos

1. Prove que para todo $n \geq 3$,

$$D_n = (n-1)(D_{n-1} + D_{n-2}).$$

2. Prove usando a recorrência (11) que

$$D_n = \sum_{j=0}^n \frac{(-1)^j}{j!}.$$

3. Prove que

$$n! = \binom{n}{0} D_n + \binom{n}{1} D_{n-1} + \dots + \binom{n}{n} D_0.$$

4. (MIT-Competition-2014) Determine a quantidade de triplas não ordenadas de conjuntos (A, B, C) tais que:

- (a) $A, B, C \subset \{1, \dots, 8\}$;
- (b) $|A \cap B| = |B \cap C| = |C \cap A| = 2$;
- (c) $|A| = |B| = |C| = 4$.

5. (China National Competition-2001, [3]) Defina a sequência infinita a_1, a_2, \dots recursivamente como segue: $a_1 = 0, a_2 = 1$ e

$$a_n = \frac{1}{2}na_{n-1} + \frac{1}{2}n(n-1)a_{n-2} + (-1)^n \left(1 - \frac{n}{2}\right) \quad \forall n \geq 3.$$

Encontre uma fórmula explícita para

$$f_n = a_n + 2\binom{n}{1}a_{n-1} + 3\binom{n}{2}a_{n-2} + \dots + \binom{n}{n-1}a_1.$$

Referências Bibliográficas

- [1] de Montmort, P. R. (1708). *Essay d'analyse sur les jeux de hazard*. Paris: Jacque Quillau. 2. ed., Revue & augmentée de plusieurs Lettres. Paris: Jacque Quillau, 1713.
- [2] Morgado, A. C. O.; Carvalho, J. B. P.; Carvalho, P. C. P.; Fernandez, P. *Análise combinatória e probabilidade*. 9. ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2006. (Coleção do Professor de Matemática).
- [3] Andreescu, T.; Feng, Z. *Mathematical olympiads 2000-2001: Problems and solutions from around the world*. 2. ed., Mathematical Association of America, 2003.
- [4] Wallis, J. D. *A Begginer's Guide to Discrete Mathematics*. Birkhäuser Boston 2003; 1. ed. ISBN-10: 0817642692 ISBN-13: 978-0817642693.
- [5] Feller, W. *Introdução à teoria das probabilidades e suas aplicações*. São Paulo: Edgard Blucher, 1976. (Tradução de Flávio W. Rodrigues e Maria E. Fini).

Artigo: Transformações Geométricas na OBM

- Nível intermediário

Daniel Ramos Bezerra de Alencar
Picos - PI

Nos últimos anos, a maior parte dos problemas de geometria da OBM do nível 3 tem sido relacionada a concorrências e colinearidades, que são o ponto forte das transformações geométricas. No final deste artigo, veremos como essas ferramentas podem ser usadas para resolver alguns problemas de geometria plana do nível 3, que apareceram nas últimas versões da OBM. Porém, antes dos problemas, enunciaremos alguns lemas que serão úteis. A demonstração deles fica como desafio para o leitor e, no final do artigo, são dadas dicas de como demonstrá-los.

Lema 2. *O ponto A, o incentro de ABC, o ponto médio do arco BC do circuncírculo a ABC que não contém A e o ex-incentro relativo ao lado BC são colineares.*

De agora em diante, neste artigo (ABC) denotará o circuncírculo do triângulo ABC.

Definição 1. *Dado um triângulo ABC e um ponto P distinto dos vértices A, B e C, definimos o triângulo pedal de P em relação ao triângulo ABC como o triângulo tal que seus vértices são os pés das perpendiculares de P aos lados do triângulo.*

Um triângulo DEF é chamado de triângulo antipedal de P em relação a ABC se ABC é o triângulo pedal de P em relação a DEF.

Definição 2. *Dado um triângulo ABC, o conjugado isogonal de um ponto T em relação a ABC é obtido refletindo as retas TA, TB e TC em relação às bissetrizes internas de ABC que passam por A, B e C, respectivamente. As retas resultantes são concorrentes num ponto chamado de conjugado isogonal de T. Essa definição só é válida se T não pertence aos lados do triângulo.*

Lema 3. *O triângulo pedal de um ponto P num triângulo ABC e o triângulo antipedal do conjugado isogonal de P num triângulo ABC são homotéticos.*

Lema 4. *Sejam ABCD um quadrilátero inscritível e P = AD ∩ BC exterior ao (ABC). Uma inversão com centro em P e raio igual à raiz quadrada da potência de ponto de P em relação ao (ABC) fará com que os inversos dos pontos A, B, C e D sejam respectivamente os pontos D, C, B e A.*

Lema 5. *As reflexões do ortocentro em relação aos lados do triângulo ABC e aos pontos médios dos lados do triângulo estão sobre (ABC).*

Lema 6. *O ortocentro do triângulo ABC é o incentro de seu triângulo órtico.*

Lema 7. *Sejam D, E e F os pontos de tangência do incírculo de ABC com os lados BC, AC e AB. A reta de Euler do triângulo DEF é a reta que contém o incentro e o circuncentro do triângulo ABC.*

Lema 8. *Seja D o ponto de interseção das tangentes ao (ABC) por B e C. Então o segmento AD é uma simediana de ABC, isto é, a reflexão da mediana que passa pelo vértice A sobre a bissetriz que passa pelo mesmo vértice.*

Lema 9. *O conjugado isogonal de um ponto P é o circuncentro do triângulo formado pelas reflexões de P nos lados de ABC.*

Ao final, apresentaremos alguns encaminhamentos para demonstrar cada um desses lemas.

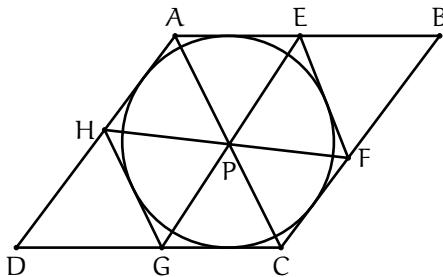
Alguns problemas de geometria na OBM

A seguir enunciaremos com sua respectiva resolução alguns problemas que apareceram nas provas da terceira fase da Olimpíada Brasileira de Matemática. Em alguns destes problemas serão usados os lemas enunciados na seção anterior. Ressaltamos que em outros problemas também serão empregados teoremas clássicos conhecidos, tais como o Teorema de Brianchon, Teorema de Desargues, etc, que podem ser encontrados facilmente na Wikipedia ou no livro de Coxeter e Greitzer [5].

Exemplo 4 (OBM 2003, Problema 3). *Seja ABCD um losango. Sejam E, F, G e H pontos sobre os lados AB, BC, CD e DA, respectivamente, e tais que as retas EF e GH são tangentes à circunferência inscrita no losango. Prove que as retas EH e FG são paralelas.*

Solução. Dado que AB é paralelo a DC, podemos assumir que estas duas retas se cortam num ponto no infinito que denotaremos por M. De igual forma AD e BC se interessetam num ponto no infinito que denotaremos por N. Tem-se que as retas EM, GM, HN e FN (ou suas equivalentes AB, CD, AD e BC) são tangentes à circunferência inscrita no losango. Então, pelo Teorema de Brianchon aplicado no hexágono EMGHNF, se tem que EH, MN e FG são concorrentes, isto é, $EH \parallel FG$.

Uma outra ideia é usar o Teorema de Desargues: Pelo Teorema de Brianchon aplicado no hexágono circunscritível AEFCGH, se tem que AC, GE e HF são concorrentes num ponto que denotaremos por P. Como esses segmentos são concorrentes, os triângulos AHE e CFG estão em perspectiva. Portanto, pelo Teorema de Desargues, segue que os pontos $EH \cap FG$, $AH \cap CF$, $AE \cap GC$ são colineares e, como $AH \parallel CF$ e $AE \parallel GC$, tem-se que $EH \parallel FG$.

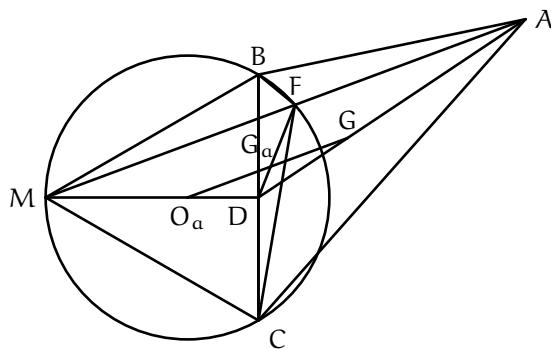


■

Exemplo 5 (OBM 2005, Problema 5). *Sejam ABC um triângulo acutângulo e F o seu ponto de Fermat, isto é, o ponto interior ao triângulo ABC tal que os três ângulos $\angle AFB$, $\angle BFC$ e $\angle CFA$ medem 120° . Para cada um dos triângulos ABF , ACF e BCF , é traçada a sua reta de Euler, ou seja, a reta que liga o seu circuncentro e o seu baricentro. Prove que essas três retas concorrem em um ponto.*

Solução. Seja M o ponto pertencente ao circuncírculo (BFC) tal que o triângulo BCM seja equilátero. Como $\angle BCM = 60^\circ$, tem-se que $\angle BFM = 60^\circ$, pois ambos olham para o mesmo arco em (BFC) . Desta forma, A , F e M são colineares.

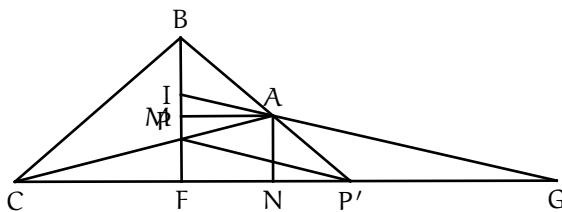
Sejam D o ponto médio de BC , G_a o baricentro de BFC , O_a o circuncentro de BFC e G o baricentro de ABC . Considere uma homotetia de razão $\frac{1}{3}$ centrada em D . Ela levará o ponto A no ponto G , o ponto M no ponto O_a e o ponto F no ponto G_a . Portanto, G , O_a e G_a são colineares. De forma análoga para os outros lados do triângulo, as retas de Euler de BFC , CFA e AFB concorrem no ponto G .



■

Exemplo 6 (OBM 2006, Problema 1). *Seja ABC um triângulo, P o pé da bissetriz interna relativa ao lado AC e I seu incentro. Se AP + AB = CB, prove que API é um triângulo isósceles.*

Solução. Sejam AP o prolongamento do segmento AB com tamanho AP e F o prolongamento de BP no segmento PC. Como $AB + AP = BC$, o triângulo PBC é isósceles. Como PBC é isósceles e BP é a bissetriz do ângulo $\angle CBP$, BF é a altura relativa ao lado PC. Como PAP é isósceles, então $\angle IAP = \angle PPA$ e, consequentemente, $PP \parallel AI$. Disso, tem-se que $\angle AGC = \angle PPC$ e, como P está na mediatrix de PC, tem-se que $\angle PCA = \angle PPC = \angle AGC$ e, consequentemente, o triângulo CAG é isósceles.



Seja N um ponto sobre CP' e M um ponto sobre BP de tal forma que $AN \perp P'C$ e $AM \parallel P'C$ e consequentemente, perpendicular a BP. Como CAG é isósceles, N é o ponto médio de CG e então, AM, AN, AC e AG formam um feixe harmônico. Incidindo esse feixe sobre BF, obtém-se que, por AN ser paralelo a BF, M é o ponto médio de IP. Disso, e do fato de AM ser a altura relativa ao lado IP, tem-se que o triângulo AIP é isósceles.

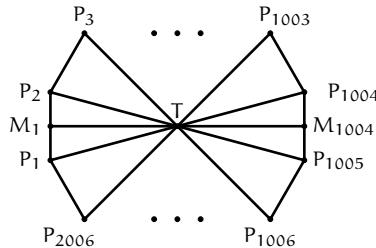
■

Exemplo 7 (OBM 2006, Problema 5). *Seja Ω um polígono convexo de 2006 lados. As 1003 diagonais ligando vértices opostos e os 1003 segmentos que ligam os pontos médios dos lados opostos são concorrentes, ou seja, todos os 2006 segmentos possuem um ponto em comum. Prove que os lados opostos de Ω são paralelos e congruentes.*

Solução. Sejam $P_1, P_2, \dots, P_{2006}$ os vértices desse polígono e M_1, \dots, M_{2006} os pontos médios dos segmentos $P_1P_2, P_2P_3, \dots, P_{2006}P_1$, respectivamente. Como $\frac{P_1M_1}{M_1P_2} = \frac{P_{1004}M_{1004}}{M_{1004}P_{1005}}$, tem-se que $P_1P_2 \parallel P_{1004}P_{1005}$ e, consequentemente, há uma homotetia centrada em T, ponto comum das diagonais, e de razão $-k(k > 0)$ que leva P_1 a P_{1004} , P_2 a P_{1005} e M_1 a M_{1004} . Porém, usando semelhanças equivalentes entre os triângulos $P_iP_{i+1}T$ e $P_{i+2003}P_{i+2002}T$ onde $i = 2, 3, \dots, 1003$, segue que

$$\frac{TP_{1004}}{TP_1} = \frac{TP_{1005}}{TP_2} = \dots = \frac{TP_{2006}}{TP_{1003}} = \frac{TP_1}{TP_{1004}} = k.$$

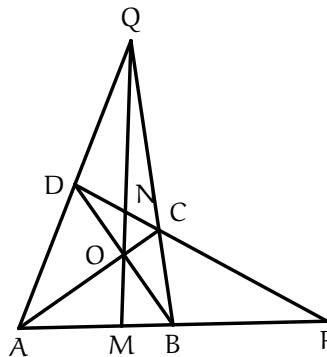
Da primeira e da última fração da igualdade anterior se tem que $\frac{1}{k} = k$. Portanto, $k = 1$ e os lados opostos do polígono são paralelos e congruentes.



■

Exemplo 8 (OBM 2007, Problema 5). *Seja ABCD um quadrilátero convexo e sejam P o ponto de interseção das retas AB e CD, Q o ponto de interseção das retas AD e BC e O o ponto de interseção das diagonais AC e BD. Prove que se $\angle POQ$ é um ângulo reto, então PO é bissetriz de $\angle AOD$ e QO é bissetriz de $\angle AOB$.*

Solução. Pela construção do conjugado harmônico, obtém-se que A, B, M, P formam uma quádrupla harmônica e, como $\angle MOP = 90^\circ$, há um círculo de Apolônio que passa por M, O e P e, consequentemente, OM é bissetriz de $\angle AOB$. De forma análoga, ON é bissetriz de $\angle AOD$.



■

Exemplo 9 (OBM 2008, Problema 4). *Seja ABCD um quadrilátero cíclico e r e s as retas simétricas à reta AB em relação às bissetrizes internas dos ângulos $\angle CAD$ e $\angle CBD$, respectivamente. Sejam P o ponto de interseção de r e s e O o centro do círculo circunscrito a ABCD. Prove que OP é perpendicular a CD.*

Solução. Considere o caso em que r e s não sejam tangentes à circunferência. Sejam E e F as interseções de r e s, respectivamente, diferentes de A e B. Como $\angle EAD = \angle CAB$,

tem-se que $BE \parallel CD$. Como

$$\angle FBA = 180 - \angle DBC - 2 \times (\angle ABD)$$

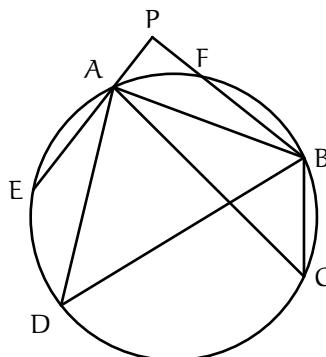
e

$$\angle BDA = 180 - \angle ABD - \angle DBC - \angle CAB,$$

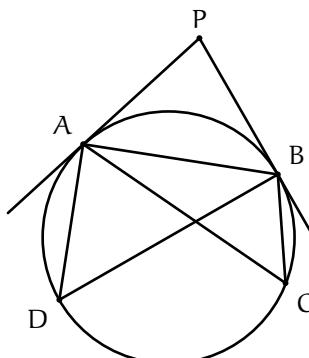
tem-se que

$$\angle BAF = \angle BDA - \angle FBA = \angle ABD - \angle CAB = \angle ABD - \angle EAD = \angle ABE.$$

Portanto, $AF \parallel BE \parallel CD$. Dessa forma, a reta polar de P também é paralela a CD e, consequentemente, $OP \perp CD$.

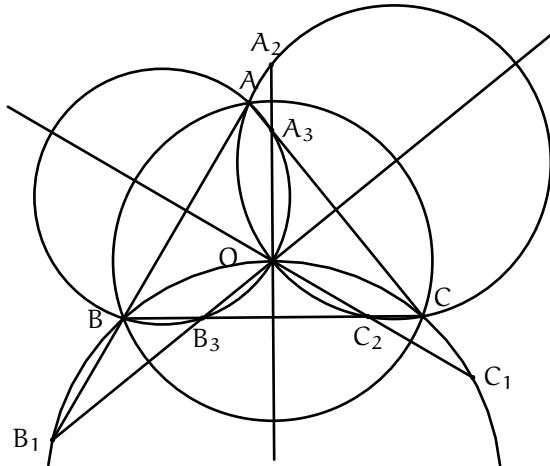


Agora suponhamos que uma das retas r ou s é tangente à circunferência. Podemos supor, sem perda de generalidade, que a reta r é tangente à circunferência. Pelo fato de o ângulo entre a tangente e o segmento AD ser igual ao ângulo $\angle CAB$ e também é igual ao ângulo $\angle ABD$, tem-se que $AB \parallel CD$. Além disso, como o ângulo entre a reta s e o segmento BC é igual ao ângulo $\angle ABD$, que é igual ao ângulo $\angle CAB$, tem-se que a reta s também é tangente à circunferência. Dessa forma, a reta AB é a reta polar de P e, consequentemente, $OP \perp CD$.



Exemplo 10 (OBM 2009, Problema 5). Seja ABC um triângulo e O seu circuncentro. As retas AB e AC cortam o circuncírculo de OBC novamente em $B_1 \neq B$ e $C_1 \neq C$, respectivamente, as retas BA e BC cortam o circuncírculo de OAC em $A_2 \neq A$ e $C_2 \neq C$, respectivamente, e as retas CA e CB cortam o circuncírculo de OAB em $A_3 \neq A$ e $B_3 \neq B$, respectivamente. Prove que as retas A_2A_3 , B_1B_3 e C_1C_2 passam por um mesmo ponto.

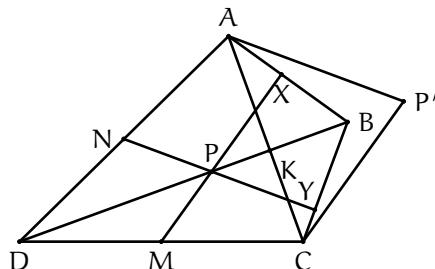
Solução. Considere a inversão com centro em O e raio OA . Como o circuncírculo (AOC) passa por O , seu inverso é uma reta que passa por $A = A$ e $C = C$, isto é, a reta AC é o inverso de (AOC) . O inverso de A_2 é a interseção do inverso do (AOC) com o inverso de AB , isto é, a interseção da reta AC com (AOB) diferente de A , que é o ponto A_3 . Então A_2 e A_3 são inversos entre si, logo, a reta A_2A_3 passa por O . Analogamente, B_1B_3 e C_1C_2 passam por O . Portanto, A_2A_3 , B_1B_3 e C_1C_2 são concorrentes.



Exemplo 11 (OBM 2010, Problema 4). Seja $ABCD$ um quadrilátero convexo e M e N os pontos médios dos lados CD e AD , respectivamente. As retas perpendiculares a AB passando por M e a BC passando por N cortam-se no ponto P . Prove que P pertence à diagonal BD se, e somente se, as diagonais AC e BD são perpendiculares.

Solução. Considere uma homotetia de razão 2 centrada em D . Tal homotetia levará os pontos M e N , respectivamente, nos pontos C e A , e o ponto P será levado num ponto da reta BD , chamado de P' . Como $MP \perp AB$ e $NP \perp BC$, tem-se que $AP \perp BC$ e $CP \perp AB$.

Como AP e CP são alturas do triângulo ABC , P é o ortocentro de ABC e, portanto, BD é perpendicular a AC .



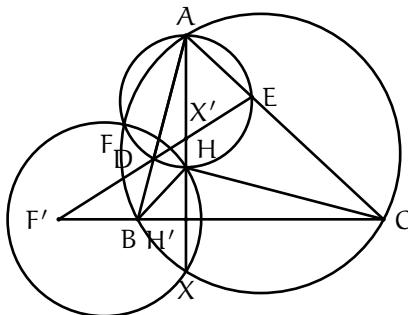
Para provar a volta, isto é, que, se AC e BD são perpendiculares, então P pertence à diagonal BD , pode-se usar uma ideia análoga à que foi usada acima. Porém, dessa vez, note que os segmentos AC e XY são antiparalelos com respeito ao ângulo $\angle ABC$, pois XY é paralelo ao segmento formado pelos pés das alturas relativas aos lados AB e BC do triângulo ABC . Segue que o quadrilátero $AXYC$ é inscritível e, pelo Lema 3, a inversão de centro em B e raio igual à raiz quadrada da potência de ponto de B em relação ao circuncírculo (AXY) fará com que $X = A$, $Y = C$, $A = X$ e $C = Y$. Como $\angle BKA = \angle BKC = 90^\circ$, tem-se que $\angle BAK = \angle BCK = 90^\circ$. Portanto, $K = P$ e, consequentemente, B , K e P são colineares.

Observação 3. Ao enunciado deste problema apresenta deve ser adicionada a condição que o ângulo $\angle ABC$ seja diferente de 90° , pois caso contrário, o ponto P será o próprio B e, nesse caso, o segmento BD poderá não ser a altura do triângulo ABC .

Exemplo 12 (OBM 2011, Problema 5). *Seja ABC um triângulo acutângulo e H seu ortocentro. As retas BH e CH cortam AC e AB em D e E , respectivamente. O circuncírculo de ADE corta o circuncírculo de ABC em $F \neq A$. Provar que as bissetrizes internas de $\angle BFC$ e $\angle BHC$ se cortam em um ponto sobre o segmento BC .*

Solução. Sejam X a intersecção de AH com o circuncírculo (ABC) e H o pé da altura AH . Como $\angle BEC = \angle BDC = 90^\circ$, o quadrilátero $BEDC$ é inscritível. Considere a inversão com centro em A e raio igual à raiz quadrada da potência de ponto de A em relação a (BED) . Pelo Lema 3, sabe-se que ela levará (ABC) à reta DE e (ADE) à reta BC . Como $AEHD$ é inscritível, o inverso de H pertence à reta BC e, portanto, H é o inverso de H . Como F é a intersecção de (ABC) e (ADE) diferente de A , o inverso de $F = F'$ é a intersecção entre DE e BC . Como X pertence a (ABC) , tem-se que $X = AH \cap DE$. Da construção do conjugado harmônico, tem-se que $F, H, D = B$ e $E = C$ formam uma quádrupla harmônica e, consequentemente, $F, X, B = D$ e $C = E$ também

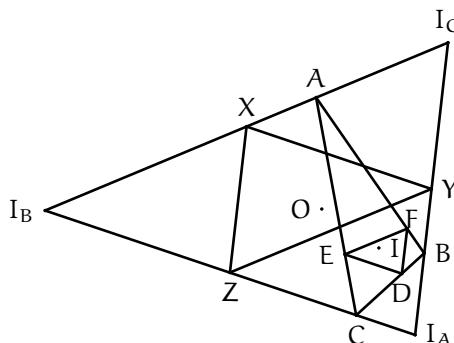
formam uma quádrupla harmônica. Portanto, o quadrilátero $FXBC$ é harmônico. Então, segue que as bissetrizes dos ângulos $\angle BFC$ e $\angle BXC$ se encontram no mesmo ponto em BC (pois $\frac{BF}{FC} = \frac{BX}{XC}$), e, por simetria em relação ao segmento BC , a bissetriz de $\angle BHC$ também é concorrente no mesmo ponto em BC .



Uma segunda solução pode ser obtida usando o círculo de Apolônio. Continuando do primeiro parágrafo, seja HM a bissetriz de $\angle BHC$, então há um círculo de Apolônio que passa por H e M . Se F pertencer a essa circunferência, o problema está resolvido, pois ela é o lugar geométrico dos pontos P tais que PM é bissetriz interna de $\angle BPC$. Do Lema 4, sabe-se que $HH = HX$ e, como $BC \perp HX$ e o centro do círculo de Apolônio está na reta BC , obtém-se que BC é a mediatrix de HX . Consequentemente, X pertence ao círculo de Apolônio. Como F , X , $B = E$ e $C = D$ formam uma quádrupla harmônica, obtém-se que $\frac{CX}{CF} = \frac{BX}{BF}$, que, pela fórmula da distância entre pontos inversos, resulta em $\frac{CX}{BX} = \frac{CF}{BF}$. Desta forma, F pertence ao círculo de Apolônio. ■

Exemplo 13 (OBM 2012, Problema 2). *Dado um triângulo ABC , o exincentro relativo ao vértice A é o ponto de interseção das bissetrizes externas de $\angle B$ e $\angle C$. Sejam I_A , I_B e I_C os exincentros do triângulo escaleno ABC relativos a A , B e C , respectivamente, e X , Y e Z os pontos médios de $I_B I_C$, $I_C I_A$ e $I_A I_B$, respectivamente. O incírculo do triângulo ABC toca os lados BC , CA e AB nos pontos D , E e F , respectivamente. Prove que as retas DX , EY e FZ têm um ponto em comum pertencente à reta IO , sendo I o incentro e o circuncentro do triângulo ABC , respectivamente.*

Solução. Pelo Lema 1 e do fato que as bissetrizes internas e externas são perpendiculares, obtem-se que $I_A I_B I_C$ é o triângulo antipedal de I com relação ao triângulo ABC e que I é o ortocentro de $I_A I_B I_C$. Como o incentro é conjugado isogonal dele próprio, do Lema 2, sabe-se que seu triângulo pedal e seu triângulo antipedal em relação ao triângulo ABC são homotéticos, isto é, DEF e $I_A I_B I_C$ são homotéticos. Consequentemente, os triângulos XYZ e DEF são homotéticos.



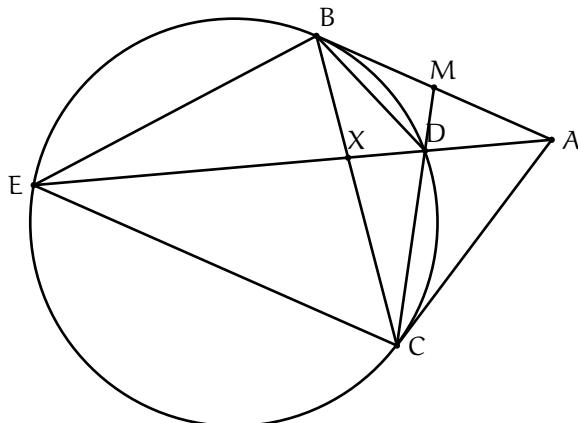
Como o circuncírculo (ABC) é o círculo dos 9 pontos do triângulo $I_A I_B I_C$ (pois A , B e C são os pés das alturas do triângulo $I_A I_B I_C$), os pontos X , Y e Z pertencem a (ABC) . Como I é o circuncentro de DEF e O é o circuncentro de XYZ , a homotetia que leva DEF a XYZ também leva I a O . Como o centro dessa homotetia é o ponto no qual concorrem DX , EY e FZ , ele é colinear com I e O . ■

Exemplo 14 (OBM 2013, Problema 1). *Sejam Γ um círculo e A um ponto exterior a Γ . As retas tangentes a Γ que passam por A tocam Γ em B e C . Seja M o ponto médio de AB . O segmento MC corta Γ novamente em D e a reta AD corta Γ novamente em E . Sendo $AB = a$ e $BC = b$, calcular CE em função de a e b .*

Solução. Da forma como o quadrilátero $BDEC$ foi construído, segue que ele é um quadrilátero harmônico, pois

$$\frac{BD}{BE} = \frac{AB}{EA} = \frac{AC}{EA} = \frac{CD}{EC}.$$

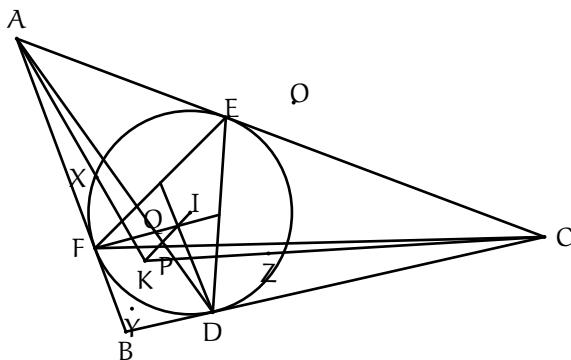
Então, o feixe formado pelas retas CA , CB , CM e CE é harmônico e, como M é ponto médio de AB , tem-se que $CE \parallel AB$, pois caso contrário se eles se intersectarem em E' teríamos que E' , B , M e A formariam uma quadrupla harmônica, o que implicaria que M também seria ponto médio do segmento $E'A$. Desse paralelismo, obtém-se que B é o ponto médio do arco CE e, consequentemente, $BE = BC = b$. Com isso, e como $\angle BEC = \angle BCA$, tem-se que os triângulos CBE e ABC são semelhantes. Consequentemente, obtém-se que $CE = \frac{b^2}{a}$.



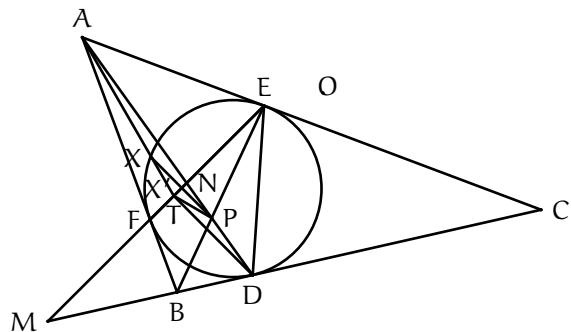
Exemplo 15 (OBM 2013, Problema 6). *O incírculo do triângulo ABC toca os lados BC, CA e AB nos pontos D, E e F respectivamente. Seja P o ponto de interseção das retas AD e BE. As reflexões de P em relação a EF, FD e DE são X, Y e Z, respectivamente. Prove que as retas AX, BY e CZ têm um ponto comum pertencente à reta IO, sendo I e O o incentro e o circuncentro do triângulo ABC.*

Solução. Pelos Lemas 2 e 6, sabe-se que a reta IO de ABC é a reta de Euler de DEF e que o triângulo órtico de DEF é homotético ao triângulo ABC (pois ABC é o triângulo antipedal de I em relação a DEF).

Como os lados de XYZ são paralelos aos lados do triângulo órtico de DEF (pois os lados de ambos os triângulos são perpendiculares aos lados de DEF), tem-se que os triângulos ABC e XYZ são homotéticos. Pelo Lema 7, sabe-se que P é o ponto de Lemoine de DEF. Pelo Lema 8, sabe-se que o conjugado isogonal de P (ponto Q) em relação ao triângulo DEF, isto é, o baricentro de DEF, é o circuncentro de XYZ. Por fim, como AX, BY e CZ concorrem no centro da homotetia que leva XYZ em ABC (ponto K), tem-se que K é colinear com o baricentro de DEF e com o ponto O, isto é, ele está na reta IO.



Uma outra ideia é usar quádruplas harmônicas. Sejam $M = BC \cap EF$, $N = AD \cap EF$, T o pé da altura relativa ao lado EF do triângulo DEF e X o pé da perpendicular de P em EF . Como AD , BE e CF concorrem no ponto de Gergonne (P) do triângulo ABC , tem-se que M, D, B e C formam uma quádrupla harmônica e, consequentemente, A, P, N e D formam uma quádrupla harmônica. Como $TD \perp EF$, há um círculo de Apolonio que passa por D, T e N e, portanto, EF é bissecriz do ângulo ATP . Por simetria em relação a EF , obtem-se que os triângulos PXT e XXT são congruentes. Então, EF é bissecriz do ângulo PTX e, portanto, X está na reta AT . De forma análoga para Y e Z , tem-se que AX, BY e CZ concorrem no centro da homotetia que leva o triângulo órtico de DEF no triângulo ABC , isto é, ele está na reta IO .

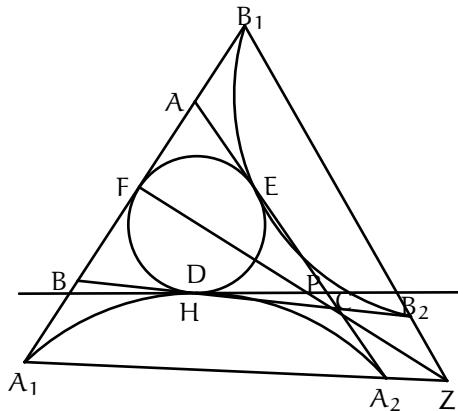


Exemplo 16 (OBM 2014, Problema 6). *Seja ABC um triângulo com incentro I e incírculo ω . O círculo ω_A tangencia externamente ω e toca os lados AB e AC em A_1 e A_2 , respectivamente. Seja r_A a reta A_1A_2 . Defina r_B e r_C de modo análogo. As retas r_A , r_B e r_C determinam um triângulo XYZ . Prove que o incentro de XYZ , o circuncentro de XYZ e I são colineares.*

Solução. Considere que as tangentes comuns às circunferências ω e ω_A , ω e ω_B , ω e ω_C se cruzam nos pontos M , N e P . Sejam H o ponto de tangência entre ω e ω_A e D , E e F os pontos de tangência de ABC com seu incírculo.

A homotetia que leva ω em ω_A também leva FE em A_1A_2 . De forma análoga pra ω_B e ω_C , obtem-se que os lados de DEF e XYZ são paralelos e, consequentemente, DEF e XYZ são homotéticos. Portanto, o centro da homotetia que leva DEF em XYZ é colinear com o circuncentro de DEF (que é o ponto I) e com o circuncentro de XYZ .

Como a tangente comum a ω e ω_A divide os segmentos FA_1 e EA_2 em duas partes, onde cada parte é igual à sua correspondente no outro segmento. Do Teorema de Tales, essa tangente divide o segmento FZ em duas partes iguais. De forma análoga, a tangente comum a ω e ω_B divide o segmento FZ em duas partes iguais. Consequentemente, F , Z e P são colineares e os triângulos DEF , XYZ e MNP são homotéticos sob um mesmo centro. Então, o incentro de MNP , que é o próprio I , o incentro de XYZ e o centro da homotetia são colineares. Portanto, o incentro de XYZ , o circuncentro de XYZ e I são colineares.



■

Dicas para demonstrar os Lemas

1. Use uma homotetia centrada em A e veja a relação entre o incírculo e o ex-incírculo nessa homotetia.
2. Faça marcação de ângulos e descubra um quadrilátero inscritível.
3. Use a fórmula da distância entre pontos inversos.

4. Use uma homotetia centrada no ortocentro.
5. Use quádruplas harmônicas e descubra um círculo de Apolônio.
6. Use o Lema 2 no ortocentro de DEF e o Lema 5 para descobrir relações entre os pontos notáveis de DEF e de ABC.
7. Use a quádrupla harmônica formada por D, o ponto médio de BC e os pontos em que o segmento formado por D e o ponto médio de BC cruzam (ABC) e depois descubra um feixe harmônico que parte de A. OBS: em [11], pode ser encontrada uma demonstração interessante usando outra quádrupla harmônica.
8. Use a circunferência que passa por P e duas das reflexões e faça marcação de ângulos.

Referências Bibliográficas

- [1] Abel, Z. Triangle centers.
- [2] Castro, L. G. M. Introdução à geometria projetiva. Revista Eureka! No 8, 16-27.
- [3] Calgary Math Circles: Triangles, Concurrency and Quadrilaterals.
- [4] Davis, T. Inversion in a circle.
- [5] Rapanos, N. The harmonic quadrilateral and its properties.
- [6] Shine, C. Y. Homotetias, composição de homotetias e o problema 6 da IMO 2008. Revista Eureka! No 29, 32-43.
- [7] Shine, C. Y. As crônicas de nérdia: o círculo, a rotação e os isogonais.
- [8] Zhao, Y. Lemmas in euclidian geometry.
- [9] <http://mathworld.wolfram.com/EulerLine.html>
- [10] <http://mathworld.wolfram.com/AntipedalTriangle.html>

Artigo: Teorema de Casey, a ida e a volta

- Nível avançado

Régis Prado Barbosa
Cólegio Etapa - São Paulo.

O Teorema de Casey traz resultados sobre configurações muito complexas da geometria plana. Tais configurações já apareceram em testes de seleção para a IMO e na própria IMO, como por exemplo, no problema 6 do ano de 2011. Resolver essas questões sem este teorema é praticamente impossível, por isso recomenda-se ter conhecimento deste resultado.

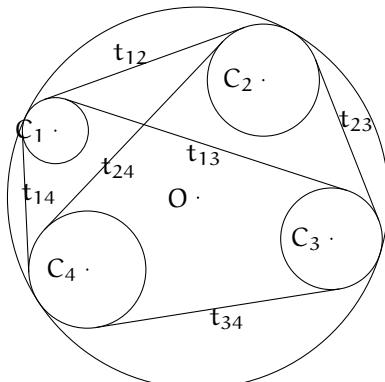
Teorema 2 (Casey). *Sejam $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ e Γ_4 quatro circunferências num plano e t_{ij} o comprimento do segmento entre os pontos de tangência da tangente externa comum às circunferências Γ_i e Γ_j . A relação*

$$t_{13} \cdot t_{24} = t_{12} \cdot t_{34} + t_{14} \cdot t_{23}$$

é satisfeita se, e somente se, as quatro circunferências são todas tangentes ou internamente ou externamente a uma circunferência, ou são todas tangentes a uma reta do mesmo lado.

Essa é a forma mais conhecida do teorema de Casey. Em sua forma mais geral considera-se também casos em que algumas das quatro circunferências tangenciam a quinta internamente e outras externamente. Nesses casos se duas das quatro circunferências tangenciarem do mesmo modo, ambas internas ou ambas externas, usa-se a tangente externa t_{ij} na relação. Caso tangenciem de modo diferente, usa-se \bar{t}_{ij} que é o comprimento da tangente comum interna. As demonstrações são praticamente análogas. A nossa proposta é explorar apenas a forma mais conhecida.

Na figura a seguir as quatro circunferências são tangentes internamente a uma quinta



Para a demonstração, vamos usar inversão e alguns teoremas auxiliares. Se o leitor não está familiarizado com esta técnica da inversão pode ler sobre o assunto em [3]. A seguir enunciamos os teoremas que usaremos na prova do resultado principal.

Teorema 3. *Dados dois pontos quaisquer P e Q no plano e P' e Q' seus inversos com respeito a uma inversão com centro O e raio r. A seguinte relação é satisfeita:*

$$P'Q' = PQ \cdot \frac{r^2}{OP \cdot OQ}.$$

Teorema 4. *Dados quaisquer quatro pontos P, Q, R e S e P', Q', R' e S' seus respectivos inversos com respeito a uma inversão de centro O e raio r, temos a seguinte relação:*

$$\frac{P'Q' \cdot R'S'}{P'S' \cdot R'Q'} = \frac{PQ \cdot RS}{PS \cdot RQ}.$$

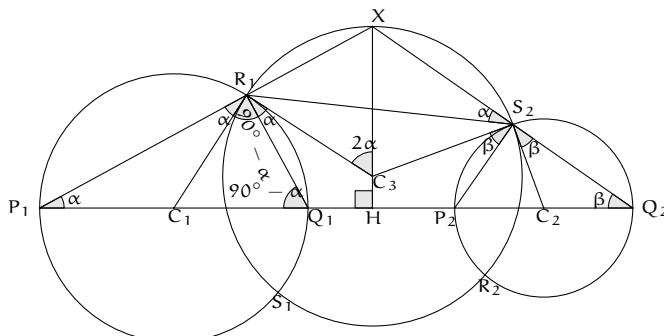
Teorema 5. *Considere duas circunferências Γ_1 e Γ_2 de raios r_1 e r_2 dispostas de forma que existe tangente externa comum de comprimento t_{12} . Uma inversão de centro fora das duas circunferências ou de centro dentro de ambas conserva a razão entre o quadrado do comprimento da tangente comum externa e o produto dos raios, ou seja:*

$$\frac{t_{12}^2}{r_1 r_2} = \frac{t'_{12}^2}{r'_1 r'_2}.$$

Demonstração. Considere as circunferências Γ_1 , Γ_2 e uma reta que passa pelos centros de ambas e corta as circunferências nos pontos P_1 , Q_1 , P_2 e Q_2 . Seja d a distância entre os centros. Logo,

$$\frac{P_1 P_2 \cdot Q_1 Q_2}{P_1 Q_1 \cdot P_2 Q_2} = \frac{(d + r_1 - r_2)(d - r_1 + r_2)}{2r_1 \cdot 2r_2} = \frac{d^2 - (r_1 - r_2)^2}{4r_1 r_2} = \frac{t_{12}^2}{4r_1 r_2}.$$

Considere uma circunferência C_3 ortogonal às circunferências C_1 e C_2 que corta C_1 e C_2 nos pontos R_1 , S_1 , R_2 , S_2 como na figura. Vejamos que as linhas $P_1 R_1$, $Q_1 S_1$, $P_2 R_2$ e $Q_2 S_2$ são colineares.



Seja H o ponto sobre a reta que passa pelos centros tal que C_3H é a reta perpendicular a C_1C_2 . Considere o ponto X a interseção das retas P_1R_1 e Q_2S_2 . Definem-se os ângulos:

$$\alpha = \angle C_1P_1R_1 \text{ e } \beta = \angle C_2Q_2S_2.$$

Usando que a soma dos ângulos internos do triângulo $\triangle P_1XQ_2$ é 180° , tem-se:

$$\angle R_1XS_2 = 180^\circ - \alpha - \beta,$$

e como P_1Q_1 é diâmetro da circunferência Γ_1 :

$$\angle P_1R_1Q_1 = 90^\circ.$$

Do fato que o triângulo $\triangle P_1C_1R_1$ é isósceles em C_1 , segue que:

$$\angle C_1R_1P_1 = \alpha \rightarrow \angle C_1R_1Q_1 = 90^\circ - \alpha \Rightarrow \angle C_1Q_1R_1 = 90^\circ - \alpha \Rightarrow \angle R_1Q_1H = 90^\circ + \alpha,$$

e pela ortogonalidade entre as circunferências Γ_1 e Γ_3 , sabemos que $\angle C_3R_1C_1 = 90^\circ$. Logo, observando os ângulos em torno do ponto R_1 , podemos concluir que:

$$\angle C_3R_1Q_1 = \alpha.$$

Analogamente, prova-se que:

$$\angle S_2P_2H = 90^\circ + \beta \text{ e } \angle C_3S_2P_2 = \beta,$$

logo somando os ângulos do pentágono $Q_1R_1C_3S_2P_2$, temos:

$$\angle R_1C_3S_2 = 360^\circ - 2\alpha - 2\beta = 2 \cdot \angle R_1XS_2, \text{ assim } X \text{ está sobre a circunferência } \Gamma_3.$$

Por outro lado, podemos determinar $\angle C_3R_1X$.

$$\angle P_1R_1Q_1 = 90^\circ \rightarrow \angle XR_1Q_1 = 90^\circ \Rightarrow \angle C_3R_1X = 90^\circ - \alpha.$$

Como, $\triangle R_1C_3X$ é isósceles:

$$C_3R_1 = C_3X \rightarrow \angle C_3XR_1 = 90^\circ - \alpha \Rightarrow \angle XC_3R_1 = 2\alpha.$$

Se analisarmos os ângulos do quadrilátero $C_3HQ_1R_1$, obtemos

$$\angle HC_3R_1 = 180^\circ - 2\alpha \Rightarrow \angle XC_3R_1 + \angle HC_3R_1 = 180^\circ, \text{ portanto } H, C_3 \text{ e } X$$

são colineares. Além disso, como $\angle XC_3R_1 = 2\alpha$ é ângulo central de Γ_3 , temos $\angle XS_2R_1 = \alpha$, e assim

$$\triangle XR_1S_2 \sim \triangle XQ_2P_1 \text{ pois } \angle XS_2R_1 = \angle XP_1Q_2 \text{ e } \angle S_2XR_1 = \angle P_1XQ_2.$$

Logo seus lados são proporcionais e disso:

$$XR_1 \cdot XP_1 = XQ_2 \cdot XP_2 \Rightarrow \text{Pot}_{\Gamma_1} X = \text{Pot}_{\Gamma_2} X,$$

portanto X está no eixo radical de Γ_1 e Γ_2 .

Notando que X pode ser visto como o segundo ponto de interseção de P_1R_1 com Γ_3 ou como o segundo ponto de interseção de Q_2S_2 com Γ_3 . Os passos feitos até aqui permitem concluir que:

P_1R_1, Q_1S_1, P_2R_2 e Q_2S_2 passam por um mesmo ponto X .

Considere a inversão de centro X de raio $r = \sqrt{\text{Pot}_{\Gamma_1} X} = \sqrt{\text{Pot}_{\Gamma_2} X}$. Já que X está sobre o eixo radical de Γ_1 e Γ_2 , essa transformação leva os pontos R_1, S_1, R_2 e S_2 nos pontos P_1, Q_1, P_2 e Q_2 , respectivamente. Pelo teorema 3 segue

$$\frac{R_1R_2 \cdot S_1S_2}{R_1S_1 \cdot R_2S_2} = \frac{P_1P_2 \cdot Q_1Q_2}{P_1Q_1 \cdot P_2Q_2} = \frac{t_{12}^2}{4r_1r_2}.$$

Agora considere uma inversão qualquer de centro fora de Γ_1 e Γ_2 ou dentro de ambas. Ela levará Γ_3 em Γ'_3 . Novamente pelo teorema 3, tem-se:

$$\frac{R'_1R'_2 \cdot S'_1S'_2}{R'_1S'_1 \cdot R'_2S'_2} = \frac{R_1R_2 \cdot S_1S_2}{R_1S_1 \cdot R_2S_2}.$$

Sabendo que a ortogonalidade entre as circunferências é preservada na inversão, sabe-se que Γ'_3 é ortogonal a Γ'_1 e a Γ'_2 , logo os passos indicados acima podem ser usados também na figura invertida:

$$\frac{R'_1R'_2 \cdot S'_1S'_2}{R'_1S'_1 \cdot R'_2S'_2} = \frac{t'_{12}^2}{4r'_1r'_2}.$$

Fazendo uso dessas 3 equações, conclui-se que:

$$\frac{t_{12}^2}{4r_1r_2} = \frac{t'_{12}^2}{4r'_1r'_2} \Rightarrow \frac{t_{12}^2}{r_1r_2} = \frac{t'_{12}^2}{r'_1r'_2}.$$

□

Agora estamos aptos à demonstração do Teorema de Casey. Divideremos a demonstração em duas partes:

Demonstração. Mostraremos primeiro a volta do teorema, isto é, suponha que vale a equação entre as tangentes externas:

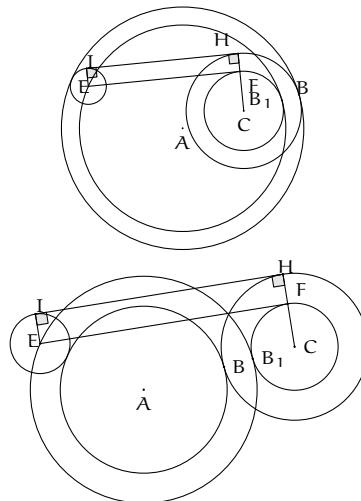
$$t_{13} \cdot t_{24} = t_{12} \cdot t_{34} + t_{14} \cdot t_{23},$$

e provaremos que uma das três afirmações sobre as quatro circunferências é verdadeira:

- são tangentes internamente a uma circunferência;
- são tangentes externamente a uma circunferência;
- são tangentes por um mesmo lado a uma reta.

Suponha sem perda de generalidade que r_4 é o menor raio. Considere a transformação que chamaremos de redução que mantém os centros C_i das circunferências e diminui os raios para $r_i - r_4$. Essa transformação preserva a propriedade de haver uma circunferência tangente a todas, isto é, antes e depois da transformação existe uma circunferência que tangencia as quatro circunferências.

É fácil verificar o caso da reta. Existe uma reta tangente a todas do mesmo lado se, e somente se, existia antes da transformação.



No caso em que as quatro tangenciam internamente uma circunferência, temos a situação da primeira figura acima onde unicamente são mostradas duas dessas circunferências. Veja que a circunferência de centro A tangenciava as duas circunferências. Diminuindo os raios, esta passa a conter o centro da menor circunferência e a tangenciar a maior em outro ponto B_1 .

Os comprimentos das tangentes externas comuns não se altera, pois formam-se paralelogramos. Considerando os casos possíveis apresentados na figura anterior, teremos:

$$EI = FH \text{ e } EI \parallel FH \Rightarrow \text{é um paralelogramo} \Rightarrow EF = HI.$$

No caso de a tangências iniciais serem externas, temos a segunda figura. Os resultados são análogos, bastando lembrar que se deve aumentar o raio da circunferência que tangencia as outras quatro ao invés de diminuir como feito na situação anterior.

Essa transformação torna a circunferência Γ_4 um ponto C_4 . Considere a inversão de centro nesse ponto e raio R qualquer. Essa transformação, bem como a transformação anterior, preserva os ângulos entre as figuras, ou seja, existe uma circunferência ou reta com as propriedades citadas no enunciado do teorema após a transformação se, e somente se, existia antes dela.

Tendo em vista que C_4 está fora das outras circunferências, pois há tangentes externas comuns, aplica-se o teorema 4 em todas as tangentes comuns entre as circunferências Γ_1 , Γ_2 e Γ_3 . Os comprimentos antes e depois serão relacionados pela equação:

$$t_{ij} = t'_{ij} \cdot \sqrt{\frac{r_i \cdot r_j}{r'_i \cdot r'_j}}, \quad 1 \leq i, j \leq 3.$$

Já as tangentes que envolvem C_4 podem ser expressas usando semelhança de triângulos. Para isso, considere uma tangente C_4P_i a uma das circunferências Γ_i . Como a inversão preserva os ângulos, $C_4P'_i$ será tangente à circunferência Γ'_i . Considere a relação de semelhança dos triângulos $\triangle C_4P_iC_i \sim \triangle C_4P'_iK$, onde K é o centro da circunferência Γ'_i . Vale lembrar que K não é o inverso do centro de Γ_i .

Por definição de inversão, sabe-se que $C_4P_i \cdot C_4P'_i = R^2$, assim:

$$\frac{C_4P_i}{C_4P'_i} = \frac{C_iP_i}{KP_i} \Rightarrow \frac{t_{i4}^2}{R^2} = \frac{r_i}{r'_i}$$

e portanto $t_{i4} = R \sqrt{\frac{r_i}{r'_i}}$ para $1 \leq i \leq 3$. Por hipótese, sabemos que

$$t_{13} \cdot t_{24} = t_{12} \cdot t_{34} + t_{14} \cdot t_{23}.$$

Logo, substituindo essas equações na última equação, obtemos:

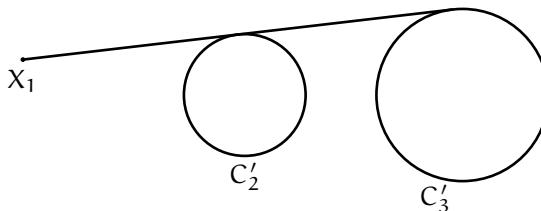
$$t'_{13} \sqrt{\frac{r_1 \cdot r_3}{r'_1 \cdot r'_3}} \cdot R \sqrt{\frac{r'_2}{r_2}} = t'_{12} \sqrt{\frac{r_1 \cdot r_2}{r'_1 \cdot r'_2}} \cdot R \sqrt{\frac{r'_3}{r_3}} + R \sqrt{\frac{r'_1}{r_1}} \cdot t'_{23} \sqrt{\frac{r_2 \cdot r_3}{r'_2 \cdot r'_3}}$$

e desta forma $t'_{13} = t'_{12} + t'_{23}$. Agora, tomemos novamente a circunferência de menor raio e a reduza a um ponto, diminuindo o mesmo comprimento no raio de todas as outras. Essa transformação não altera o comprimento das tangentes externas ou a existência de circunferência ou reta tangente comum às três.

Devemos considerar três casos, cada um tratando as situações em que um dos três raios r'_1 , r'_2 ou r'_3 é o menor dos três.

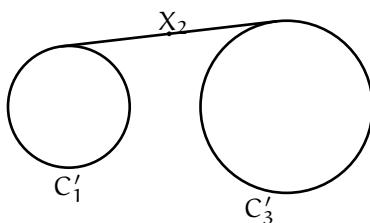
- Se o menor raio for r'_1 . Nesse caso, passaremos a ter em Γ'_1 apenas um ponto. Notemos que os pontos cujo comprimento da tangente em relação a uma certa circunferência é fixo estão sobre uma circunferência. Assim, para o ponto C'_1 satisfazer a equação ele será um dos pontos de interseção de duas circunferências de

centros nos centros de Γ'_2 e Γ'_3 e raios $\sqrt{r'_1{}^2 + t'_{12}{}^2}$ e $\sqrt{r'_3{}^2 + t'_{13}{}^2}$, respectivamente. Elas podem ter nenhum, um ou dois pontos em comum. Observemos que elas têm pelo menos um ponto em comum. Considere a tangente comum entre Γ'_2 e Γ'_3 , o comprimento é t'_{23} . Prolongue este segmento no sentido de Γ'_2 mais um comprimento de t'_{12} . Seja X_1 o ponto sobre este prolongamento tal que a distância de X_1 ao ponto de tangência com Γ'_2 é t'_{12} .



Os comprimentos dos segmentos desde X_1 até os pontos de tangência com Γ'_2 e Γ'_3 são iguais a t'_{12} e $t'_{12} + t'_{23} = t'_{13}$. Logo se houver apenas um ponto de interseção será $X_1 = C'_1$ e se houver dois pontos $X_1 = C'_1$ ou X_1 reflexão de C'_1 em relação à reta que passa pelos centros de Γ'_2 e Γ'_3 . Em qualquer dos casos possíveis, teremos as três circunferências tangentes a uma reta, do mesmo lado.

- Se o menor raio for r'_2 . Passaremos a ter um ponto Γ'_2 . Novamente, pelo argumento dos pontos onde o comprimento das tangentes é fixado, sabemos que podemos ter nenhum, um ou dois pontos com a propriedade citada para C'_2 . Para verificar que há pelo menos um, consideraremos a tangente externa Γ'_1 e Γ'_3 de comprimento t'_{13} e o ponto X_2 que a divide em pedaços t'_{12} e t'_{23} .



Assim, como feito anteriormente, teremos os casos em que $X_2 = C'_2$ e em que C'_2 é a reflexão de X_2 em relação à reta que passa pelos centros. Novamente, em qualquer dos casos possíveis, teremos as três circunferências tangentes a uma reta, do mesmo lado.

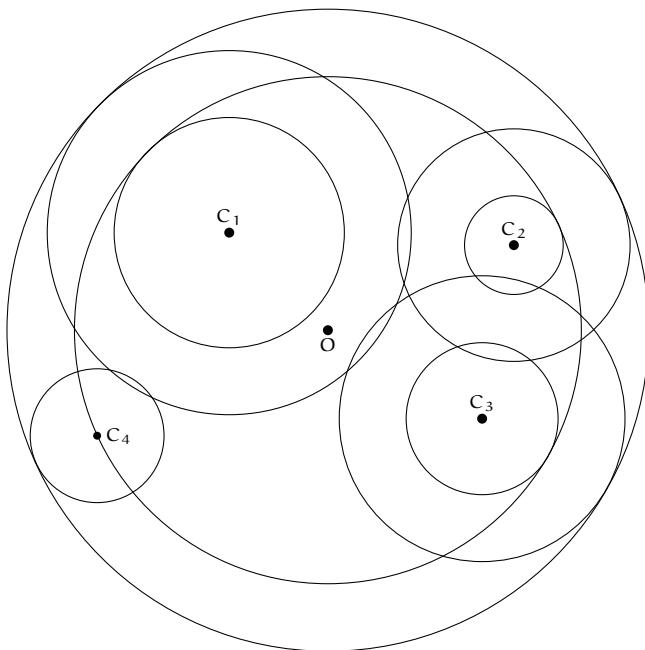
- Se o menor raio for r'_3 .

Completamente análogo ao primeiro caso.

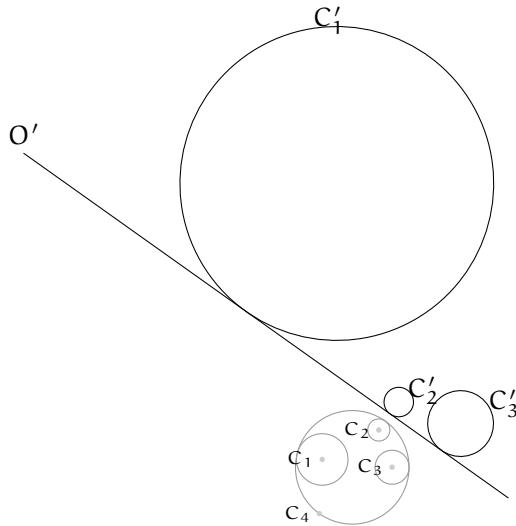
Com isso, concluímos que as três circunferências são tangentes a uma reta por um mesmo lado e, ainda mais, que o ponto de tangência de Γ'_2 está entre os pontos de tangência das outras duas circunferências. Logo, ao voltar as reduções de raio e a inversão conclui-se que no início as quatro circunferências eram todas tangentes internamente a uma circunferência ou tangentes externamente a uma circunferência ou tangentes a uma reta pelo mesmo lado. Isso depende da posição final relativa entre as circunferências, a reta e o ponto C'_4 . Sabe-se ainda que os pontos de tangência estão em sentido horário na ordem $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ e Γ_4 ou na ordem $\Gamma_1, \Gamma_4, \Gamma_3$ e Γ_2 , considerando as posições finais dos pontos de tangência.

Passemos agora a demonstrar a ida, isto é, mostraremos a relação entre os comprimentos das tangentes dado que existe uma circunferência tangente às 4 dadas. Demonstrações sem usar inversão podem ser encontradas em [2] e [4], mas aqui será apresentada uma outra demonstração usando as ferramentas desenvolvidas. Os casos em que as circunferências tangenciam a quinta circunferência internamente e que tangenciam externamente são análogos. Por isso será tratado com detalhes apenas o caso em que as circunferências tangenciam internamente e que tangenciam uma reta.

Novamente, suponha sem perda de generalidade que o raio r_4 é o menor dentre os raios e façamos o processo de redução citado na demonstração anterior. A circunferência Γ_4 passa a ser um ponto na circunferência \mathcal{O} , que por sua vez é tangente a todas as outras três.



Façamos uma inversão de centro C_4 e raio qualquer. A circunferência \mathcal{O} será levada em uma reta O' . As circunferências Γ_1 , Γ_2 e Γ_3 serão levadas em circunferências tangentes a \mathcal{O}' por mesmo lado, mais distante de C_4 se a tangência inicial for interna e mais próxima de C_4 se a tangência inicial era externa.



É imediato verificar que:

$$t'_{13} = t'_{12} + t'_{23}.$$

Como já vimos na demonstração da volta, isso é equivalente à equação:

$$t_{13} \cdot t_{24} = t_{12} \cdot t_{34} + t_{14} \cdot t_{23}.$$

Caso seja uma reta com a tangência do mesmo lado e estando os pontos de tangência na ordem Γ_1 , Γ_2 , Γ_3 e Γ_4 , teremos:

$$\begin{aligned} t_{13} \cdot t_{24} &= (t_{12} + t_{23}) \cdot (t_{23} + t_{34}) = t_{12} \cdot t_{23} + t_{12} \cdot t_{34} + t_{23}^2 + t_{23} \cdot t_{34} = \\ &= t_{12} \cdot t_{34} + (t_{12} + t_{23} + t_{34}) \cdot t_{23} = t_{12} \cdot t_{34} + t_{14} \cdot t_{23} \end{aligned}$$

Assim, concluímos a demonstração da ida e da volta. □
□

O anterior mostra a forma do Teorema de Casey enunciada no Teorema 1. A forma geral para circunferências é enunciada a seguir como o Teorema 5.

Teorema 6 (Teorema de Casey - forma geral). *Considere quatro circunferências Γ_1 , Γ_2 , Γ_3 e Γ_4 tangentes a uma circunferência K , com todas contendo completamente K ou todas contidas completamente em K . Seja T_{ij} o comprimento da tangente comum externa*

entre as circunferências Γ_i e Γ_j se eles tiverem mesmo tipo de tangência em relação a K , ambas internas ou ambas externas, e da tangente comum interna se tiverem tangências diferentes, uma interna e outra externa. Então considerando $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ e Γ_4 em sentido horário, tem-se:

$$T_{13} \cdot T_{24} = T_{12} \cdot T_{34} + T_{14} \cdot T_{23}.$$

Reciprocamente, se certas tangentes comuns entre quatro circunferências $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ e Γ_4 satisfazem a equação

$$T_{12} \cdot T_{34} \pm T_{13} \cdot T_{24} \pm T_{14} \cdot T_{23} = 0,$$

com alguma combinação de sinais, então essas circunferências são tangentes a uma circunferência K seguindo uma das seguintes possibilidades:

- Se todas as tangentes são externas, então todas têm mesma tangência em relação a K , todas internamente ou todas externamente.
- Se todas as tangentes em relação a uma circunferência são internas e todas as outras são externas, então esta possui tangência diferente das outras três.
- Se as circunferências podem ser pareadas de modo que dentro do par usa-se tangentes externas e entre pares diferentes tangentes internas, então as duas circunferências de cada par tem tangência do mesmo tipo e diferente da tangência do outro par.

Observe que a volta do teorema de Casey não considera todas as possibilidades de tomar tangentes. Os casos abordados pela volta são os mesmos casos possíveis da ida. Deve ser possível caracterizar quais circunferências tem um mesmo tipo de tangência e quais circunferências tem o outro tipo. Lembrando que há apenas dois tipos possíveis, tangenciar internamente ou tangenciar externamente.

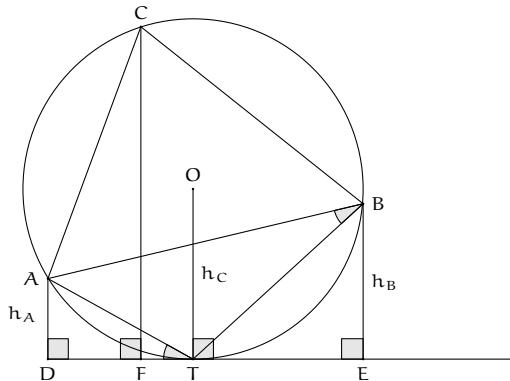
Exemplo 17 (IMO/2011). *Seja ABC um triângulo acutângulo com círculo circunscrito Γ . Sejam l uma tangente a Γ e l_A, l_B e l_C as retas obtidas pelas reflexões de l em relação às retas BC, CA e AB, respectivamente. Mostre que o círculo circunscrito ao triângulo determinado pelas retas l_A, l_B e l_C é tangente ao círculo Γ .*

Solução. Vamos começar com um lema:

Lema 10. *Dado um triângulo ABC e uma tangente ao seu circuncírculo passando por um ponto T no arco AB que não contém C, seja h_x o comprimento da perpendicular pelo vértice X à tangente dada, então:*

$$\sqrt{h_A} \cdot \sin \angle A + \sqrt{h_B} \cdot \sin \angle B = \sqrt{h_C} \cdot \sin \angle C.$$

Demonstração. Considere a figura referente ao lema. Seja R o circunraio do triângulo ABC



Usando o Teorema de Ptolomeu, que pode ser visto como Teorema de Casey onde cada ponto pode ser visto como uma circunferência degenerada de raio 0, teremos:

$$\begin{aligned} CT \cdot AB &= AT \cdot BC + BT \cdot AC \Rightarrow \\ CT \cdot 2R \cdot \sin \angle C &= AT \cdot 2R \cdot \sin \angle A + BT \cdot 2R \cdot \sin \angle B \Rightarrow \\ CT \cdot \sin \angle C &= AT \cdot \sin \angle A + BT \cdot \sin \angle B. \end{aligned}$$

Sabendo que: $\angle ABT = \angle ATD = \alpha$ (inscrito e semi-inscrito no arco AT). Teremos:

$$\frac{h_A}{\sin \alpha} = AT = 2R \cdot \sin \alpha \Rightarrow AT^2 = 2Rh_A \Rightarrow AT = \sqrt{2Rh_A}.$$

Analogamente, $BT = \sqrt{2Rh_b}$ e $CT = \sqrt{2Rh_c}$. Substituindo estas três na equação, teremos:

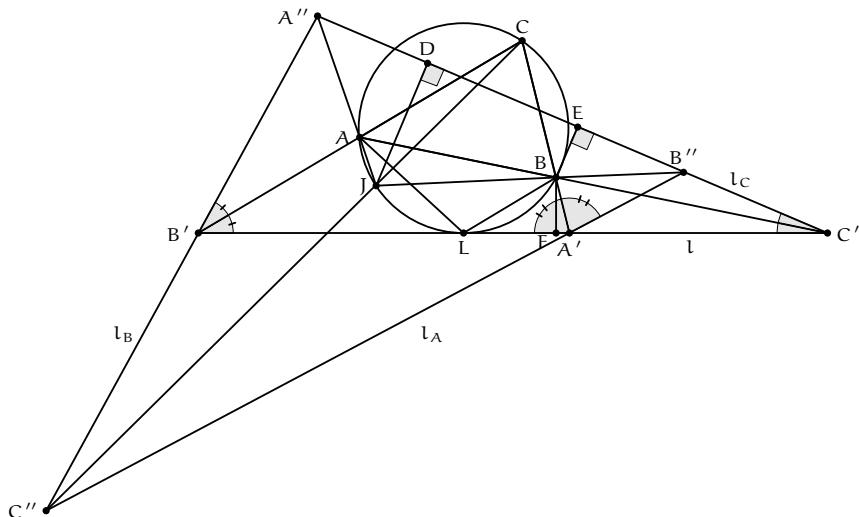
$$\begin{aligned} CT \cdot \sin \angle C &= AT \cdot \sin \angle A + BT \cdot \sin \angle B \\ \sqrt{2Rh_c} \cdot \sin \angle C &= \sqrt{2Rh_A} \cdot \sin \angle A + \sqrt{2Rh_B} \cdot \sin \angle B \\ \sqrt{h_c} \cdot \sin \angle C &= \sqrt{h_A} \cdot \sin \angle A + \sqrt{h_B} \cdot \sin \angle B \end{aligned}$$

□

Agora voltemos para o problema. Defina os seguintes pontos:

$$\begin{aligned} A' &= l_A \cap l, \quad B' = l_B \cap l \text{ e } l_c \cap l \\ A'' &= l_B \cap l_C, \quad B'' = l_A \cap l_C \text{ e } C'' = l_A \cap l_B. \end{aligned}$$

Devido à construção, A' está sobre a reta BC , B' está sobre a reta AC e C' está sobre a reta AB , pois a reflexão destes pontos em relação aos respectivos lados serão eles mesmos.



Vejamos que:

$$\begin{aligned}
 \angle A''C''B'' &= \angle A'C''B' = \angle A''B'A' - \angle B'A'C'' \quad (\text{ângulo externo}) \\
 &= 2 \cdot \angle CB'A' - (180^\circ - 2 \cdot \angle CA'B') \quad (\text{ângulos das reflexões de } l) \\
 &= 2 \cdot (\angle CB'A' + \angle CA'B') - 180^\circ \\
 &= 2 \cdot (180^\circ - \angle C) - 180^\circ \\
 &= 180^\circ - 2\angle C
 \end{aligned}$$

segue que $\angle A''C''B'' = 180^\circ - 2\angle C$. Analogamente, os outros ângulos são dados por:

$$\angle A''B''C'' = 180^\circ - 2\angle B \text{ e } \angle B''A''C'' = 180^\circ - 2\angle A.$$

No triângulo $A'B'C'$, como $A'B$ é bissetriz externa e $C'B$ é bissetriz interna, B é o exincentro relativo a C' . Logo, $B''B$ é bissetriz externa do $\triangle A'B''C'$ implicando que $B''B$ é a bissetriz interna do $\triangle A'B''C'$. Por analogia, temos que $A''A$ e $C''C$ também são bissetrizes internas do $\triangle A''B''C''$. Essas três bissetrizes concorrem em um ponto J que é o incentro do $\triangle A''B''C''$. Observemos que:

$$\begin{aligned}
 \angle BJA &= \angle B''JA'' = 180^\circ - \frac{1}{2}\angle C''B''A'' - \frac{1}{2}\angle C''A''B'' \\
 &= 180^\circ - \frac{1}{2}(180^\circ - 2\angle B) - \frac{1}{2}(180^\circ - 2\angle A) \\
 &= \angle A + \angle B = 180^\circ - \angle C.
 \end{aligned}$$

Logo, $ABCJ$ é inscritível e J está em Γ .

Seja JD a perpendicular a $B''A''$ por J e $r := JD$, o inraio do triângulo $A''B''C''$. Sejam BE e BF perpendiculares por B às retas l_c e l , respectivamente. Como $C'B$ é bissetriz, temos $BE = BF = h_B$, definida como no lema 1, usando como tangente a reta l .

Para um ponto X fora da circunferência Γ , defina $T(X)$ o comprimento da tangente por X à circunferência Γ .

Calculando a potência do ponto B'' em relação a Γ :

$$T(B'')^2 = B''B \cdot B''J \Rightarrow T(B'') = \sqrt{\frac{BE}{\sin(90^\circ - \angle B)} \cdot \frac{JD}{\sin(90^\circ - \angle B)}},$$

portanto

$$T(B'') = \sqrt{\frac{h_B}{\cos \angle B} \cdot \frac{r}{\cos \angle B}} = \frac{\sqrt{h_B \cdot r}}{\cos \angle B}$$

Seja R'' o circunraio do $\triangle A''B''C''$, então, usando lei dos senos:

$$\begin{aligned} A''C'' &= 2R'' \cdot \sin \angle A''B''C'' \\ &= 2R'' \cdot \sin(180^\circ - 2\angle B) \\ &= 2R'' \cdot \sin 2\angle B \\ &= 4R'' \cdot \sin \angle B \cdot \cos \angle B. \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} T(B'') \cdot A''C'' &= \frac{\sqrt{h_C \cdot r}}{\cos \angle B} \cdot 4R'' \cdot \sin \angle B \cdot \cos \angle B \\ &= 4R'' \sqrt{r} \cdot \sqrt{h_C} \sin \angle B. \end{aligned}$$

Analogamente, teremos os produtos:

$$\begin{aligned} T(C'') \cdot A''B'' &= 4R'' \sqrt{r} \cdot \sqrt{h_C} \sin \angle C \\ T(A'') \cdot B''C' &= 4R'' \sqrt{r} \cdot \sqrt{h_A} \sin \angle A. \end{aligned}$$

Agora temos ferramentas suficientes para aplicar o teorema de Casey. Considere as circunferências, dadas pelos centros e raios, $C_1(0, R) = \Gamma$, $C_2(B'', 0)$, $C_3(C'', 0)$ e $C_4(A'', 0)$. Vejamos se a relação das tangentes é satisfeita, isto é, queremos verificar se $T_{13} \cdot T_{24} = T_{12} \cdot T_{34} + T_{14} \cdot T_{23}$. Para isso, vejamos que

$$T_{13} \cdot T_{24} = T(C'') \cdot A''B'' = 4R'' \sqrt{r} \cdot \sqrt{h_C} \sin \angle C.$$

De igual forma, $T_{12} \cdot T_{34} = T(B'') \cdot A''C'' = \sqrt{h_B} \cdot \sin \angle B$ e $T_{14} \cdot T_{23} = T(A'') \cdot B''C'' = 4R'' \sqrt{r} \cdot \sqrt{h_A} \sin \angle A$. Logo,

$$\begin{aligned} T_{12} \cdot T_{34} + T_{14} \cdot T_{23} &= 4R'' \sqrt{r} \left(\sqrt{h_B} \sin \angle B + \sqrt{h_A} \sin \angle A \right) \\ &= 4R'' \sqrt{r} \left(\sqrt{h_C} \sin \angle C \right) \\ &= T_{13} \cdot T_{24}. \end{aligned}$$

Finalmente, pela recíproca do Teorema de Casey, existe uma circunferência K tangente a estas quatro circunferências. Mas como C_2 , C_3 e C_4 são pontos, esta circunferência K é o círculo circunscrito ao $\triangle A''B''C''$. Sendo assim, o círculo circunscrito ao $\triangle A''B''C''$ tangencia Γ . ■

Problemas propostos

1. (OBM/1996) Seja ABC um triângulo equilátero inscrito em uma circunferência Γ_1 ; Γ_2 é uma circunferência tangente ao lado BC e ao menor arco BC de Γ_1 . Uma reta através de A tangencia Γ_2 em P . Prove que $AP = BC$.
2. (Teorema de Feuerbach, 1822) Sejam D, E e F os pontos médios dos lados BC, CA e AB do $\triangle ABC$, respectivamente.
 - (a) Prove que o círculo S inscrito no $\triangle ABC$ é tangente ao círculo N circunscrito ao $\triangle DEF$. Vale lembrar que este último é o círculo dos nove pontos do $\triangle ABC$.
 - (b) Prove que o círculo exinscrito relativo ao lado BC também é tangente a N .
3. Seja ABC um triângulo com incentro I e cujo círculo circunscrito é Γ_1 . D é um ponto arbitrário sobre o lado BC . Γ_2 é uma circunferência tangente aos segmentos AD e DC , em E e F , respectivamente, e ao arco AC de Γ_1 . Prove que E, F e I são colineares.
4. Seja Γ uma semicircunferência com diâmetro AB e centro O . Uma reta perpendicular a AB pelo ponto $E \in OB$ intercepta Γ no ponto D . Uma circunferência, que é tangente a DE e EF nos pontos K e C , respectivamente, é tangente ao arco AB no ponto F . Prove que $\angle EDC = \angle BDC$.
5. As circunferências Ω_1 e Ω_2 tangenciam-se externamente no ponto I e ambas tangenciam internamente uma terceira circunferência Ω . Uma tangente externa comum às duas primeiras corta a terceira em dois pontos B e C . Uma tangente às duas por I corta Ω num ponto A do mesmo de BC que o ponto I . Mostre que I é o incentro do triângulo ABC .
6. (Problema de Thébault, 1938) Seja D um ponto sobre o lado AB do triângulo ABC . A circunferência $k_1(O_1, r_1)$ é tangente interiormente à circunferência k circunscrita ao ABC , é tangente a AD em M e é tangente a CD . A circunferência $k_2(O_2, r_2)$ é tangente a k , é tangente a DB no ponto N e é tangente a CD . Seja r o inraio do triângulo ABC e o ângulo $\angle ADC = \alpha$. Demonstrar que:

$$r = r_1 \cdot \cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) + r_2 \cdot \sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right).$$
7. (Romênia TST/2006) Seja ABC um triângulo acutângulo, com $AB \neq AC$. Sejam D o pé da perpendicular por A e ω o círculo circunscrito ao $\triangle ABC$. Seja ω_1 o círculo tangente a ω e aos segmentos BD e AD . Seja ω_2 o círculo tangente a ω e aos segmentos CD e AD . Seja l a tangente interior de ω_1 e ω_2 diferente de AD . Prove que l passa pelo ponto médio de BC se, e somente se, $2BC = AB + AC$.

8. (Hong Kong/2009) Seja o $\triangle ABC$ um triângulo retângulo com $\angle C = 90^\circ$. Seja CD a altura relativa a C , com D sobre o lado AB . Seja w o círculo circunscrito ao $\triangle BCD$. Seja v o círculo dentro do $\triangle ACD$, tangente aos segmentos AD e AC nos pontos M e N , respectivamente, e que também é tangente ao círculo w .
- Mostre que $BD \cdot CN + BC \cdot DM = CD \cdot BM$.
 - Mostre que $BM = BC$.
9. (Banco IMO/1993) Considere um triângulo ABC , de incentro I , e cujo círculo circunscrito denota-se por Γ_1 ; Γ_2 é uma circunferência tangente aos lados CA e CB nos pontos D e E , respectivamente, e ao arco AB de Γ_1 . Prove que I é o ponto médio do segmento DE .
10. (Banco IMO/2000) Sejam D , E e F pontos sobre os lados BC , CA e AB , respectivamente, do triângulo ABC tais que o triângulo DEF seja equilátero. Uma circunferência Γ tangencia a circunferência circunscrita ao triângulo DEF , externamente, e os segmentos CD e CE nos pontos L , M e N , respectivamente. Se P é um ponto sobre Γ tal que FP é tangente a Γ , mostre que $FP = DM + EN$.

Referências Bibliográficas

- [1] Bellot Rosado, Francisco, *Los Teoremas de Ptolomeo y su generalización por Casey.* Aplicaciones, Revista Escolar de la OIM, 2002.
- [2] Campos, Onofre, *O Teorema de Casey Uma generalização do Teorema de Ptolomeu para quadriláteros inscritíveis,* VIII Semana Olímpica, 2005.
- [3] Johnson, Roger A., *Advanced Euclidean Geometry,* Dover Pub., 1960.
- [4] Li, Kin Y., *Caseys Theorem, Mathematical Excalibur,* **16**, n.5, 2012, 1-4.

Artigo: Pontos que se movem!

- Nível avançado

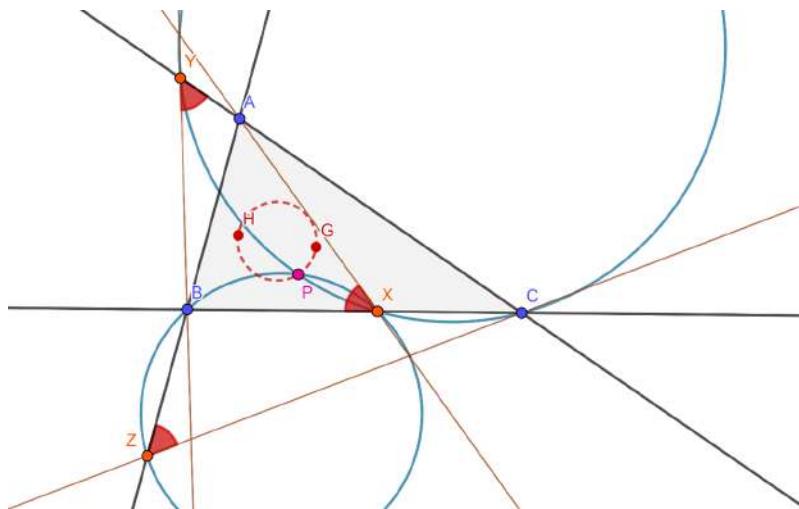
Jonathas David de Lima Santos
Mairiporã - SP
Régis Prado Barbosa
Cólegio Etapa - São Paulo.

Introdução

Para motivar os resultados que vamos apresentar neste artigo, inicialmente vamos apresentar um problema olímpico de geometria. Ao final vamos mostrar como as ideias e ferramentas apresentadas neste artigo podem ser utilizadas para resolvê-lo.

Problema Inicial (problema 6 da OBM 2015 N3)

Seja ABC um triângulo escaleno e X , Y e Z pontos sobre as retas BC , CA , AB , respectivamente, tais que $\angle AXB = \angle BYC = \angle CZA$. Os circuncírculos de BXZ e CXY se cortam em $P \neq X$. Prove que P está sobre a circunferência cujo diâmetro tem extremidades no ortocentro (ponto de encontro das alturas) H e no baricentro (ponto de encontro das medianas) G de ABC .



A método de resolução Pontos que se movem (ou "Moving Points"em inglês) é uma técnica para resolver problemas de geometria. A ideia básica é que a partir de um resultado para três pontos em certo conjunto e algumas considerações podemos generalizar o resultado para todos do conjunto. Essa ferramenta utiliza principalmente conceitos e ferramentas da Geometria Projetiva como a razão cruzada e as transformações projetivas no plano.

Vamos apresentar essas ferramentas necessárias de Geometria Projetiva, enunciar o teorema principal deste artigo e aplicar nas resoluções de alguns problemas, incluindo o problema inicial apresentado no começo desse material. Nesse artigo estamos abordando o Pontos que se movem de maneira parcial, para ter acesso ao conteúdo completo desta técnica o leitor consulte [01], que é a maior motivação deste texto. Caso o leitor busque mais materiais de geometria para olimpíadas de matemática ou deseje se aprofundar nas ferramentas de Geometria Projetiva apresentadas recomendamos que procure [02].

Plano projetivo

Uma **classe de retas** retrata uma direção no Plano Euclidiano, assim duas retas são da mesma classe se, e somente se, elas são paralelas. O **Plano Projetivo** é obtido a partir do Plano Euclidiano adicionando-se para cada classe de retas um **ponto do infinito** (ou **ponto impróprio**) que pertence a todas as retas daquela classe e uma **reta do infinito** (ou **reta imprópria**) que é composta por todos os pontos do infinito.

No Plano Projetivo, podemos considerar que para quaisquer duas retas distintas no plano, existe um ponto de interseção entre elas, mesmo se as retas forem paralelas. O ponto do infinito sobre da reta r será denotado por ∞_r .

Razão Cruzada

Considere quatro pontos colineares A, B, C e D. Definimos a **razão cruzada** desta quádrupla como:

$$(A, B; C, D) = \frac{CA}{CB} \div \frac{DA}{DB}$$

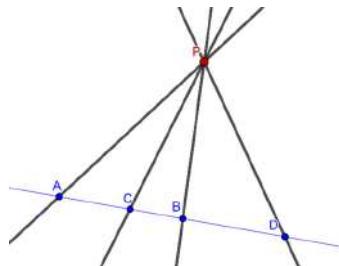
É importante destacar que utilizamos segmentos orientados como se fossem vetores. Isto significa que se um sentido é positivo, então o oposto é negativo e para quaisquer pontos X e Y temos

$$YX = -XY$$

Vale destacar também que algum desses pontos pode ser um ponto no infinito. Nesse caso de maneira simplificada consideramos infinito sobre infinito em módulo igual a 1.

Também podemos definir a razão cruzada para quatro retas PA , PB , PC e PD concorrentes no ponto P utilizando senos de ângulos orientados.

$$P(A, B; C, D) = (PA, PB; PC, PD) = \frac{\sin(\angle CPA)}{\sin(\angle CPB)} \div \frac{\sin(\angle DPA)}{\sin(\angle DPB)}$$

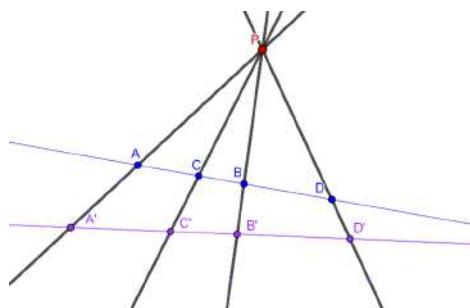


Teorema 7 (Razão cruzada sob perspectiva). $P(A, B; C, D)$ é um feixe de retas e A, B, C e D colineares. Então

$$P(A, B; C, D) = (A, B; C, D)$$

Demonstração: Bastar usar Lei dos senos nos triângulos CPA , CPB , DPA e DPB e cancelar os termos iguais. ■

Considere pontos A' , B' , C' e D' colineares tais que estão sobre as retas PA , PB , PC e PD , respectivamente.



Pelo (7) temos as seguintes igualdades:

$$(A, B; C, D) = P(A, B; C, D) = P(A', B'; C', D') = (A', B'; C', D')$$

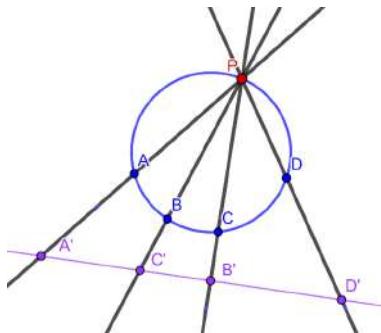
Denotamos esse resultado como **perspectiva** em P . Nota-se que a razão cruzada não varia com as transformações perspectivas.

Teorema 8 (Razão cruzada num quadrilátero cíclico). *Sejam A, B, C e D pontos numa circunferência, e seja P um ponto qualquer nessa circunferência. Então $P(A, B; C, D)$ é constante. Dessa forma, podemos escrever $(A, B; C, D) = P(A, B; C, D)$.*

Demonstração: Os ângulos $\angle CPA$, $\angle CPB$, $\angle DPA$ e $\angle DPB$ não dependem do ponto P. Usando a interpretação de razão cruzada usando os senos, $P(A, B; C, D)$ não depende de P. ■

Podemos fazer a projeção dos pontos de uma circunferência sobre uma reta usando o ponto P:

$$(A, B; C, D) = P(A, B; C, D) = P(A', B'; C', D') = (A', B'; C', D')$$



Denotamos de maneira análoga a perspectiva em P por.

$$(A, B; C, D) = (A', B'; C', D')$$

Pontos que se movem

A ferramenta principal deste artigo será baseada na definição e no teorema a seguir.

Definição: Seja \mathfrak{I} o conjunto dos objetos onde a razão cruzada é definida como retas, cônicas e feixes de retas. Sejam $C_1, C_2 \in \mathfrak{I}$, a função $f : C_1 \rightarrow C_2$ é uma **transformação projetiva** se preserva a razão cruzada, isto é, se para quaisquer pontos $A, B, C, D \in C_1$ vale

$$(A, B; C, D) = (f(A), f(B); f(C), f(D))$$

Existe uma grande variedade de transformações projetivas no plano dentre as mais frequentes temos:

- Dados uma reta l , um ponto P e o feixe de retas que passam por P (C_P). A transformação de l para C_P que leva cada ponto X na reta l para o ponto XP . Notação: $X \mapsto PX$.

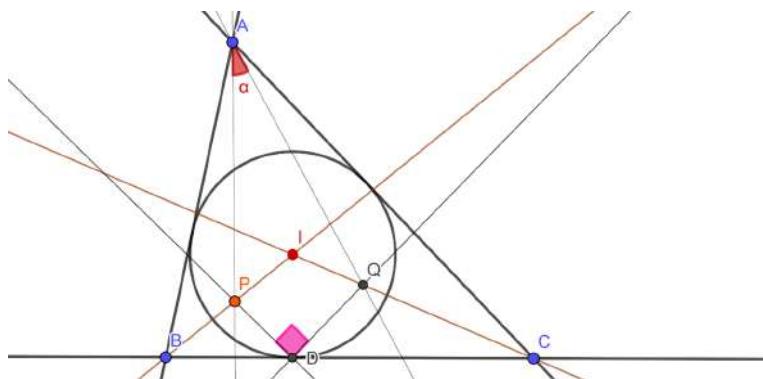
- Dado uma cônica γ e um ponto $P \in \gamma$. A transformação de γ para C_P dada por $X \mapsto PX$.
- Para qualquer ponto P . A transformação de γ para γ dada por $X \mapsto Y$ com $Y \in PX \cap \gamma$ e $Y \neq X$.
- Inversão em relação a uma circunferência.

Teorema 9 (Pontos que se movem). *Sejam $f : C_1 \rightarrow C_2$ e $g : C_1 \rightarrow C_2$ duas transformações projetivas. Vale a equivalência $f \equiv g$ se, e somente se, $f(A_i) = g(A_i)$ para três elementos (geralmente pontos) distintos A_1, A_2 e A_3 de C_1 .*

Demonstração: A ida do teorema é imediata. Vamos provar somente a volta. Considere três elementos distintos $A_1, A_2, A_3 \in C_1$ com $f(A_i) = g(A_i) = B_i$.

Para qualquer ponto $A \in C_1 \setminus (A_1, A_2, A_3)$ existe um único ponto $B \in C_2$ tal que $(A_1, A_2; A_3, A) = (B_1, B_2; B_3, B)$. Como as transformações são projetivas podemos concluir que $f(A) = g(A) = B$. ■

Exemplo 18 (Olimpíada Nacional da Sérvia 2018). *Seja ABC um triângulo com incentro I . Os pontos P e Q são escolhidos nos segmentos BI e CI tal que $\angle BAC = 2\angle PAQ$. Se D é o ponto de interseção do incírculo com o lado BC do triângulo ABC , prove que $\angle PDQ = 90^\circ$.*



Solução. Seja $\angle BAC = 2\alpha$. Considere a transformação $f : BI \rightarrow CI$ que leva cada ponto $P \in BI$ para o ponto $Q \in CI$ tal que $\angle PAQ = \alpha$. Veja que $AP \mapsto AQ$ é uma rotação de ângulo fixo α e é uma transformação projetiva, pois conserva a razão cruzada. Assim, $P \mapsto AP \mapsto AQ \mapsto Q$ é uma transformação projetiva. De maneira similar, definimos $g : BI \rightarrow CI$ de modo que $g(P) = Y$ tal que $\angle PDY = 90^\circ$. Essa transformação também é projetiva.

Pelo Teorema 9, basta provar que $f = g$ para três pontos distintos P e o resultado segue.

- Se $P = B$, então $f(B) = g(B) = I$.
- Se $P = I$, então $f(I) = g(I) = C$.
- Se P e Q são os incentros dos triângulos ABD e ACD , respectivamente, então $f(P) = g(P) = Q$ pois

$$\angle PAQ = \angle PAI + \angle IAQ = \frac{\angle BAI}{2} + \frac{\angle IAC}{2} = \frac{\angle BAC}{2} = \alpha$$

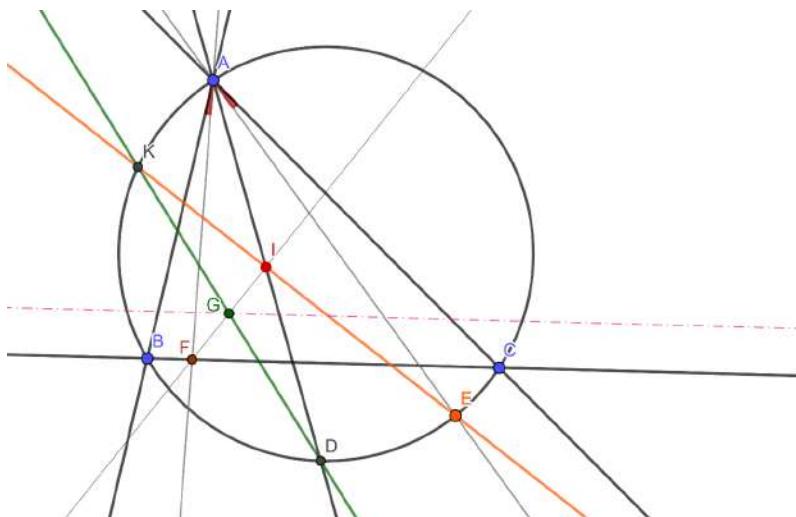
$$\angle PDQ = \angle PDI + \angle IDQ = \frac{\angle BDI}{2} + \frac{\angle IDC}{2} = 90^\circ$$

■

Exemplo 19 (IMO 2010). *Seja ABC um triângulo, I o seu incentro e Γ a sua circunferência circunscrita. A reta AI intersecta novamente Γ no ponto D. Sejam E um ponto no arco BDC e F um ponto do lado BC tais que*

$$\angle BAF = \angle CAE < \frac{1}{2}\angle BAC$$

Seja G o ponto médio do segmento IF. Mostre que as retas DG e EI se intersectam sobre Γ .



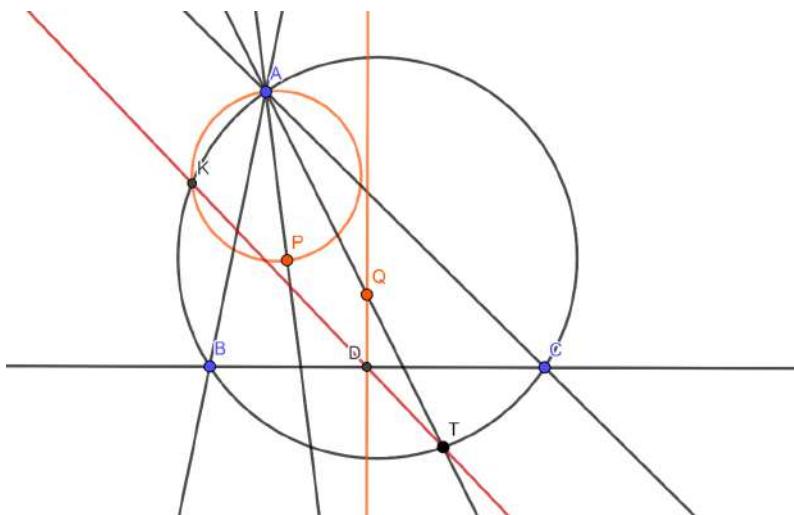
Solução. Vamos considerar que o ponto E pode se mover no arco BDC sem a restrição sobre ser menor que metade do ângulo A. Sejam $K_1 \in EI \cap \Gamma$ e $K_2 \in DG \cap \Gamma$, com $K_1 \neq E$ e $K_2 \neq D$, basta provarmos que $K_1 = K_2$. A transformação $f : E \rightarrow K_1$ é projetiva, pela simples projeção de Γ para si mesmo por I.

Observe que $E \mapsto AE \mapsto AF \mapsto F$ é uma transformação projetiva já que $AE \mapsto AF$ é uma reflexão em relação à bissetriz interna AD e preserva a razão cruzada. O ponto G é resultado de uma homotetia de centro I e razão $\frac{1}{2}$ e, como $D \in \Gamma$, o K_2 é resultado de uma projeção sobre Γ . A transformação $F \mapsto G \mapsto K_2$ é projetiva. Assim, $g : E \rightarrow K_2$ dada por $E \mapsto AE \mapsto AF \mapsto F \mapsto G \mapsto K_2$ é uma transformação projetiva.

Portanto, basta mostrar que $f = g$ para três pontos distintos E.

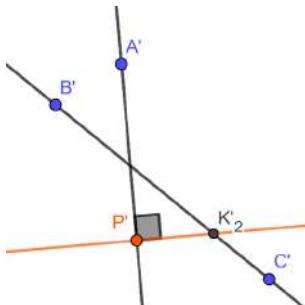
- Se $E = C$, temos que $F = B$ e K_1 é o ponto médio do arco AB. É bastante conhecido em olimpíadas de matemática que $DI = DB$ e $K_1I = K_1B$ então DK_1 é mediatrix BI, logo $G \in DK_1$. Logo $K_1 = K_2$.
- Se $E = B$, é análogo ao caso anterior.
- Se $E = D$, temos que $\{F\} = AD \cap BC$ e $K_1 = A$ então $G \in AD$. Nesse caso, temos $K_1 = K_2 = A$.

Exemplo 20. Sejam P e Q conjugados isogonais no triângulo ABC. Ponto D é a projeção ortogonal de Q em BC. A circunferência de diâmetro PA e a reta AQ intersectam o circuncírculo de ABC em K $\neq A$ e em T $\neq A$, respectivamente. Prove que os pontos K, D e T são colineares.



Solução. Vamos fixar o ponto T e mover Q sobre a reta AT . Note que P se move sobre uma reta fixa r . Vamos considerar duas transformações $f: Q \rightarrow K_1$ e $g: Q \rightarrow K_2$, onde $K_1 \in TD \cap (ABC)$ e $K_2 \in (PA) \cap (ABC)$ diferentes de T e A . Podemos notar que $Q \mapsto D \mapsto TD \mapsto K_1$ é uma transformação projetiva usando projeções.

Vamos usar a inversão para mostrar que $P \mapsto K_2$ é uma transformação projetiva. Considere a inversão de centro A . Cada ponto $X \neq A$ é levado em X' . A inversão leva r em r . A imagem de (ABC) é a reta $B'C'$. A circunferência de diâmetro AP é levada na reta perpendicular a r por P' .



A transformação $P' \mapsto K'_2$ é projetiva, já que P' se move sobre r que é fixa. Como a inversão preserva a razão cruzada, $P \mapsto P' \mapsto K'_2 \mapsto K_2$ é uma transformação projetiva.

Vamos dar três posições do ponto Q e o leitor pode verificar que $K_1 = K_2$ em cada caso.

- $Q = T$.
- $Q = \infty_{AT}$.
- $Q = BC \cap AT$.

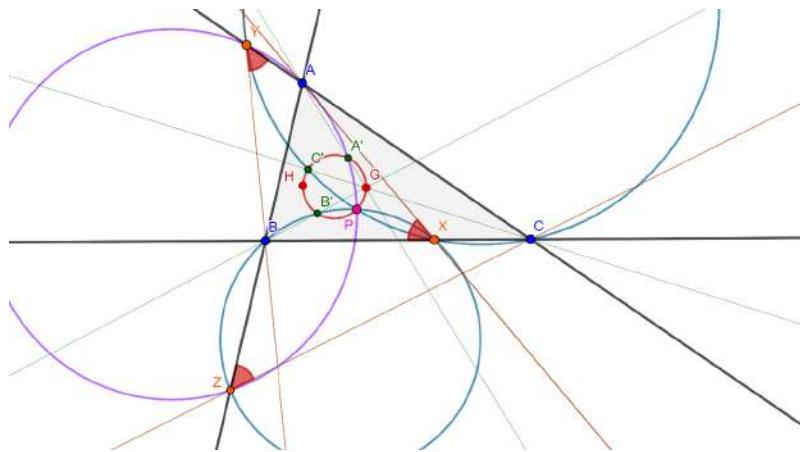
■

Resolução do Problema Inicial

A circunferência com diâmetro HG será denotada por (HG) . Defina A' como a segunda interseção de AG e (HG) . Defina B' e C' de maneira análoga. Esses são os HM points (ou Humpty points) e usaremos algumas propriedades desses pontos. Para se familiarizar com elas o leitor pode estudar em [03].

Afirmiação: $A' \in (AYZ)$.

Vamos considerar duas transformações $Y \mapsto Z$ e $Y \mapsto Z'$, com $Z' \in (AYA') \cap AB$ diferente de A . Veremos que elas são projetivas.



- Veja que a circunferência (ZBC) é reflexão de (YBC) em relação a BC . Sendo Y' a reflexão de Y , os pontos C, B, Z e Y' são concílicos usando o ângulo fixo dado e a reta ZY' tem direção fixa, já que $\angle CY'Z = \angle CBA$ que é fixo (ou o suplementar deste ângulo dependendo da configuração). Dessa forma, $Y \mapsto Y' \mapsto Z$ preserva razão cruzada.
- A reta $A'Z'$ é uma rotação de $A'Y$ em relação a A' com ângulo $\angle YAZ' = 180^\circ - \angle BAC$ fixo. Assim $Y \mapsto A'Y \mapsto A'Z' \mapsto Z'$ preserva razão cruzada.

Pelo Teorema 9, basta verificar que a transformação é igual para três posições do ponto Y . O ponto A' está na circunferência de diâmetro AH e nas circunferências por A tangentes a BC em B e C .

- $BY \perp AC$. Nesse caso BY e CZ são alturas, (AYA') tem diâmetro AH e $Z' = Z$.
- $\angle BYC = \angle B$. A circunferência (AYA') tangencia BC em B e $Z = Z' = B$.
- $\angle BYC = 180^\circ - \angle C$. Análogo ao caso anterior.

Analogamente, vale a afirmação para B' e C' . Considere as duas transformações $f : X \rightarrow P'$, com $P' \in (BB'X) \cap (HG)$ e $P' \neq B'$, e $g : X \rightarrow P''$, com $P'' \in (CC'Y) \cap (HG)$ e $P'' \neq C'$, dada por $X \mapsto Y \mapsto P''$. Elas preservam razão cruzada. Para P' , seja R o segundo ponto de interseção de XP' com (HG) . Temos $\angle RP'B' = 180^\circ - \angle XP'B' = \angle XBB'$ é fixo. O ponto R é fixo e as transformações são projeções centradas em R . Para P'' é análogo. Basta provarmos que $f = g$ e teremos $P' = P''$. Para isso, basta considerar três posições para o ponto X .

- $AX \perp BC$. Temos $P' = P'' = H$.

- $X \in (BB'C') \cap BC$. Temos $P' = P'' = C'$.
- $X \in (BB'A') \cap BC$. Temos $P' = P'' = A'$.

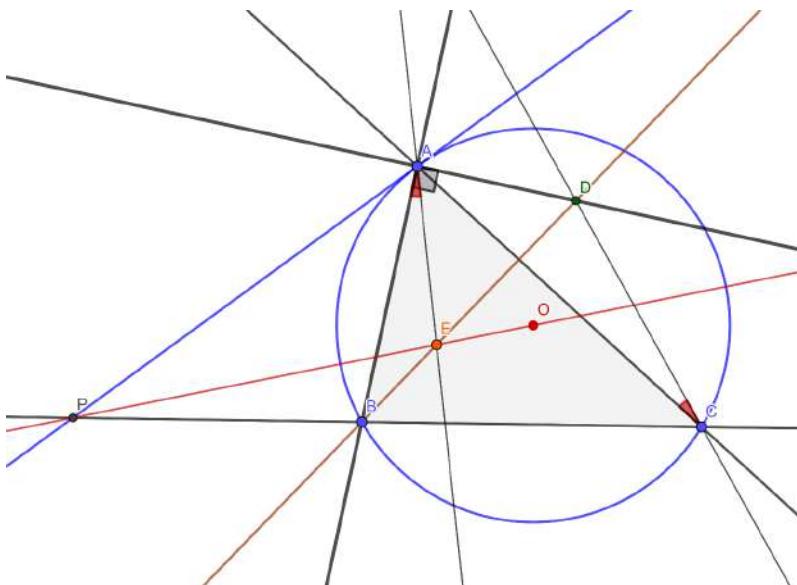
Mais alguns problemas interessantes

1. Seja ABC um triângulo com circuncírculo (O) . A tangente de (O) em A intersecta a reta BC em P . O ponto E é um ponto arbitrário sobre a reta PO e D está na reta BE de modo que $AD \perp AB$. Prove que $\angle EAB = \angle ACD$ (considere ângulos orientados ou de maneira simples que são iguais ou somam 180°).
2. Seja triângulo ABC com circuncírculo (O) e incírculo (I) . X é um ponto arbitrário em BC . A reta que passa por I perpendicular a IX intersecta a segunda reta tangente de (I) paralela a BC em Y . $AY \cap (O) = Z \neq A$. T é o ponto de tangencia entre A -incírculo mixtilinear e (O) . Prove que X, Z e T são colineares. Para mais informações sobre círculos mixtilineares o leitor por consultar [02].
3. Seja AB um diâmetro da circunferência ω . l é a reta tangente de ω em B . Tome dois pontos C e D em l tal que B está entre C e D , respectivamente. Os pontos E e F são os segundos pontos de interseção de AC e AD com ω . Os pontos H e G são os segundos pontos de interseção de CF e DE com ω , respectivamente. Prove que $AH = AG$.
4. Seja (O) um círculo e l uma reta. A reta perpendicular a l que passa por O intersecta (O) em A e B . Sejam P_1 e P_2 pontos em (O) . Sejam também $P_1A \cap l = X_1$, $P_1B \cap l = X_2$, $P_2A \cap l = Y_1$ e $P_2B \cap l = Y_2$. Prove que (AX_1Y_1) e (AX_2Y_2) se intersectam sobre (O) .
5. No triângulo ABC com $\angle B$ obtuso e $AB \neq BC$. Sejam O o circuncentro e ω circuncírculo de ABC . N é o ponto médio do arco ABC . $(BON) \cap AC = (X, Y)$, $BX \cap \omega = P \neq B$ e $BY \cap \omega = Q \neq B$. Prove que P, Q e reflexão de N sobre a reta AC são colineares.

Resoluções

1. **Resolução:** Movendo o ponto E sobre a reta PO , a transformação $f : E \rightarrow D_1$ preserva a razão cruzada, onde $D_1 \in BE$ tal que $D_1A \perp BA$, pois é uma projeção sobre a reta r perpendicular para AB por A . Considere também a transformação $g : E \rightarrow D_2$, onde $D_2A \perp BA$ e $\angle ACD_2 = \angle EAB$, temos que $AE \mapsto CD_2$ preserva a razão cruzada pois é uma composição de translação e rotação, assim $E \mapsto AE \mapsto CD_2 \mapsto D_2$ é projetiva.

Basta provar que $f = g$ para três posições de E .

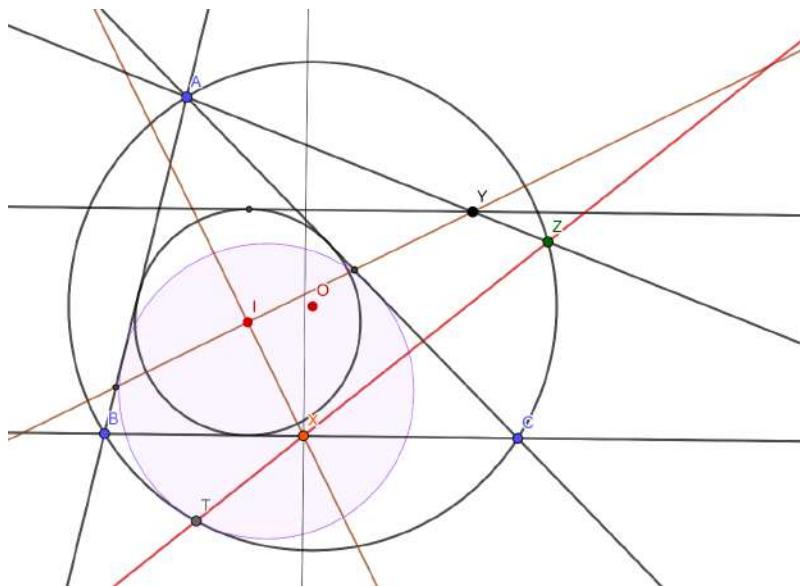


- $E = AB \cap PO \Rightarrow f(E) = g(E) = A.$
 - $E = O \Rightarrow f(E) = g(E) = B_1$ simétrico de B em $(O).$
 - $E = P \Rightarrow f(E) = g(E) = r \cap BC.$
2. *Solução.* Movendo o ponto X sobre a reta BC , a transformação $f : X \mapsto TX \mapsto Z_1$ preserva a razão cruzada, onde $Z_1 \in TX \cap (O)$ diferente de T , e observe também que a transformação $g : X \mapsto IX \mapsto IY \mapsto Y \mapsto AY \mapsto Z_2$ também é projetiva, definindo $Z_2 \in AY \cap (O)$ diferente de A .

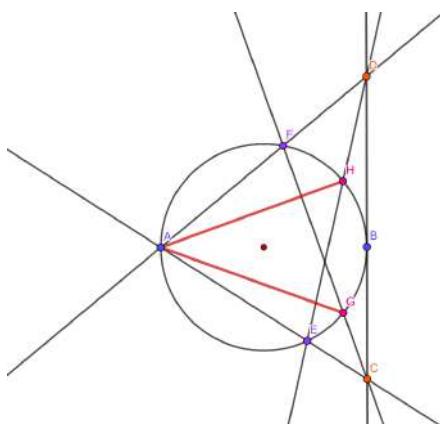
Basta verificar que $f = g$ para três posições de X .

- $X = B \Rightarrow f(X) = g(X) = B.$
- $X = C \Rightarrow f(X) = g(X) = C.$
- $X = \infty_{BC} \Rightarrow f(X) = S$ tal que $S \in (O)$ e $TS \parallel BC.$ Por outro lado, $g(X) = S,$ pois Y é o simétrico do ponto de tangência de (I) com $BC,$ os arcos BT e AS possuem mesma medida, AS é isogonal a AT e, por homotetia e propriedades do mixtilinear, A, Y e S são colineares.

■



3. *Solução.* Neste problema temos dois pontos variáveis sobre a reta l , porém para resolver o problema basta provar que $AH = AG$ fixando um desses pontos e movendo o outro sobre a reta. Vamos fixar o ponto C (o ponto E também fica fixo) e vamos mover o ponto D .

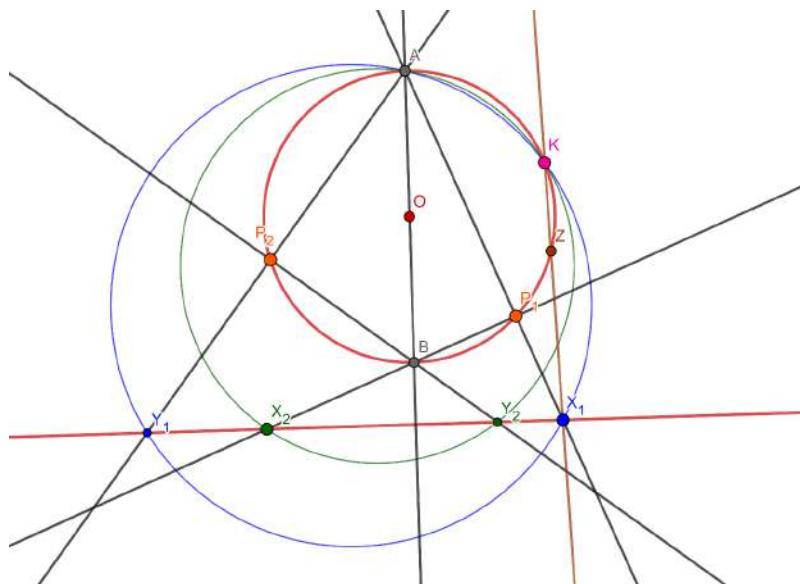


Consideramos as duas transformações $f : D \mapsto G_1$, onde G_1 é a reflexão de H em relação a AB , e $g : D \mapsto G_2$, onde $G_2 \in FC \cap \omega$ diferente de F . Perceba que $f : D \mapsto ED \mapsto H \mapsto G_1$ e $g : D \mapsto AD \mapsto F \mapsto CF \mapsto G_2$ preservam a razão

cruzada de acordo com as transformações vistas anteriormente.

Basta verificar que $f = g$ para três posições de D.

- $D = B \Rightarrow f(D) = g(D) = B$. Uma forma de vizualizar esta situação é pensar no limite quando D se aproxima de B.
- $D = C'$, simétrico de C em relação a B, $\Rightarrow f(D) = g(D)$, por simetria.
- $D = \infty_l \Rightarrow f(D) = g(D) = E$, pois F = A e H é o segundo encontro da perpendicular a AB por E com ω .



4. *Solução.* Fixe o ponto P_2 e move P_1 sobre (O) , como no problema anterior. Veja que Y_1 e Y_2 são fixos. Considere as duas transformações $f : P_1 \mapsto K_1$ e $g : P_1 \mapsto K_2$, onde $K_1 \in (X_1AY_1) \cap (O)$ e $K_2 \in (X_2AY_2) \cap (O)$ diferentes de A fora nos casos degenerados.

Quadrilátero $AY_1X_1K_1$ é cíclico então $\angle AK_1X_1 = 180^\circ - \angle AY_1X_1$ é constante, logo o ponto $Z \in K_1X_1 \cap (O)$ é fixo. Agora note que $f : P_1 \mapsto AP_1 \mapsto X_1 \mapsto ZX_1 \mapsto K_1$ preserva a razão cruzada. Analogamente g também é projetiva.

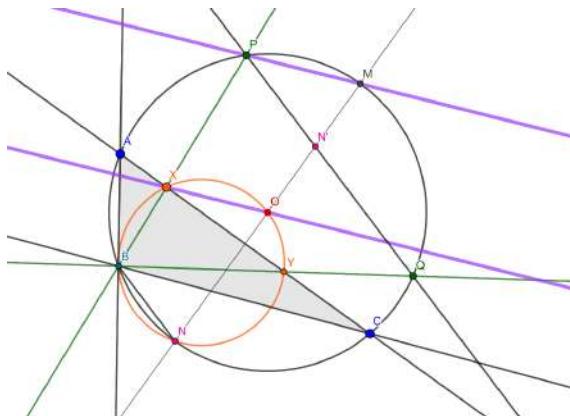
Observamos que $ZP_2 \perp AB$ e Z é a reflexão de P_2 em relação AB , pois:

$$\angle AP_2Z = 180^\circ - \angle AK_1X_1 = 180^\circ - (180^\circ - \angle AY_1X_1) = \angle AY_1X_1 = 90^\circ - \angle BAP_2$$

Basta provar que $f = g$ para três posições de P_1 .

- $P_1 = A \Rightarrow f(P_1) = g(P_1) = P_2$.
- $P_1 = P_2 \Rightarrow f(P_1) = g(P_1) = T$ onde M é o ponto médio do segmento Y_1Y_2 e $T \in AM \cap (O)$ diferente de A . Vale destacar que M é o circuncentro do triângulo $Y_1P_2Y_2$ e $\angle MP_2Y_2 = \angle MY_2P_2 = \angle BAP_2$ e MP_2 é tangente a (O) .
- $P_1 = Z \Rightarrow f(P_1) = g(P_2) = A$.

■



5. Solução. Sejam M a segunda interseção de NO com (O) e N' a reflexão de N sobre a AC . Fixe os pontos A, C e O e varie o ponto X sobre a reta AC . Veja que N, N' e M também são pontos fixos. Os pontos B e Y são os segundos pontos de interseção da circunferência (OXN) com (O) , fora em caso degenerado. Observe que $OX \parallel PM$, pois $\angle PMN = 180^\circ - \angle XBM = \angle XON$. Vamos trabalhar as duas transformações $f : X \mapsto Q$ e $g : X \mapsto Q_1$ onde Q_1 é a segunda interseção de PN' e (O) .

Usando a ferramenta de inversão sobre (O) , como no Exemplo 03, a transformação $f : X \mapsto X' \mapsto Y' \mapsto Y \mapsto Q$ é projetiva. Já que $OX \parallel PM$ então $X \mapsto OX \mapsto PM \mapsto P$ é uma composição de projeções e uma translação e preserva razão cruzada. Como N' é fixo, $g : X \mapsto P \mapsto Q_1$ também é uma transformação projetiva.

Sejam (ON) a circunferência de diâmetro ON e $(ON) \cap AC = \{Z_1, Z_2\}$. Suponha que NZ_1 e NZ_2 cruzam (O) novamente nos pontos P_1 e P_2 , respectivamente. Basta provar que $f = g$ para três posições do ponto X .

- $X = Z_1 \Rightarrow f(X) = g(X) = P_2$. Nesse caso, $B = N$ e como OZ_1 e OZ_2 são perpendiculares a NZ_1 e NZ_2 , respectivamente, Z_1Z_2 é base média de P_1P_2 e N' está sobre P_1P_2 .
- $X = Z_2 \Rightarrow f(X) = g(X) = P_1$. Análogo ao caso anterior.
- $X = A \Rightarrow f(X) = g(X) = C$. Temos um caso degenerado e uma forma de vizualizar é pensar no limite quando X se aproxima de A . Temos $B = X = A$ e podemos tomar P usando o paralelismo $OX \parallel PM$. Temos $Q = C$. Resta apenas provar que P , N' e C são colineares. Veja que $\angle NCP = \angle NMP = \angle NOX = \angle NOA = 2\angle NCA = \angle NCN'$ usando ângulos em circunferência e a simetria de N e N' em relação a AC .

■

Problemas propostos

1. (USA IMO TST 2019) Seja ABC um triângulo e sejam M e N os pontos médios de AB e AC , respectivamente. Seja X um ponto tal que AX é tangente ao circuncírculo de ABC . Denote ω_B a circunferência por M e B tangente a MX e ω_C a circunferência por N e C tangente a NX . Prove que ω_B e ω_C se intersectam sobre a reta BC .
2. (USA IMO TST 2012) Num triângulo acutângulo ABC , com $\angle A < \angle B$ e $\angle A < \angle C$. Seja P um ponto variável no lado BC . Os pontos D e E estão nos lados AB e AC , respectivamente, tais que $BP = PD$ e $CP = PE$. Prove que enquanto P se move sobre o lado BC , o circuncírculo do triângulo ADE passa num ponto fixo diferente de A .

Referências Bibliográficas

- [1] Zveryk, Vladyslav. The Method of Moving Points. July 29, 2019.
- [2] Chen, Evan. Euclidean Geometry in Mathematical Olympiads. Mathematical Association of America, 2016.
- [3] Handa, Gunmay e MUDGAL, Anant. A Special Point on the Median. Mathematical Reflections 2, 2017.
- [4] Akopyan, A. V. e ZASLAVSKY, A. A. Geometry of Conics. American Mathematical Society, 2007.
- [5] Moreira, Francisco. Geometria Projetiva. Treinamento EGMO 2021.
- [6] Shine, Carlos. A inversão \sqrt{bc} que não muda ABC. 19a Semana Olímpica, 2015.

Artigo: Racionalizando o Logotipo da OBM

- Nível Avançado

Rafael Tupynambá Dutra
Belo Horizonte - MG

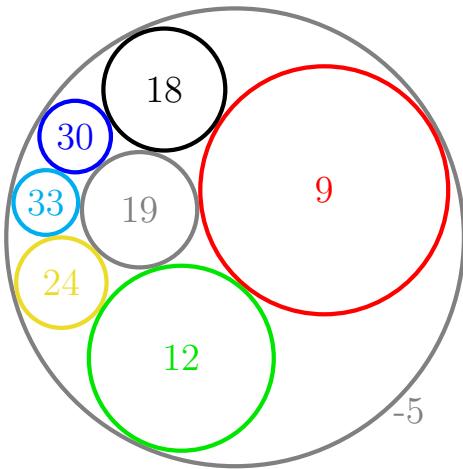


Figura 1: Versão do logotipo da OBM com uma corrente de 6 círculos. Os números representam a curvatura (inverso do raio) de cada círculo.

O logotipo da Olimpíada Brasileira de Matemática consiste em uma corrente de Steiner de n círculos ($n = 5$) coloridos, todos tangentes a um dado círculo interno e a um externo. Neste artigo, mostraremos que com $n = 6$ (e, também, com $n = 4$ ou $n = 3$, mas não com $n = 5$), é possível obter figuras em que os raios de todos os círculos são racionais. Estudaremos algumas propriedades interessantes dessas construções no que diz respeito à álgebra, à geometria e até à teoria dos números. Por exemplo, na Figura 1, note que as somas das curvaturas de círculos opostos coincidem ($9+33=12+30=18+24=3(19-5)$), as retas que passam pelos centros $\overleftrightarrow{c_9c_{18}}$ e $\overleftrightarrow{c_{12}c_{24}}$ são paralelas e os 6 círculos coloridos têm curvaturas múltiplas de 3. Por fim, mostraremos que essa construção se estende como um fractal, permitindo o empacotamento de infinitos círculos de curvaturas inteiras.

Obviamente, se encontrarmos uma corrente de Steiner em que os raios de todos os círculos são racionais, suas curvaturas também serão racionais e, multiplicando as curvaturas pelo denominador comum, obtemos uma versão em escala da figura com todas as curvaturas inteiras. É conveniente definir a curvatura do círculo externo com sinal

negativo, simbolizando que o “interior” deste círculo é, na verdade, a parte exterior da figura, contendo o ponto do infinito. Dessa forma, os interiores de todos os 8 círculos na Figura 1 são disjuntos.

Propriedades Algébricas

Uma corrente de Steiner, como o logotipo da OBM, pode ser construída aplicando-se uma inversão a uma figura originalmente simétrica, como já detalhado em um artigo da 4^a edição da Revista Eureka! [5]. A Figura 2 mostra essa configuração original para uma corrente de 6 círculos. Para as equações, será conveniente trabalhar no plano complexo. Definindo a raiz sexta da unidade $\omega = e^{\frac{2\pi i}{6}}$, os 6 círculos da corrente são posicionados com centros em ω^k , para $k \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$. Eles têm raio $1/2$, assim como o círculo interior, enquanto que o círculo exterior possui raio $3/2$. No caso geral, os raios dos n círculos da corrente são $\sin \frac{\pi}{n}$, enquanto que o raio do círculo interno é $1 - \sin \frac{\pi}{n}$ e o do círculo externo $1 + \sin \frac{\pi}{n}$.

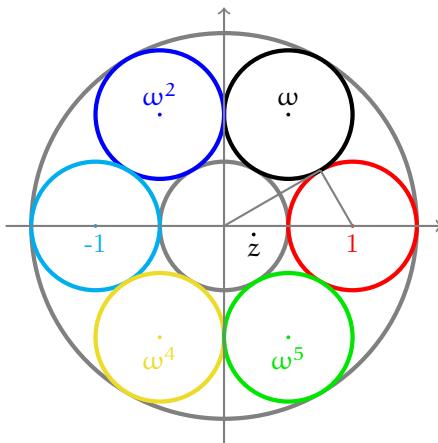


Figura 2: Disposição inicial simétrica de $n = 6$ círculos. O centro de inversão $z = \frac{3}{13} - \frac{1}{26}\sqrt{3}i$ foi utilizado para obter Figura 1.

Vamos posicionar o centro de inversão z no interior do círculo interno da Figura 2. Dessa forma, a inversão levará o círculo interno da Figura 2 no círculo externo da Figura 1, e vice-versa. Por exemplo, o centro de inversão $z = \frac{3}{13} - \frac{1}{26}\sqrt{3}i$ permite a obtenção das curvaturas inteiras mostradas na Figura 1.

Para estudar a inversão de um círculo, considere a Figura 3. Ao aplicar uma inversão de centro z e raio de inversão ρ , o ponto x é levado em x' que satisfaz $|x' - z| = \frac{\rho^2}{|x-z|}$.

Da mesma forma, y é levado em y' que satisfaz $|y' - z| = \frac{\rho^2}{|y - z|}$. O raio do novo círculo $r' = (|x' - z| - |y' - z|)/2$ é então

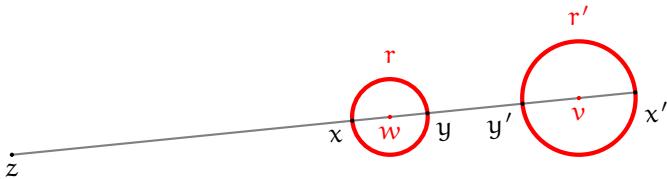


Figura 3: Inversão de um círculo.

$$r' = \frac{1}{2} \left(\frac{\rho^2}{|z - w| - r} - \frac{\rho^2}{|z - w| + r} \right) = \frac{\rho^2 r}{|z - w|^2 - r^2} \quad (14)$$

Da mesma forma, podemos calcular a posição do centro do novo círculo v (que não é resultado da inversão do centro original w). Uma homotetia de centro z e razão r'/r leva w em v , de forma que

$$v = z + \frac{r'}{r}(w - z) \quad (15)$$

Usando essas fórmulas, podemos obter os seguintes teoremas sobre a corrente de Steiner resultante. A notação $S_n[a_e, a_i; b_0, \dots, b_{n-1}]$ é usada para se referir a uma corrente de Steiner cujos n círculos possuem curvaturas b_0, \dots, b_{n-1} , nesta ordem, sendo a_e e a_i as curvaturas dos círculos externo e interno. Em geral, cada corrente possui $4n$ tais representações, já que podemos escolher o círculo inicial da corrente, o sentido de rotação na corrente e a ordem entre a_e e a_i .

Teorema 10 (Correntes de Steiner de 6 círculos). *Uma corrente de Steiner de 6 círculos com curvaturas dadas por $S_6[a_e, a_i; b_0, b_1, b_2, b_3, b_4, b_5]$ satisfaz:*

$$b_0 + b_3 = b_1 + b_4 = b_2 + b_5 \quad (16)$$

$$b_0 + b_2 + b_4 = b_1 + b_3 + b_5 \quad (17)$$

$$b_0 + b_1 + b_2 + b_3 + b_4 + b_5 = 9(a_e + a_i) \quad (18)$$

$$b_0^2 + b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 + b_4^2 + b_5^2 = \frac{81}{4}(a_e + a_i)^2 + 9a_e a_i \quad (19)$$

Demonstração. Como todas as equações a serem provadas são homogêneas, podemos assumir sem perda de generalidade que o raio de inversão é $\rho = 1$. As curvaturas podem ser diretamente calculadas invertendo a equação (14).

Para o círculo externo, usamos $w = 0$ e $r = 1/2$, obtendo

$$a_e = 2|z|^2 - \frac{1}{2}$$

Note que escolhemos um ponto z interior ao círculo interno, de modo que $|z| < 1/2$ e a equação para a_e satisfaz a convenção $a_e < 0$. Vamos a seguir calcular as outras curvaturas em função do valor de a_e . Para o círculo interno, usamos $w = 0$ e $r = 3/2$, para obter

$$a_i = -\frac{2}{3}|z|^2 + \frac{3}{2} = \frac{4 - a_e}{3}$$

Aqui, tivemos que realizar uma mudança de sinal, já que $|z| < 3/2$, mas a curvatura do círculo interno a_i precisa ser positiva.

Para os 6 círculos restantes, utilizamos $w = \omega^k$ e $r = 1/2$, de forma que

$$b_k = 2|z - \omega^k|^2 - \frac{1}{2} = 2(z - \omega^k)(\bar{z} - \bar{\omega}^k) - \frac{1}{2}$$

Usando $z\bar{z} = |z|^2$ e $\omega\bar{\omega} = |\omega|^2 = 1$, obtemos

$$b_k = a_e + 2 - 2(\bar{\omega}^k z + \omega^k \bar{z}) \quad (20)$$

Para obter as equações (16) e (18), basta usar $\omega^k + \omega^{k+3} = 0$ para calcular

$$b_k + b_{k+3} = 2a_e + 4 = 3(a_e + a_i)$$

Analogamente, usando $\omega^k + \omega^{k+2} + \omega^{k+4} = 0$, a equação (17) segue. Resta provar a equação (19). Temos

$$\sum_{k=0}^5 b_k^2 = \sum_{k=0}^5 \left((a_e + 2)^2 - 4(a_e + 2)(\bar{\omega}^k z + \omega^k \bar{z}) + 4(\bar{\omega}^k z + \omega^k \bar{z})^2 \right)$$

Como $\sum_{k=0}^5 \omega^k = 0$, o termo do meio é nulo. E como $\sum_{k=0}^5 \omega^{2k} = 0$, o último termo se reduz a

$$\sum_{k=0}^5 4(\bar{\omega}^k z + \omega^k \bar{z})^2 = 6 \cdot 8|z|^2 = 24a_e + 12$$

Assim, temos

$$\sum_{k=0}^5 b_k^2 = 6(a_e + 2)^2 + 24a_e + 12 = 6a_e^2 + 48a_e + 36$$

Por outro lado, o lado direito da equação (19) vale

$$9(a_e + 2)^2 + 3a_e(4 - a_e) = 6a_e^2 + 48a_e + 36$$

□

Note que, se fixarmos as curvaturas a_e e a_i dos círculos externo e interno, as equações (16)-(19) são 5 equações envolvendo as 6 variáveis b_0, \dots, b_5 . Assim, há apenas 1 grau de liberdade restante para determinar essas 6 curvaturas. Intuitivamente, isso faz sentido, uma vez que fixados os círculos externo e interno, a posição de um círculo na corrente determina a posição dos demais. Perceba que, mesmo sem fixar a_e e a_i , as equações (16) e (17) já impõem 3 condições sobre as 6 variáveis b_0, \dots, b_5 , restando apenas 3 graus de liberdade para escolhê-las.

É possível demonstrar que a fórmula equivalente à equação (18) para correntes com $n = 5$ círculos é

$$\frac{b_0 + b_1 + b_2 + b_3 + b_4}{5} = \frac{\cos^2 \frac{\pi}{5}}{\sin^2 \frac{\pi}{5}} \cdot \frac{a_e + a_i}{2} = \left(1 + \frac{2}{\sqrt{5}}\right) \frac{a_e + a_i}{2}$$

o que imediatamente implica que no caso $n = 5$ não há soluções em que as 7 curvaturas sejam inteiras. Na verdade, algo mais forte pode ser provado.

Exercício 1. Mostre que na corrente $S_5[a_e, a_i; b_0, b_1, b_2, b_3, b_4]$, as 5 curvaturas b_0, b_1, b_2, b_3, b_4 só podem ser todas racionais se elas forem iguais.

Talvez ainda mais surpreendente que as equações apresentadas no Teorema 10 seja o fato de que elas continuam válidas quando as curvaturas são substituídas pelos produtos entre curvatura e o número complexo que representa o centro de cada círculo.

Teorema 11 (Correntes de Steiner de 6 círculos: centros). *Uma corrente de Steiner $S_6[a_e, a_i; b_0, b_1, b_2, b_3, b_4, b_5]$ cujos centros dos círculos são dados por $z_e, z_i; z_0, z_1, z_2, z_3, z_4, z_5$ no plano complexo satisfaz:*

$$b_0 z_0 + b_3 z_3 = b_1 z_1 + b_4 z_4 = b_2 z_2 + b_5 z_5 \quad (21)$$

$$b_0 z_0 + b_2 z_2 + b_4 z_4 = b_1 z_1 + b_3 z_3 + b_5 z_5 \quad (22)$$

$$b_0 z_0 + b_1 z_1 + b_2 z_2 + b_3 z_3 + b_4 z_4 + b_5 z_5 = 9(a_e z_e + a_i z_i) \quad (23)$$

$$b_0^2 z_0^2 + b_1^2 z_1^2 + b_2^2 z_2^2 + b_3^2 z_3^2 + b_4^2 z_4^2 + b_5^2 z_5^2 = \frac{81}{4}(a_e z_e + a_i z_i)^2 + 9a_e a_i z_e z_i \quad (24)$$

Demonstração. A equação (15) pode ser escrita como

$$\frac{1}{r'}v = \frac{1}{r'}z + \frac{1}{r}(w - z)$$

A partir dela, podemos calcular os produtos para o círculo externo

$$a_e z_e = (a_e - 2)z$$

e para o círculo interno

$$a_i z_i = \left(a_i + \frac{2}{3} \right) z$$

Para os círculos da corrente, temos

$$b_k z_k = b_k z + 2(\omega^k - z)$$

de forma que

$$b_k z_k + b_{k+3} z_{k+3} = 3(a_e + a_i)z - 4z = 3(a_e z_e + a_i z_i)$$

Isso demonstra as equações (21) e (23). Similarmente, para demonstrar (22), fazemos

$$b_k z_k + b_{k+2} z_{k+2} + b_{k+4} z_{k+4} = \frac{9}{2}(a_e + a_i)z - 6z = \frac{9}{2}(a_e z_e + a_i z_i)$$

Resta demonstrar (24). Temos

$$\sum_{k=0}^5 b_k^2 z_k^2 = \sum_{k=0}^5 (b_k^2 z^2 - 4b_k z^2 + 4b_k \omega^k z + 4z^2)$$

A partir de (20), é possível mostrar que

$$\sum_{k=0}^5 b_k \omega^k = -\frac{12z}{\rho^2} = -3(3a_i + a_e)z$$

de forma que

$$\sum_{k=0}^5 b_k^2 z_k^2 = \left(\frac{81}{4}(a_e + a_i)^2 + 9a_e a_i - 36(a_e + a_i) - 12(3a_i + a_e) + 24 \right) z^2$$

$$\sum_{k=0}^5 b_k^2 z_k^2 = \left(\frac{81}{4}(a_e + a_i)^2 + 9a_e a_i - 48a_e - 72a_i + 24 \right) z^2$$

Já o lado direito de (24) é igual a

$$\begin{aligned} & \left(\frac{81}{4} \left(a_e - 2 + a_i + \frac{2}{3} \right)^2 + 9(a_e - 2) \left(a_i + \frac{2}{3} \right) \right) z^2 \\ &= \left(\frac{81}{4} (a_e + a_i)^2 + 9a_e a_i - 48a_e - 72a_i + 24 \right) z^2 \end{aligned}$$

□

Propriedades Geométricas

Vamos agora usar as propriedades fornecidas pelos Teoremas 10 e 11 para inferir aspectos geométricos da corrente mostrada na Figura 1. A Figura 4 mostra uma versão rotacionada da mesma corrente, com escala ajustada de forma que o círculo externo seja unitário.

Essa figura tem muitas propriedades geométricas interessantes. Por exemplo, representando por c_m o centro do círculo de curvatura m , temos que as retas $\overleftrightarrow{c_5c_{12}}$ e $\overleftrightarrow{c_3c_{33}}$ são paralelas, assim como o par de retas $\overleftrightarrow{c_5c_9}$ e $\overleftrightarrow{c_{18}c_{30}}$, e também o trio de retas $\overleftrightarrow{c_5c_{30}}$, $\overleftrightarrow{c_9c_{18}}$ e $\overleftrightarrow{c_{12}c_{24}}$. Interessantemente, o paralelismo das retas $\overleftrightarrow{c_9c_{18}}$ e $\overleftrightarrow{c_{12}c_{24}}$ decorre diretamente do fato de que esses dois pares de círculos vizinhos apresentam razão 2 entre eles: $18/9 = 24/12 = 2$. Surpreendentemente, outras propriedades geométricas de interesse também decorrem desse fato, como mostraremos no Teorema 12.

Definição 3. Uma corrente de Steiner de 6 círculos é chamada **pareada** se puder ser representada como $S_6[a_e, a_i; b_0, b_1, b_2, b_3, b_4, b_5]$ com $\frac{b_1}{b_0} = \frac{b_4}{b_5} = 2$.

Na verdade, usando as equações (16) e (17), encontramos condições suficientes mais fracas para que uma corrente seja pareada.

Exercício 2. Mostre que se uma corrente $S_6[a_e, a_i; b_0, b_1, b_2, b_3, b_4, b_5]$ satisfaz $\frac{b_1}{b_0} = \frac{b_4}{b_5}$ com $b_0 \neq b_5$, ela é pareada.

Exercício 3. Mostre que se uma corrente $S_6[a_e, a_i; b_0, b_1, b_2, b_3, b_4, b_5]$ satisfaz $\frac{b_1}{b_0} = 2$, ela é pareada.

Teorema 12 (Correntes pareadas). Uma corrente de Steiner composta por 6 círculos $S_6[a_e, a_i; b_0, b_1, b_2, b_3, b_4, b_5]$ pareada com $\frac{b_1}{b_0} = \frac{b_4}{b_5} = 2$ cujos círculos são chamados $C_e, C_i, C_0, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5$ com centros $z_e, z_i, z_0, z_1, z_2, z_3, z_4, z_5$ satisfaz as seguintes propriedades geométricas:

1. A reta $\overleftrightarrow{z_0z_1}$ e a reta $\overleftrightarrow{z_4z_5}$ são paralelas.

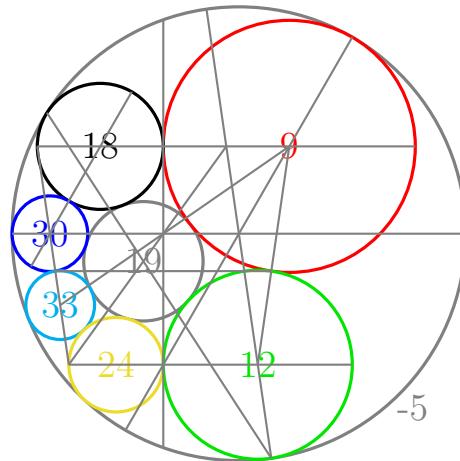


Figura 4: Versão rotacionada da Figura 1, onde os centros dos círculos são dados por $c_{-5} = 0$, $c_{19} = -\frac{8}{19} - \frac{4}{57}\sqrt{3}i$, $c_9 = \frac{2}{9} + \frac{2}{9}\sqrt{3}i$, $c_{18} = -\frac{11}{18} + \frac{2}{9}\sqrt{3}i$, $c_{30} = -\frac{5}{6}$, $c_{33} = -\frac{26}{33} - \frac{2}{11}\sqrt{3}i$, $c_{24} = -\frac{13}{24} - \frac{1}{3}\sqrt{3}i$, $c_{12} = \frac{1}{12} - \frac{1}{3}\sqrt{3}i$.

2. O ponto de tangência $T_{0,1}$ entre C_0 e C_1 e o ponto de tangência $T_{4,5}$ entre C_4 e C_5 formam uma reta $\overleftrightarrow{T_{0,1}T_{4,5}}$ perpendicular às retas $\overleftrightarrow{z_0z_1}$ e $\overleftrightarrow{z_4z_5}$ e, portanto, tangente aos 4 círculos.
3. A reta $\overleftrightarrow{T_{5,0}T_{2,3}}$ definida analogamente é paralela às retas $\overleftrightarrow{z_0z_1}$ e $\overleftrightarrow{z_4z_5}$.
4. Sendo P_1 o outro ponto de interseção da reta $\overleftrightarrow{z_0z_1}$ com C_1 e P_4 o outro ponto de interseção da reta $\overleftrightarrow{z_4z_5}$ com C_4 , a reta $\overleftrightarrow{P_1P_4}$ contém os centros z_2 e z_3 .

Demonstração. Primeiro vamos provar que se uma inversão leva um círculo da corrente em outro, essa inversão necessariamente preserva o círculo interno e o círculo externo tangente a ambos. Tal inversão precisa estar centrada no centro homotético externo E dos dois círculos (vide Figura 5).

Imagine que traçamos uma reta qualquer pelo ponto E, que intersecta os dois círculos nos pontos P, Q, Q' e P'. Existe uma inversão de centro E que leva P em P' e Q em Q' (pares anti-homólogos). E existe uma homotetia de centro E que leva P em Q' e Q em P' (pares homólogos).

Os triângulos PO_1Q e $Q'O_2P'$ são isósceles (raios) e semelhantes, já que a homotetia leva um no outro. Logo, as retas $\overleftrightarrow{PO_1}$ e $\overleftrightarrow{P'O_2}$ se encontram em um ponto T_2 tal que o triângulo PT_2P' é isósceles. Assim, existe um círculo centrado em T_2 que tangencia os dois círculos nos pontos P e P'. O mesmo argumento prova que existe um outro círculo tangente aos dois círculos originais em Q e Q'. Como a inversão transforma $P \leftrightarrow P'$ e

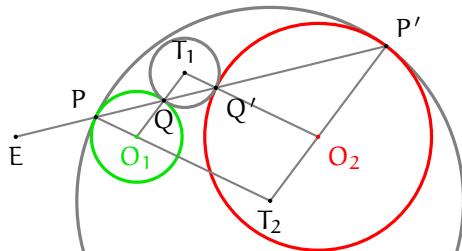


Figura 5: Inversão de centro E transforma $P \leftrightarrow P'$ e $Q \leftrightarrow Q'$.

$Q \leftrightarrow Q'$ e preserva tangências, concluímos que a inversão precisa preservar o círculo interno e o externo.

Aplicamos essa conclusão ao teorema da seguinte forma. Seja E o centro homotético externo¹ dos círculos C_0 e C_5 (vide Figura 6). A inversão I_E de centro E que transforma $C_0 \leftrightarrow C_5$ é tal que $C_e \leftrightarrow C_e$ e $C_i \leftrightarrow C_i$. Mas, fixando-se os círculos externo e interno, a posição de um círculo da corrente determina as posições dos outros. Logo, I_E transforma $C_1 \leftrightarrow C_4$ e $C_2 \leftrightarrow C_3$. Assim, o ponto E também é o ponto homotético externo dos círculos C_1 e C_4 . Dessa forma, uma homotetia H_E de centro E e razão $\frac{b_5}{b_0} = \frac{b_4}{b_1}$ leva C_5 em C_0 e C_4 em C_1 , o que implica que as retas $\overleftrightarrow{z_0 z_1}$ e $\overleftrightarrow{z_4 z_5}$ são paralelas.

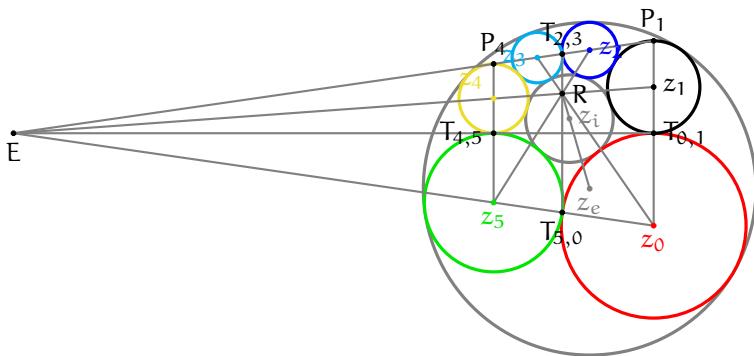


Figura 6: Uma inversão I_E de centro E transforma $C_e \leftrightarrow C_e$, $C_i \leftrightarrow C_i$, $C_0 \leftrightarrow C_5$, $C_1 \leftrightarrow C_4$ e $C_2 \leftrightarrow C_3$. Uma inversão negativa I_R de centro R transforma $C_i \leftrightarrow C_e$, $C_0 \leftrightarrow C_3$, $C_1 \leftrightarrow C_4$ e $C_2 \leftrightarrow C_5$.

Agora note que tanto a homotetia H_E quanto a inversão I_E precisam levar o ponto de tangência $T_{4,5}$ no ponto de tangência $T_{0,1}$. Mas a homotetia leva um ponto de um

¹ Assumimos aqui $b_0 \neq b_5$. O caso $b_0 = b_5$ precisa ser tratado separadamente.

círculo em seu par homólogo, enquanto que a inversão leva em seu par anti-homólogo, de forma que elas só podem coincidir nos pontos de tangência. Assim, a reta que passa por E , $T_{4,5}$ e $T_{0,1}$ precisa tangenciar os 4 círculos, sendo perpendicular às retas $\overleftrightarrow{z_0z_1}$ e $\overleftrightarrow{z_4z_5}$.

Agora, usamos as equações (16), (18), (21) e (23) para definir o ponto R como

$$R = \frac{b_0 z_0 + b_3 z_3}{b_0 + b_3} = \frac{b_1 z_1 + b_4 z_4}{b_1 + b_4} = \frac{b_2 z_2 + b_5 z_5}{b_2 + b_5} = \frac{a_e z_e + a_i z_i}{a_e + a_i}$$

Esse ponto R é, por definição, o centro homotético interno dos pares (C_0, C_3) , (C_1, C_4) e (C_2, C_5) . Três homotetias de centro R e razão negativa $-\frac{b_0}{b_3}$, $-\frac{b_1}{b_4}$ ou $-\frac{b_2}{b_5}$ podem ser usadas para levar C_0 em C_3 , C_1 em C_4 , ou C_2 em C_5 , respectivamente. Enquanto que uma homotetia de centro R e razão positiva $-\frac{a_i}{a_e}$ leva C_i em C_e .

Além disso, existe uma “inversão negativa” (inversão composta com reflexão) I_R de centro R que transforma $C_i \leftrightarrow C_e$. A inversão negativa I_R precisa levar a corrente de 6 círculos em uma outra corrente de 6 círculos, sendo que as retas que unem seus centros ao ponto R precisam ser preservadas. A única possibilidade é que a inversão negativa I_R transforma $C_0 \leftrightarrow C_3$, $C_1 \leftrightarrow C_4$, $C_2 \leftrightarrow C_5$.

Agora note que uma homotetia de centro R e razão $-\frac{b_1}{b_4}$ leva C_1 em C_4 , enquanto que uma homotetia de centro $T_{5,0}$ com a mesma razão negativa $-\frac{b_0}{b_5} = -\frac{b_1}{b_4}$ leva C_0 em C_5 . Assim, a reta $\overleftrightarrow{RT_{5,0}}$ precisa ser paralela às retas $\overleftrightarrow{z_0z_1}$ e $\overleftrightarrow{z_4z_5}$. Mas a inversão negativa I_R leva $T_{5,0}$ em $T_{2,3}$. Logo, a reta $\overleftrightarrow{T_{5,0}T_{2,3}}$ é paralela às retas $\overleftrightarrow{z_0z_1}$ e $\overleftrightarrow{z_4z_5}$.

A seguir, usamos o fato de que a inversão I_E mantém fixos $T_{5,0} \leftrightarrow T_{5,0}$ e $T_{2,3} \leftrightarrow T_{2,3}$ para concluir que esses dois pontos estão à mesma distância de E e, portanto, à mesma distância da reta $\overleftrightarrow{T_{0,1}T_{4,5}}$, que é perpendicular a $\overleftrightarrow{T_{5,0}T_{2,3}}$ e passa por E . Por fim, note que, como $\frac{b_1}{b_0} = \frac{b_4}{b_5} = 2$, $T_{0,1}$ é o ponto médio entre z_0 e P_1 e, similarmente, $T_{4,5}$ é o ponto médio entre z_5 e P_4 . Assim, a reta $\overleftrightarrow{P_1P_4}$ é a reflexão da reta $\overleftrightarrow{z_0z_5}$ em relação à reta $\overleftrightarrow{T_{0,1}T_{4,5}}$ e, portanto, contém o ponto $T_{2,3}$ e o ponto E . Como a inversão I_E transforma $C_2 \leftrightarrow C_3$, concluímos que essa reta $\overleftrightarrow{P_1P_4}$ contém também os centros z_2 e z_3 . \square

Propriedades Numéricas

Agora vamos estudar o problema de encontrar correntes de Steiner de 6 círculos $S_6[a_e, a_i; b_0, b_1, b_2, b_3, b_4, b_5]$ com todas as curvaturas inteiras. Para tanto, procuramos soluções inteiras para as equações (16), (17), (18) e (19). Como $b_0 + b_2 + b_4 = \frac{9}{2}(a_e + a_i)$, precisamos ter $a_e + a_i \equiv 0 \pmod{2}$. Além disso, temos o seguinte resultado sobre as curvaturas módulo 3.

Teorema 13 (Módulo 3). *Uma corrente de Steiner $S_6[a_e, a_i; b_0, b_1, b_2, b_3, b_4, b_5]$ em que todas as 8 curvaturas são inteiras precisa satisfazer $b_0 \equiv b_1 \equiv b_2 \equiv b_3 \equiv b_4 \equiv b_5 \equiv 0 \pmod{3}$.*

Demonstração. A equação (19) exige que

$$b_0^2 + b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 + b_4^2 + b_5^2 \equiv 0 \pmod{9} \quad (25)$$

Além disso, pelas equações (17) e (18), precisamos ter

$$b_0 + b_2 + b_4 = b_1 + b_3 + b_5 \equiv 0 \pmod{9} \quad (26)$$

e, pelas equações (16) e (18), precisamos ter

$$b_0 + b_3 = b_1 + b_4 = b_2 + b_5 \equiv 0 \pmod{3} \quad (27)$$

Provaremos que essas condições só podem ser satisfeitas se todos os b_k forem múltiplos de 3. Por (27), sabemos que $b_0^2 + b_3^2$ só pode ser congruente a 0 ou 2 módulo 3. Analogamente para $b_1^2 + b_4^2$ e $b_2^2 + b_5^2$. Por (25), precisamos ter todos os b_k^2 congruentes a 0 módulo 3 ou todos os b_k^2 congruentes a 1 módulo 3.

Suponha, por absurdo, que exista uma solução em que os b_k não são todos múltiplos de 3. Então nenhum deles pode ser múltiplo de 3. Por (26), descobrimos que precisamos ter $b_0 \equiv b_2 \equiv b_4 \pmod{3}$ e $b_1 \equiv b_3 \equiv b_5 \pmod{3}$. Sem perda de generalidade, podemos assumir $b_0 \equiv b_2 \equiv b_4 \equiv 1 \pmod{3}$ e $b_1 \equiv b_3 \equiv b_5 \equiv -1 \pmod{3}$.

Escrevendo $b_0 = 3u_0 + 1$, $b_2 = 3u_2 + 1$, $b_4 = 3u_4 + 1$, $b_1 = 3u_1 - 1$, $b_3 = 3u_3 - 1$, $b_5 = 3u_5 - 1$, a equação (26) nos diz que

$$u_0 + u_2 + u_4 + 1 = u_1 + u_3 + u_5 - 1 \equiv 0 \pmod{3}$$

enquanto que a equação (25) nos dá

$$-u_0 - u_2 - u_4 + u_1 + u_3 + u_5 - 1 \equiv 0 \pmod{3}$$

Absurdo: logo, todos os b_k têm que ser múltiplos de 3. □

Por (18), a média aritmética dos b_k vale $\frac{3}{2}(a_e + a_i)$, que é um número inteiro e múltiplo de 3. Chamando essa média de $3c$ e usando as equações (16) e (17), podemos escrever $b_0 = 3(c - d - e)$, $b_1 = 3(c - e)$, $b_2 = 3(c + d)$, $b_3 = 3(c + d + e)$, $b_4 = 3(c + e)$, $b_5 = 3(c - d)$, para certos inteiros d e e . Com essa representação, as equações (16) e (17) são automaticamente satisfeitas.

As equações (18) e (19) podem ser combinadas em uma única equação quadrática na variável a , cujas soluções são a_e e a_i . Temos

$$a_e + a_i = \frac{b_0 + b_1 + b_2 + b_3 + b_4 + b_5}{9} = 2c$$

$$a_e a_i = \frac{b_0^2 + b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 + b_4^2 + b_5^2}{9} - \frac{(b_0 + b_1 + b_2 + b_3 + b_4 + b_5)^2}{36}$$

$$a_e a_i = 6c^2 + 4d^2 + 4e^2 + 4de - 9c^2 = -3c^2 + 4d^2 + 4e^2 + 4de$$

Assim, a equação $a^2 - 2ca - 3c^2 + 4d^2 + 4e^2 + 4de = 0$ tem soluções $a \in \{a_e, a_i\}$. O discriminante da equação é $\Delta = 16(c^2 - d^2 - e^2 - de)$. então, para termos soluções inteiras, $c^2 - d^2 - e^2 - de$ precisa ser um quadrado perfeito. Procurando soluções com todos os b_k positivos, a primeira solução é a trivial $c = 1, d = e = 0$, que gera a corrente $S_6[-1, 3; 3, 3, 3, 3, 3]$ (Configuração simétrica como a da Figura 2).

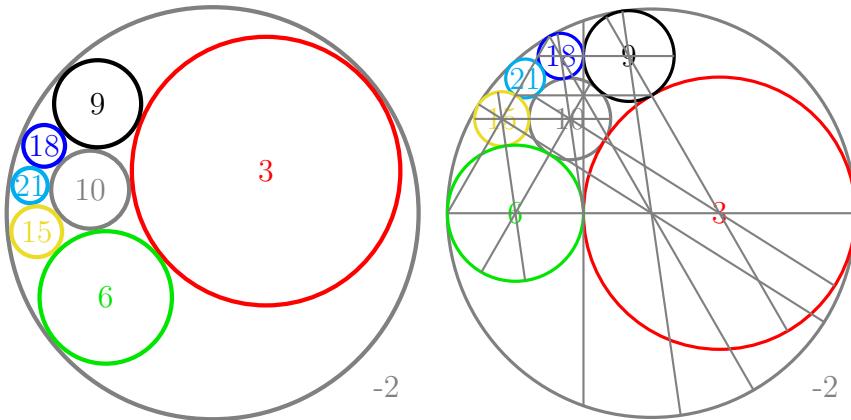


Figura 7: A corrente de Steiner $S_6[-2, 10; 3, 6, 15, 21, 18, 9]$ mostrada à esquerda como resultado de uma inversão de centro $z = \frac{9}{28} - \frac{1}{28}\sqrt{3}i$ e à direita com coordenadas $c_{-2} = 0$, $c_{10} = -\frac{2}{5} + \frac{4}{15}\sqrt{3}i$, $c_3 = \frac{1}{3}$, $c_6 = -\frac{2}{3}$, $c_{15} = -\frac{11}{15} + \frac{4}{15}\sqrt{3}i$, $c_{21} = -\frac{13}{21} + \frac{8}{21}\sqrt{3}i$, $c_{18} = -\frac{4}{9} + \frac{4}{9}\sqrt{3}i$, $c_9 = -\frac{1}{9} + \frac{4}{9}\sqrt{3}i$.

A primeira solução após a trivial ocorre com $c = 4, d = 1, e = 2$ e se trata da corrente $S_6[-2, 10; 3, 6, 15, 21, 18, 9]$, mostrada na Figura 7. Essa também é uma corrente pareada ($6/3 = 18/9 = 2$), então muitas de suas propriedades geométricas já estão descritas pelo Teorema 12.

Essa corrente também tem mais propriedades interessantes. Primeiramente, vemos que os centros c_{-2}, c_3 e c_6 são colineares ($1/2 = 1/3 + 1/6$). Além dos círculos pareados $\overleftrightarrow{c_9c_{18}}$, também a reta $\overleftrightarrow{c_{10}c_{15}}$ é paralela à reta $\overleftrightarrow{c_3c_6}$. Além disso, temos paralelismos entre $\overleftrightarrow{c_{-2}c_9}$, $\overleftrightarrow{c_{10}c_{18}}$ e $\overleftrightarrow{c_6c_{15}}$, entre $\overleftrightarrow{c_{-2}c_{18}}$ e $\overleftrightarrow{c_3c_9}$, entre $\overleftrightarrow{c_{-2}c_{15}}$ e $\overleftrightarrow{c_3c_{10}}$ e entre $\overleftrightarrow{c_6c_{10}}$ e $\overleftrightarrow{c_{15}c_{21}}$.

A corrente $S_6[-5, 19; 9, 12, 24, 33, 30, 18]$ das Figuras 1 e 4 é a segunda menor solução não-simétrica, que pode ser obtida com $c = 7, d = 1, e = 3$.

Exercício 4 (Correntes de Steiner de 4 círculos). *Mostre que uma corrente de Steiner de 4 círculos com curvaturas dadas por $S_4[a_e, a_i; b_0, b_1, b_2, b_3]$ satisfaz:*

$$b_0 + b_2 = b_1 + b_3 \quad (28)$$

$$b_0 + b_1 + b_2 + b_3 = 2(a_e + a_i) \quad (29)$$

$$b_0^2 + b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 = \frac{3}{2}(a_e + a_i)^2 + 2a_e a_i \quad (30)$$

Exercício 5. Mostre que uma corrente de Steiner $S_n[a_e, a_i; b_0, \dots, b_{n-1}]$ com n círculos só pode ter todas as $n+2$ curvaturas inteiras se $n \in \{3, 4, 6\}$.

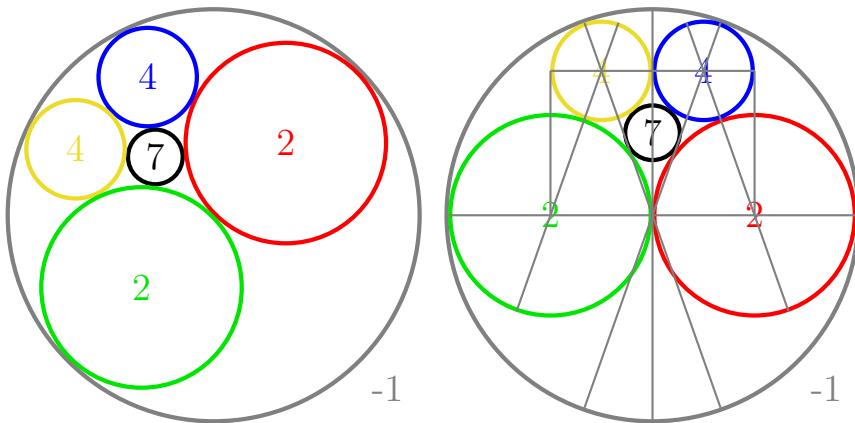


Figura 8: A corrente de Steiner $S_4[-1, 7; 2, 2, 4, 4]$ mostrada à esquerda como resultado de uma inversão de centro $z = \frac{(3-2\sqrt{2})(1-i)}{2}$ e à direita com coordenadas $c_{-1} = 0$, $c_2 = \pm\frac{1}{2}$, $c_4 = \pm\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\sqrt{2}i$, $c_7 = \frac{2}{7}\sqrt{2}i$.

Para $n = 4$, a menor solução inteira é a corrente $S_4[-1, 7; 2, 2, 4, 4]$ mostrada na Figura 8. Já a solução $S_4[-2, 16; 3, 6, 11, 8]$ mostrada na Figura 9 é a menor solução não-simétrica. Ambas apresentam círculos diametralmente opostos ($1/1 = 1/2 + 1/2$, $1/2 = 1/3 + 1/6$), além de círculos vizinhos com razão 2 ($4/2 = 2$, $6/3 = 2$), mas aqui isso não implica as propriedades geométricas como no caso $n = 6$.

Uma propriedade interessante das correntes com $n = 4$ é que nelas cada um dos 6 círculos é tangente a exatamente 4 círculos vizinhos, então todos os círculos desempenham o mesmo papel. A corrente da Figura 9, por exemplo, poderia ser igualmente denominada $S_4[3, 11; -2, 6, 16, 8]$ ou $S_4[6, 8; -2, 3, 16, 11]$.

Empacotamentos de Apolônio

A seguir, mostraremos que uma corrente de Steiner com curvaturas inteiras, como a $S_6[-5, 19; 9, 12, 24, 33, 30, 18]$ das Figuras 1 e 4, pode ser usada para construir um

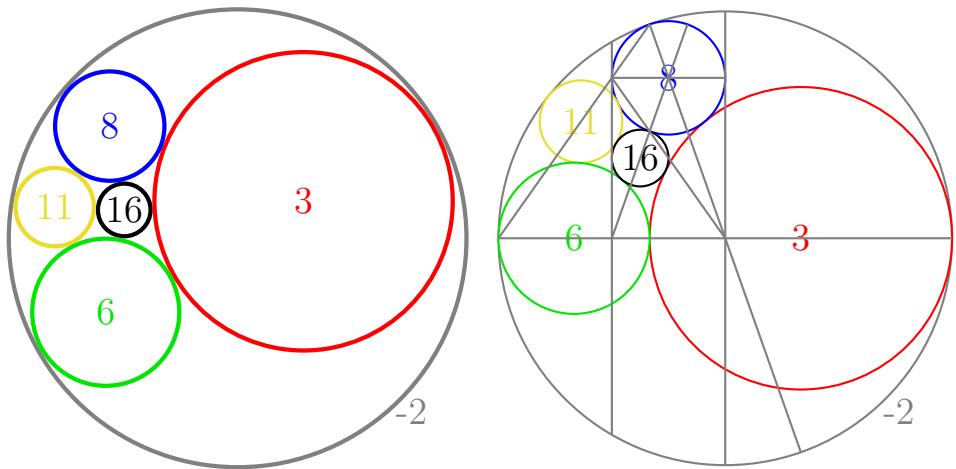


Figura 9: A corrente de Steiner $S_4[-2, 16; 3, 6, 11, 8]$ mostrada à esquerda como resultado de uma inversão de centro $z = \frac{(19-12\sqrt{2})(11-5i)}{146}$ e à direita com coordenadas $c_{-2} = 0$, $c_{16} = -\frac{3}{8} + \frac{1}{4}\sqrt{2}i$, $c_3 = \frac{1}{3}$, $c_6 = -\frac{2}{3}$, $c_{11} = -\frac{7}{11} + \frac{4}{11}\sqrt{2}i$, $c_8 = -\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\sqrt{2}i$.

empacotamento de círculos de Apolônio como o da Figura 10, onde todos os infinitos círculos possuem curvaturas inteiras. A construção se dá da seguinte forma:

A partir de uma corrente inicial $S_6[a_e, a_i; b_0, b_1, b_2, b_3, b_4, b_5]$, construímos uma nova corrente constituída de 6 círculos $S_6[a_e, a'_i; b_0, b_1, b'_2, b'_3, b'_4, b'_5]$ que possui em comum o círculo externo C_e e dois círculos vizinhos da corrente C_0 e C_1 , mas agora com um novo círculo interno C'_i e uma nova continuação de 4 círculos C'_2, C'_3, C'_4, C'_5 . Assim, por exemplo, preservando o círculo externo (-5) e dois círculos vizinhos $(9$ e $12)$ na Figura 10, obtemos uma nova corrente $S_6[-5, 27; 9, 12, 36, 57, 54, 30]$ com novo círculo interno (27) , que também pode ser vista na mesma figura.

Também é possível preservar o círculo interno e procurar por uma corrente com um novo círculo “externo”. Por exemplo, preservando o círculo interno (19) e os mesmos dois vizinhos $(9$ e $12)$, podemos obter uma nova corrente $S_6[19, 99; 9, 12, 180, 345, 342, 174]$, que é um tipo de corrente em que todos os círculos têm curvaturas positivas e, portanto, não possui um círculo “externo” no sentido usual. Geometricamente, os 5 novos círculos encontram-se dentro da região delimitada pelos três círculos originais.

Esse procedimento pode ser repetido infinitas vezes, dando origem ao fractal da Figura 10. Mostraremos a seguir como obter as curvaturas e centros dos novos círculos.

Teorema 14 (Corrente conjugada). *Dada uma corrente de Steiner de 6 círculos com curvaturas $S_6[a_e, a_i; b_0, b_1, b_2, b_3, b_4, b_5]$ é possível construir uma nova corrente*

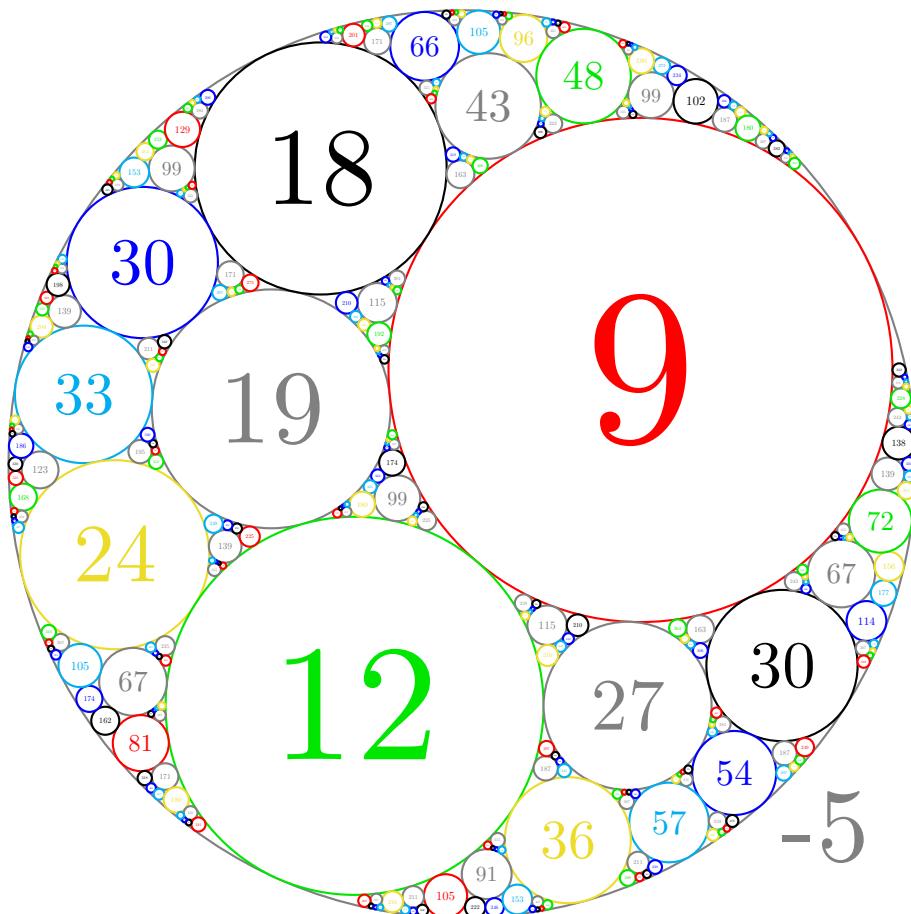


Figura 10: Empacotamento de Apolônio baseado em uma corrente de Steiner de 6 círculos $S_6[-5, 19; 9, 12, 24, 33, 30, 18]$.

$S_6[a_e, a'_i; b_0, b_1, b'_2, b'_3, b'_4, b'_5]$ que tem os círculos C_e , C_0 e C_1 em comum. Além disso, se a corrente original tinha todas as curvaturas inteiras, a nova corrente também terá.

Demonstração. Para encontrar a nova corrente, a ideia é escrever as equações (16), (17), (18) e (19) somente em termos das curvaturas que serão preservadas (a_e , b_0 e b_1) e da curvatura interna a_i . A partir das equações (16), (17) e (18), podemos escrever

$$b_2 = \frac{3}{2}(a_e + a_i) - b_0 + b_1 \quad (31)$$

$$b_3 = 3(a_e + a_i) - b_0 \quad (32)$$

$$b_4 = 3(a_e + a_i) - b_1 \quad (33)$$

$$b_5 = \frac{3}{2}(a_e + a_i) + b_0 - b_1 \quad (34)$$

Substituindo em (19), obtemos

$$\frac{45}{2}(a_e + a_i)^2 - 6(a_e + a_i)(b_0 + b_1) + 4(b_0^2 + b_1^2 - b_0 b_1) = \frac{81}{4}(a_e + a_i)^2 + 9a_e a_i$$

$$\frac{9}{4}(a_e - a_i)^2 - 6(a_e + a_i)(b_0 + b_1) + 4(b_0^2 + b_1^2 - b_0 b_1) = 0$$

Se as curvaturas originais forem inteiras, b_0 e b_1 são múltiplos de 3. Então temos a seguinte equação de segundo grau com coeficientes inteiros em a_i :

$$a_i^2 - \left(2a_e + \frac{8}{3}(b_0 + b_1)\right)a_i + a_e^2 - \frac{8}{3}(b_0 + b_1)a_e + \frac{16}{9}(b_0^2 + b_1^2 - b_0 b_1) = 0$$

Essa equação possui duas raízes inteiras: o primeiro valor já conhecido de a_i e um segundo valor a'_i que pode ser calculado como

$$a'_i = 2a_e + \frac{8}{3}(b_0 + b_1) - a_i \quad (35)$$

Uma vez conhecido o novo valor de a_i , as equações (31), (32), (33) e (34) podem ser usadas para calcular os novos valores de b_2 , b_3 , b_4 e b_5 :

$$b'_2 = \frac{3}{2}(a_e + a'_i) - b_0 + b_1 \quad (36)$$

$$b'_3 = 3(a_e + a'_i) - b_0 \quad (37)$$

$$b'_4 = 3(a_e + a'_i) - b_1 \quad (38)$$

$$b'_5 = \frac{3}{2}(a_e + a'_i) + b_0 - b_1 \quad (39)$$

Pelo Teorema 11, todas as equações se mantém válidas quando substituímos as curvaturas pelos produtos entre curvatura e o centro do círculo, de forma que as equações (35), (36), (37), (38) e (39) nos dão

$$a'_i z'_i = 2a_e z_e + \frac{8}{3}(b_0 z_0 + b_1 z_1) - a_i z_i \quad (40)$$

$$b'_2 z'_2 = \frac{3}{2}(a_e z_e + a'_i z'_i) - b_0 z_0 + b_1 z_1 \quad (41)$$

$$b'_3 z'_3 = 3(a_e z_e + a'_i z'_i) - b_0 z_0 \quad (42)$$

$$b'_4 z'_4 = 3(a_e z_e + a'_i z'_i) - b_1 z_1 \quad (43)$$

$$b'_5 z'_5 = \frac{3}{2}(a_e z_e + a'_i z'_i) + b_0 z_0 - b_1 z_1 \quad (44)$$

As equações (35)-(44) nos dão um procedimento direto para calcular as curvaturas e os centros dos novos círculos, permitindo a construção de desenhos como o das Figuras 10 e 11.

□

Note que, quando um par de vizinhos satisfaz $\frac{b_1}{b_0} = 2$, tanto a corrente original quanto a corrente conjugada $S_6[a_e, a'_i; b_0, b_1, b'_2, b'_3, b'_4, b'_5]$ são pareadas. Assim, é possível ver várias correntes pareadas nas Figuras 10 e 11.

Exercício 6. Estude as correntes $S_6[a_e, a'_i; b_0, b_1, b_2, b_3, b_4, b_5]$ que satisfazem $\frac{b_2}{b_0} = 2$ e $\frac{b_4}{b_5} = \frac{3}{2}$. Mostre que as retas que unem os centros dos círculos de razão 2 e $\frac{3}{2}$ são paralelas. Um exemplo pode ser visto na corrente $S_6[-2, 18; 9, 3, 18, 39, 45, 30]$ da Figura 11.

Ao final do artigo, mostramos mais 4 exemplos de empacotamentos de Apolônio, baseados nas seguintes correntes de Steiner:

- $S_6[-1, 3; 3, 3, 3, 3, 3, 3]$, a corrente totalmente simétrica
- $S_4[-1, 7; 2, 2, 4, 4]$, a corrente da Figura 8
- $S_4[-2, 16; 3, 6, 11, 8]$, a corrente da Figura 9
- $S_3[-2, 34; 3, 6, 7]$, uma corrente de 3 círculos

Note que mostramos 3 exemplos de empacotamentos contendo as curvaturas -2 , 3 e 6 : um com $n = 6$, um com $n = 4$ e um com $n = 3$. Os empacotamentos com $n = 3$ são bem conhecidos na literatura matemática, sendo chamados simplesmente de empacotamentos de círculos de Apolônio inteiros. Os empacotamentos com $n = 4$ já foram chamados de empacotamentos de 3-círculos de Apolônio inteiros [3]. Isso porque podem ser construídos adicionando-se 3 círculos de cada vez. Por exemplo, no caso de $S_4[-2, 16; 3, 6, 11, 8]$, podemos começar com os 3 círculos $-2, 3, 6$, depois adicionar $8, 11, 16$, depois adicionar $14, 19, 24$, etc.

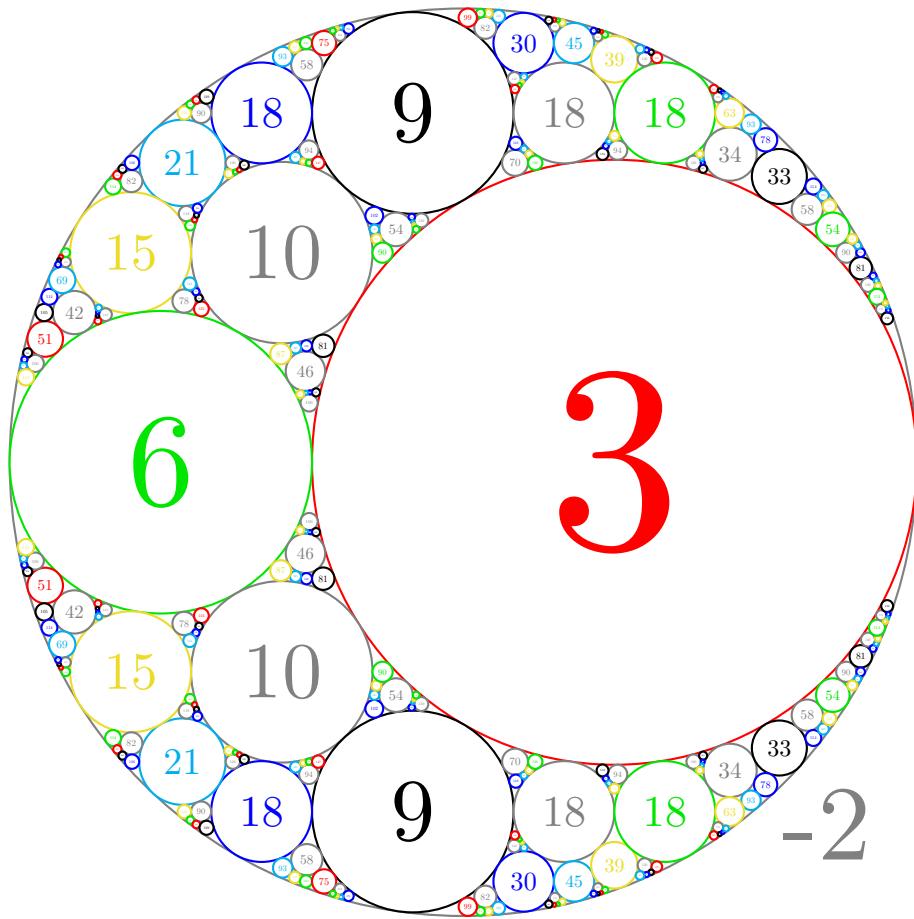
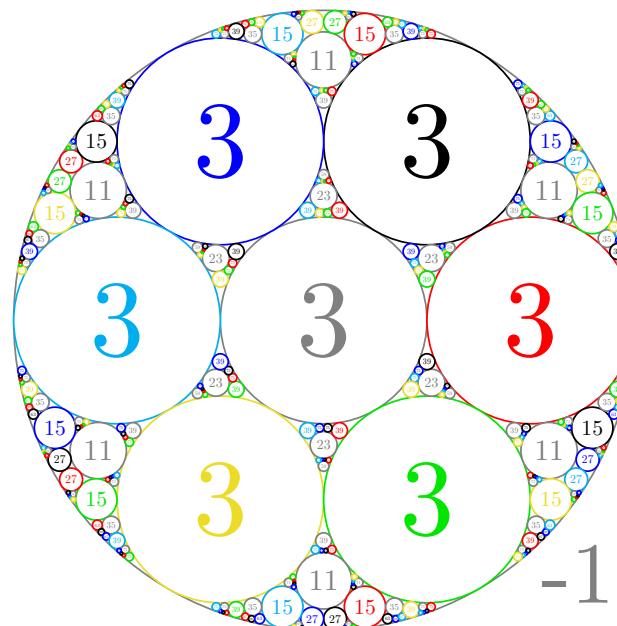
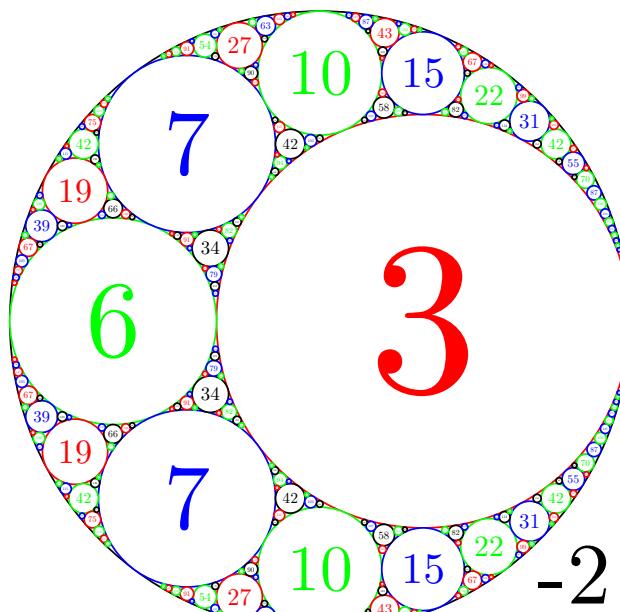
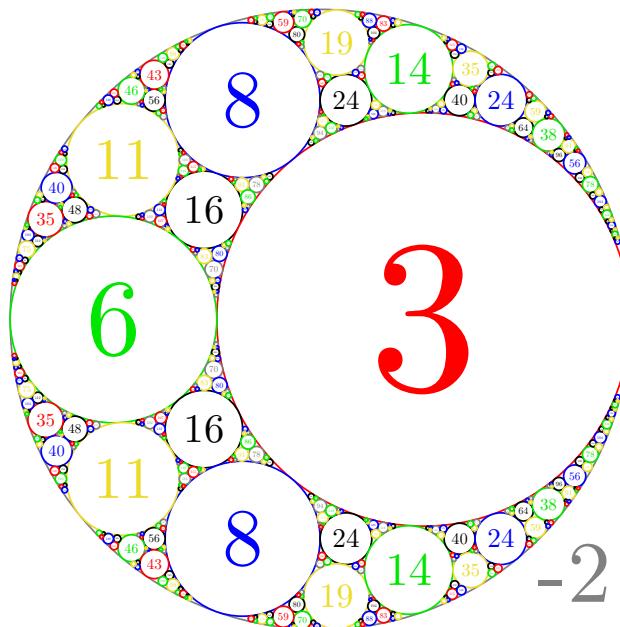


Figura 11: Empacotamento de Apolônio baseado em uma corrente de Steiner de 6 círculos $S_6[-2, 10; 3, 6, 15, 21, 18, 9]$.





Referências Bibliográficas

- [1] Schwartz, Richard Evan; Tabachnikov, Serge. Descartes circle theorem, Steiner porism, and spherical designs. *The American Mathematical Monthly*, v. 127, n. 3, p. 238-248, 2020.
- [2] Lagarias, Jeffrey C.; Mallows, Colin L.; Wilks, Allan R. Beyond the Descartes circle theorem. *The American mathematical monthly*, v. 109, n. 4, p. 338-361, 2002.
- [3] Zhang, Xin. On the local-global principle for integral Apollonian-3 Circle packings. 2014. Tese de Doutorado. State University of New York at Stony Brook.
- [4] Guettler, Gerhard; Mallows, Colin. A generalization of Apollonian packing of circles. *Journal of Combinatorics*, v. 1, n. 1, p. 1-27, 2010.
- [5] Carvalho, Paulo César Pinto. O logotipo da Olimpíada Brasileira de Matemática. *Eureka!* 4, p.42-46. OBM - Olimpíada Brasileira de Matemática, 1999.

Olimpíadas ao redor do mundo

A partir desta edição está de volta a seção **Olimpíadas ao redor do mundo**, um espaço onde o leitor terá a oportunidade de conhecer alguns problemas de destaque em diversas olimpíadas pelo mundo afora. Convidamos os leitores a enviar soluções. Nas próximas edições também estará de volta a seção "Como é que faz?", onde serão publicadas as soluções corretas dos problemas desta seção e outros que forem enviados por nossos leitores. As soluções dos problemas desta seção devem ser enviadas para o email (contato@associacaodaobm.org).

1. (MATHCOUNTS) Se a, b e c são números inteiros positivos tais que

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{6}{7},$$

qual é o valor de $a + b + c$?

2. (USAMO-2019) Seja \mathbb{N} o conjunto dos inteiros positivos. Considere \mathcal{C} o conjunto de todas as funções $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ que satisfazem a equação

$$\underbrace{f(f(\dots f(n) \dots))}_{f(n) \text{ vezes}} = \frac{n^2}{f(f(n))}$$

para todos os inteiros positivos n .

- Mostre que todas as funções em \mathcal{C} são injetivas.
 - Existe alguma função em \mathcal{C} tal que $f(2020) = 2021$?
 - Encontre uma função em \mathcal{C} tal que $f(2020) = 1000$.
3. (VJIMC 2019) Seja M uma matriz invertível $n \times n$ tal que suas entradas são números inteiros. Definimos a sequência $S_M = \{M_i\}_{i=0}^{\infty}$ pela recorrência $M_0 = M$, $M_{i+1} = (M_i^T)^{-1}M_i$ para $i \geq 0$. Encontre o menor inteiro $n \geq 2$ para o qual existe uma matriz normal com entradas inteiras e tamanho $n \times n$ tal que a sua sequência S_M não é constante e tem período $P = 7$, isto é, $M_i = M_{i+7}$. (M^T é a matriz transposta de M . Uma matriz quadrada M é tida como normal se $M^T M = M M^T$).
 4. (China) Sejam a, b, c números reais positivos. Prove que

$$(a+b)(b+c)(a+b+c) \geq \frac{5\sqrt{5}+11}{2}abc.$$

5. (França) Sejam a, b números naturais tais que:

$$4a^2 + a = 3b^2 + b.$$

Mostre que $b - a$ é um quadrado perfeito.

6. (Berkeley) Suponha que z_0, z_1, \dots, z_{n-1} são números complexos tais que $z_k = e^{2k\pi i/2}$ para $k = 0, 1, 2, \dots, n - 1$. Prove para qualquer número complexo z , tem-se que

$$\sum_{k=0}^{n-1} |z - z_k| \geq n.$$

7. (Albânia) É dado um triângulo ABC cujo circuncentro é o ponto O e o seu ortocentro é o ponto H. Se $\angle AOB = \angle AHB$ determine a medida do ângulo $\angle BAC$.

8. (Singapura) Para $a, b, c, d \geq 0$ tais que $a + b = c + d = 2$, prove que:

$$(a^2 + c^2)(a^2 + d^2)(b^2 + c^2)(b^2 + d^2) \leq 25.$$

9. (Romênia) Determine todas as funções $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ que satisfazem a relação

$$f(x^3 + y^3) = xf(y^2) + yf(x^2),$$

para quaisquer números reais x, y .

10. (AIME-2020) Seja P um ponto escolhido aleatoriamente no interior de um quadrado unitário de vértices $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(1, 1)$, e $(0, 1)$. A probabilidade de que a inclinação da linha determinada por P e o ponto $(\frac{5}{8}, \frac{3}{8})$ é maior ou igual a $\frac{1}{2}$ pode ser escrito como $\frac{m}{n}$, onde m e n são relativamente inteiros primos. Determine $m + n$.

Problemas propostos e soluções

Publicamos aqui algumas das respostas dos problemas da Eureka! 37 a 39 que foram enviadas por nossos leitores.

Solução dos Problemas Propostos Eureka! - 37

157. Sejam x e y inteiros positivos tais que $x^{2^n} - 1$ é divisível por $2^n y + 1$ para todo inteiro positivo n . Prove que $x = 1$.

Solução: Suponha por absurdo que $x > 1$. Escreva $y = 2^r z$, com $r \in \mathbb{N}$ e z ímpar. Seja Q o produto de todos os primos $q < x^2$ tais que $q \equiv 3 \pmod{4}$ e q não divide $2z+1$, e seja $n = 1+(r+1)\varphi((2z+1)^2 Q) \geq r+2$. Como $2^{(r+1)\varphi((2z+1)^2 Q)} \equiv 1 \pmod{(2z+1)^2 Q}$, segue que $2^{n-r}y+1 = 2^n z + 1 = 2^{(r+1)\varphi((2z+1)^2 Q)} \cdot (2z+1) \equiv 2z+1 \pmod{(2z+1)^2 Q}$. Assim, $2z+1 | 2^{n-r}y+1$ e, se q é um fator primo de Q , como q não divide $2z+1$, segue que q não divide $2^{n-r}y+1$. Escrevendo $2^{n-r}y+1 = (2z+1)m$, como $2^{n-r}y+1 = 2^n z + 1 \equiv 2z+1 \pmod{(2z+1)^2}$, segue que $m \equiv 1 \pmod{2z+1}$, e, em particular, $\text{mdc}(m, 2z+1) = 1$. Como $2^n z + 1 \equiv 1 \pmod{4}$ e $2^n z + 1 = 2^{n-r}y+1 = (2z+1)m$, temos $m \equiv 3 \pmod{4}$, pois, como z é ímpar, $2z+1 \equiv 3 \pmod{4}$. Em particular, m tem algum fator primo $\tilde{q} \equiv 3 \pmod{4}$, e como \tilde{q} não pode ser fator primo de $2z+1$ nem de Q , segue que $\tilde{q} \geq x^2$. Por outro lado, como $2^{n-r}y+1$ divide $x^{2^{n-r}} - 1$, temos em particular $x^{2^{n-r}} \equiv 1 \pmod{\tilde{q}}$. Como também temos $x^{\tilde{q}-1} \equiv 1 \pmod{\tilde{q}}$, segue que, se d é a ordem de x módulo \tilde{q} (isto é, o menor inteiro positivo k tal que $x^k \equiv 1 \pmod{\tilde{q}}$), temos que $d | \text{mdc}(2^{n-r}, \tilde{q}-1)$. Por outro lado, como $\tilde{q} \equiv 3 \pmod{4}$, temos que $\tilde{q}-1 \equiv 2 \pmod{4}$, e portanto $\text{mdc}(2^{n-r}, \tilde{q}-1) = 2$. Assim, $d | 2$, donde $x^2 \equiv 1 \pmod{\tilde{q}}$, ou seja, $\tilde{q} | x^2 - 1$, absurdo, pois $\tilde{q} \geq x^2$.

158. Ache todas as funções $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tais que

$$f(xy+1) = f(x+y) + f(x)f(y), \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Solução:

Fazendo $x = y = 1$, obtemos $f(2) = f(2) + f(1)^2$, donde $f(1) = 0$, e, fazendo $y = 0$, obtemos $0 = f(1) = f(x) + f(x)f(0)$, donde, ou f é identicamente nula, ou $f(0) = -1$.

Caso i) $f(-1) \neq 0$. Seja $g(x) = f(x+1)$. Então $f(x) = g(x-1)$, e a equação funcional fica $g(xy) = g(x+y-1) + g(x-1)g(y-1)$, para quaisquer x, y reais. Temos $g(0) = f(1) = 0$ e $g(-1) = f(0) = -1$. Além disso, $g(-2) = f(-1) \neq 0$. Fazendo $x = 2$ e $y = -1$, obtemos $g(-2) = g(0) + g(1)g(-2) = g(1)g(-2)$, donde $g(1) = 1$.

Fazendo $y = 2$, obtemos $g(2x) = g(x+1) + g(x-1)g(1) = g(x+1) + g(x-1)$, para todo x . Fazendo $y = -1$, obtemos $g(-x) = g(x-2) + g(-2)g(x-1) = g(x-2) + c.g(x-1)$, onde $c := g(-2)$. Trocando x por $-x$, obtemos $g(x) = g(-(x+2)) + c.g(-(x+1)) = g(x) + c.g(x+1) + c(g(x-1) + c.g(x))$, donde $0 = g(x+1) + g(x-1) + c.g(x)$. Como $g(-(x+1)) = g(x-1) + c.g(x)$, temos $0 = g(x+1) + g(-(x+1)) = 0$, ou seja, $g(y) + g(-y) = 0$ para todo y . Trocando (x, y) por $(-x, -y)$, obtemos $g(xy) = g(-x-y-1) + g(-x-1)g(-y-1) = -g(x+y+1) + g(x+1)g(y+1)$. Da equação funcional de g , temos $g((x+2)(y+2)) = g(x+y+3) + g(x+1)g(y+1)$. Portanto, $g(xy) + g(x+y+1) = g(x+1)g(y+1) = g((x+2)(y+2)) - g(x+y+3)$, donde $g(xy+2x+2y+4) = g((x+2)(y+2)) = g(xy) + g(x+y+1) + g(x+y+3) = g(xy) + g(2x+2y+4)$ (usando a identidade $g(2u) = g(u+1) + g(u-1)$ para $u = x+y+2$).

Vamos usar isso para mostrar que $g(u+v) = g(u)+g(v)$ para quaisquer u, v reais. De fato, fazendo $y = -x$, obtemos $-g(x^2-4) = g(-x^2+4) = g(-x^2) + g(4) = -g(x^2) + g(4)$, e logo $g(x^2-4) = g(x^2) - g(4)$, que, junto com $g(-x^2+4) = g(-x^2) + g(4)$ implicam que $g(z+4) = g(z) + g(4)$ para todo z real. Daí segue por uma indução simples que $g(z+4k) = g(z) + k.g(4)$, para todo z real e todo k natural. Dados u e v reais, podemos escolher k natural tal que $\frac{v+4k-4}{2} > 4u$, e o sistema $2x+2y+4 = v+4k$, $xy = u$ terá solução real x, y , donde $g(u+v+k.g(4)) = g(u+v+4k) = g(xy+2x+2y+4) = g(xy) + g(2x+2y+4) = g(u) + g(v+4k) = g(u) + g(v) + k.g(4)$, e logo $g(u+v) = g(u)+g(v)$. Usando isso (e $g(1) = 1$) em $g(xy) = g(x+y-1) + g(x-1)g(y-1)$, obtemos $g(xy) = g(x) + g(y) - 1 + (g(x)-1)(g(y)-1)$, ou seja, $g(xy) = g(x)g(y)$, para quaisquer x, y reais. Daí segue que $g(x) = x$ para todo x real. De fato, $g(k) = k.g(1) = k$ para todo k natural, e, como $g(-x) = -g(x)$ para todo x , segue que $g(k) = k$ para todo k inteiro; se p e q são inteiros e $q > 0$, $p = g(p) = g(q.p/q) = q.g(p/q)$, donde $g(p/q) = p/q$. Suponha por absurdo que para algum x real $g(x)$ não seja igual a x ; digamos que $g(x) < x$. Tome p/q um racional com $g(x) < p/q = g(p/q) < x$, donde, como $x-p/q > 0$, teríamos $0 \leq g(\sqrt{x-p/q})^2 = g((\sqrt{x-p/q})^2) = g(x-p/q) = g(x) - g(p/q) < 0$, absurdo. O caso $g(x) > x$ é análogo. Portanto $f(x) = g(x-1) = x-1$ para todo x real, o que claramente é uma solução.

Caso ii) $f(-1) = 0$. É claro que f identicamente nula dá uma solução. Suponhamos que não seja o caso. Então $f(0) = -1$ (e $f(1) = 0$). Fazendo $y = -1$ em $f(xy+1) = f(x+y) + f(x)f(y)$, obtemos $f(1-x) = f(x-1)$ para todo x real, ou seja, $f(-z) = f(z)$ para todo z real. Fazendo $y = -x$, temos $f(x^2-1) = f(1-x^2) = f(0) + f(x)f(-x) = f(0) + f(x)^2 \geq f(0)$. Assim, se $z \geq -1$, $f(z) \geq f(0)$. Trocando y por $-y$, temos $f(xy-1) = f(1-xy) = f(x-y) + f(x)f(-y) = f(x-y) + f(x)f(y)$. Subtraindo de $f(xy+1) = f(x+y) + f(x)f(y)$, temos $f(xy+1) - f(xy-1) = f(x+y) - f(x-y)$. Assim, se $uv = xy$, temos $f(x+y) - f(x-y) = f(xy+1) - f(xy-1) = f(uv+1) - f(uv-1) = f(u+v) - f(u-v)$. Seja h a função definida nos reais não-negativos por $h(x) = f(\sqrt{x}) - f(0) \geq 0$. Para $x, y \geq 0$, temos $h(x+y) - h(x) = f(\sqrt{x+y}) - f(\sqrt{x}) = f(\sqrt{y}) - f(0) = h(y)$ (pois, fazendo $r = (\sqrt{x+y} + \sqrt{x})/2$, $s = (\sqrt{x+y} - \sqrt{x})/2$ e $u = v = \sqrt{y}/2$, temos $r+s = \sqrt{x+y}$, $r-s = \sqrt{x}$, $u+v = \sqrt{y}$, $u-v = 0$ e $rs = y/4 = uv$). Assim, para quaisquer $x, y \geq 0$

temos $h(x+y) = h(x) + h(y)$. Como $h(1) = f(1) - f(0) = 1$, e $h(x) \geq 0$, para todo $x \geq 0$ temos, como no caso i), $h(x) = x$ para todo $x \geq 0$, ou seja, $f(\sqrt{x}) - f(0) = x$, para todo $x \geq 0$. Assim, $f(y) - f(0) = y^2$, para todo $y \geq 0$, donde $f(y) = y^2 + f(0) = y^2 - 1$ para todo $y \geq 0$. Como, para $y < 0$, $f(y) = f(-y) = (-y)^2 - 1 = y^2 - 1$, temos $f(y) = y^2 - 1$ para todo y real, função esta que satisfaz a equação funcional.

Assim, temos nesse caso $f(x) = 0$ para todo x real ou $f(x) = x^2 - 1$ para todo x real.

159. Dizemos que un conjunto $A \subset \mathbb{N}$ é *progressista* se, sempre que $x, y \in A$ com $x \leq y$, temos $2y - x \in A$. Prove que se A é progressista e $x, x + a_1, x + a_2, \dots, x + a_k \in A$ com $k \geq 2$ e $0 < a_1 < a_2 < \dots < a_k$ então $x + a_1 + a_k - 3d, x + a_1 + a_k - 2d \in A$, onde $d = \text{mdc}(a_1, a_2, \dots, a_k)$.

Solução: Substituindo x por $x + 2a_1$, temos un problema análogo, onde o novo menor elemento é $x + a_1$. O mdc não muda, pois $\text{mdc}(a_1, a_2 - a_1, a_3 - a_1, \dots, a_k - a_1) = \text{mdc}(a_1, a_2, \dots, a_k)$, a expressão correspondente a $x + a_1 + a_k = (x + a_1) + (x + a_k) - x$ não aumenta pois $x + a_1 + a_k = (x + 2a_1) + (x + a_k) - (x + a_1)$ não aumenta, mas o diâmetro (diferença entre o maior e o menor elemento da lista), que era a_k , e agora é o máximo entre a_1 e $a_k - a_1$, diminui. O número de elementos da lista não aumenta, mas pode diminuir, pois $2a_1$ pode ser igual a algum a_j com $j > 1$. Todos os números que aparecem são da forma $x + kd$, com k natural. Repetindo esse procedimento, em algum momento haverá apenas dois números na lista (pois o diâmetro não pode diminuir indefinidamente), e imediatamente antes os números devem ser $y, y + d, y + 2d$, com $y + 3d = (y + d) + (y + 2d) - y \leq x + a_1 + a_k$, e logo $y \leq x + a_1 + a_k - 3d$ é tal que y e $y + d$ pertencem a A , o que resolve o problema.

160. Considere a sequência definida por $a_n = \lfloor n\sqrt{2003} \rfloor$ para $n \geq 1$. Prove que, para quaisquer inteiros positivos m e p , a sequência contém m elementos em uma progressão geométrica de razão maior que p .

Solução: Como $44^2 < 2023 < 45^2$, segue que $\sqrt{2023}$ é irracional, pois não é inteiro, e, se fosse da forma p/q , com p, q inteiros, $q > 1$ e $\text{mdc}(p, q) = 1$, teríamos, elevando ao quadrado, $2023 = p^2/q^2$, absurdo, pois a fração p^2/q^2 é irredutível e $q^2 > 1$.

Vamos provar que, se $\alpha > 0$ é irracional, então, dado um inteiro positivo N , existem inteiros positivos q, r tais que $r < q\alpha < r + \frac{1}{N}$. Dado $N \in \mathbb{N}$, consideramos os $N+1$ elementos de $[0, 1]$ da forma $\{j\alpha\} := j\alpha - \lfloor j\alpha \rfloor$ (parte fracionária de $j\alpha$), com $0 \leq j \leq N$. Como $[0, 1] = \bigcup_{k=0}^{N-1} [\frac{k}{N}, \frac{k+1}{N}]$, existem dois desses elementos, digamos $\{j_1\alpha\}$ e $\{j_2\alpha\}$ num mesmo intervalo $[\frac{k}{N}, \frac{k+1}{N}]$ e, portanto, se $j_1 < j_2$, $k = j_2 - j_1 > 0$ e $s = \lfloor j_2\alpha \rfloor - \lfloor j_1\alpha \rfloor$, temos $0 < |k\alpha - s| < \frac{1}{N}$. Se $q\alpha - s > 0$, basta tomar $r = s$ e $q = k$. Já se $q\alpha - s < 0$, escrevemos $k\alpha = s - \varepsilon$, com $0 < \varepsilon < \frac{1}{N}$. Seja $M \in \mathbb{N}$ tal que $M\varepsilon < 1 \leq (M+1)\varepsilon$. Temos então $1 - M\varepsilon \leq \varepsilon < \frac{1}{N}$, donde $Mk\alpha = Ms - M\varepsilon = Ms - 1 + (1 - M\varepsilon)$, e basta tomar $r = Ms - 1$ e $q = Mk$.

Tomamos $\alpha = \sqrt{2003}$ e $N = (p+1)^m$. Existem então inteiros positivos q, r tais que $r < q\sqrt{2003} < r + \frac{1}{N}$. Portanto, para t inteiro com $1 \leq t \leq N = (p+1)^m$, temos

$\lfloor t \sqrt{2003} \rfloor = \text{tr}$. Tomando $t = (p+1)^n$, com $1 \leq n \leq m$, obtemos a progressão geométrica desejada.

161. Um sapo faz um caminho infinito no plano euclidiano da seguinte forma: no início ele está no ponto $(0,0)$, e, se num dado momento está no ponto (x,y) , no segundo salta para o ponto $(x+1,y)$ ou para o ponto $(x,y+1)$. Prova que, para todo inteiro positivo n , existe uma reta l tal que o sapo passa por pelo menos n pontos de l em seu caminho.

Solução: Seja (x_k, y_k) a posição do sapo após k passos. Temos $x_k + y_k = k, \forall k \in \mathbb{N}$. Dado um inteiro $k \geq 1$, sejam $a_k = \min\{\lfloor \frac{2^k x_n}{n} \rfloor, n \geq k\}$ e $b_k = \max\{\lceil \frac{2^k x_n}{n} \rceil, n \geq k\}$. Assim, o intervalo $I_k = [\frac{a_k}{2^k}, \frac{b_k}{2^k}]$ é o menor intervalo cujos extremos são racionais com denominador 2^k que contém os valores de $\frac{x_n}{n} = \frac{x_n}{x_n + y_n}$ para todo $n \geq k$; temos $I_k \supset I_{k+1}, \forall k \geq 1$, ou seja, os I_k formam uma família de intervalos encaixados. Temos então $\cap_{k \geq 1} I_k = [c, d]$ para certos c, d com $0 \leq c \leq d \leq 1$. Temos dois casos:

i) $c = d$. Nesse caso, como na solução do problema 160, existem $p, q \in \mathbb{N}$ com $q > 0$ e $0 \leq p \leq q$ tais que $0 \leq qc - p < \frac{1}{6n}$ (a solução do problema 160 trata do caso em que c é irracional, e o caso em que $c = \frac{p}{q}$ é trivial). Existe $m_0 \geq 1$ tal que $|\frac{x_m}{m} - c| < \frac{1}{6nq}$ para todo $m \geq m_0$. Temos $|qx_m - p(x_m + y_m)| = |qx_m - pm| = m|q\frac{x_m}{m} - p| \leq m|qc - p| + mq|\frac{x_m}{m} - c| < \frac{m}{6n} + \frac{m}{6n} = \frac{m}{3n}$. Dado $M > m_0$, existem $M - m_0 + 1$ valores de m com $m_0 \leq m \leq M$, para os quais $|qx_m - p(x_m + y_m)|$ assume no máximo $1 + \frac{2M}{3n}$ valores distintos, de modo que algum valor s deve ser assumido pelo menos

$$\frac{M - m_0 + 1}{1 + \frac{2M}{3n}} > n$$

valores distintos para M grande (de fato basta tomar $M = 3(n + m_0)$). Assim, haverá pelo menos n pontos percorridos pelo sapo na reta $qx - p(x + y) = s$.

ii) $c < d$. Nesse caso, escolha um racional $\frac{p}{q}$ com $c < \frac{p}{q} < d$. Segue da definição de c e d que $\frac{x_m}{m} - \frac{p}{q}$, (e logo também $qx_m - pm = qx_m - p(x_m + y_m)$) troca de sinal infinitas vezes. Como, para todo $m \geq 1$, $|qx_m - p(x_m + y_m) - (qx_{m+1} - p(x_{m+1} + y_{m+1}))| \leq \max\{p, q\} = q$, se $qx_m - p(x_m + y_m)$ e $qx_{m+1} - p(x_{m+1} + y_{m+1})$ têm sinais distintos, temos $|qx_m - p(x_m + y_m)| \leq q$, e portanto, para algum inteiro s com $|s| \leq q$, $qx_m - p(x_m + y_m) = s$ para infinitos valores de m , o que resolve o problema.

162. Uma prova da IMO tem 6 problemas, e cada problema de cada participante recebe uma nota inteira n com $0 \leq n \leq 7$. Dizemos que duas provas de dois participantes são comparáveis se uma delas, digamos a do participante A é menor ou igual à prova do participante B, no seguinte sentido: em cada um dos 6 problemas a nota do participante A é menor ou igual à nota do participante B. Determine o menor inteiro positivo m tal que, se houver m participantes numa IMO, necessariamente haverá duas provas comparáveis.

Solução: Vamos considerar uma situação mais geral em que há $k \geq 1$ questões, e, para $1 \leq j \leq k$, a questão j vale n_j pontos, i.e., a nota da questão j pertence a $\{0, 1, 2, \dots, n_j\}$. Assim, o conjunto das provas (ou, mais precisamente, das pontuações) possíveis é $X = \prod_{j=1}^k \{0, 1, 2, \dots, n_j\}$. Dada uma prova $P = (m_1, m_2, \dots, m_k) \in X$, sua *nota total* é $n(P) = \sum_{j=1}^k m_j$. Um subconjunto $C \subset X$ é uma *cadeia* se duas provas quaisquer em C são comparáveis (no sentido do enunciado); é uma *cadeia lenta* se existem inteiros $a \leq b$ tais que $\{n(P), P \in C\} = [a, b] \cap \mathbb{Z}$, e é uma *cadeia simétrica lenta* se tais inteiros a, b satisfazem $a + b = \sum_{j=1}^k n_j$ (que é a nota máxima da prova, ou seja, se a nota média da cadeia lenta é metade da nota máxima).

Vamos provar por indução em k que X sempre pode ser decomposto como uma união disjunta de cadeias simétricas lentas. O caso $k = 1$ é trivial: X é uma cadeia simétrica lenta nesse caso. Para fazer o passo de indução, basta provar que, se $C = \{P_1 < P_2 < \dots < P_m\}$ é uma cadeia simétrica lenta, então é possível decompor $C \times \{0, 1, 2, \dots, n_{k+1}\}$ como uma união disjunta de cadeias simétricas lentas. Isso pode ser provado por indução em m , tomando uma das novas cadeias simétricas lentas como $(P_1, 0), (P_1, 1), \dots, (P_1, n_{k+1}), (P_2, n_{k+1}), \dots, (P_m, n_{k+1})$, sobrando $\{P_2, P_3, \dots, P_m\} \times \{0, 1, \dots, n_{k+1} - 1\}$ para decompor como união de cadeias simétricas lentas, o que é possível pela hipótese de indução.

Assim, o conjunto das provas da IMO pode ser decomposto como uma união de cadeias simétricas lentas. Se todas as provas de um conjunto são incomparáveis, há no máximo uma dessas provas em cada cadeia simétrica lenta, e logo o número de provas no conjunto é no máximo o número de cadeias na decomposição. Por outro lado, cada cadeia simétrica lenta contém exatamente uma prova com nota total 21, de modo que o conjunto tem no máximo N elementos, onde N é o número de provas com nota total 21, e como duas provas distintas com nota total 21 são sempre incomparáveis, a resposta é $N + 1$. Basta agora calcular N .

O número de soluções de $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 21$ com $x_j \geq 0, \forall j \leq 6$ é $\binom{26}{5}$. Se, para $j \leq 6$, X_j é o conjunto de tais (x_1, \dots, x_6) com $x_j \geq 8$, queremos excluir a união dos X_j . Como não pode haver três valores de $x_j \geq 8$ (pois a soma de x_i é 21), o número de elementos da união dos X_j é $\sum_{j \leq 6} |X_j| - \sum_{1 \leq i < j \leq 6} |X_i \cap X_j|$. Escrevendo $x_j = 8 + y_j$ para as soluções em X_j , segue que $|X_j| = \binom{18}{5}$ para $j \leq 6$ e $|X_i \cap X_j| = \binom{10}{5}$ para $1 \leq i < j \leq 6$. Assim, $N = \binom{26}{5} - 6\binom{18}{5} + \binom{6}{2}\binom{10}{5} = 18152$, e a resposta do problema é $N + 1 = 18153$.

Solução dos Problemas Propostos Eureka! - 39

163. A equação quadrática $x^2 - 3x + q = 0$ possui duas raízes α e β . Se $\alpha^3 + \beta^3 = -81$. Determine o valor de q .

Solução: Temos que $x^2 - 3x + q = 0$. Como α e β são suas duas raízes, podemos escrever

a equação como $(x - \alpha)(x - \beta) = 0$. Dessa forma, obtemos as duas relações a seguir:

$$\alpha + \beta = 3 \quad \text{e} \quad \alpha\beta = q \quad (1)$$

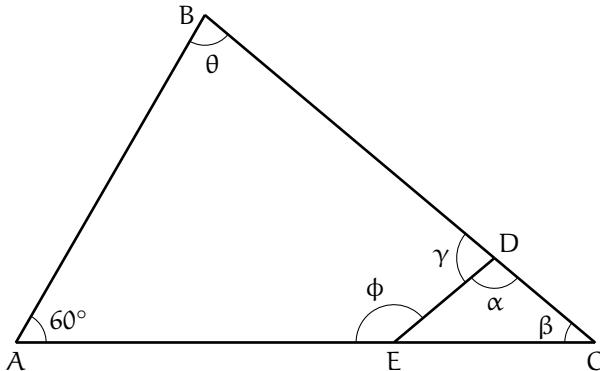
Elevando a primeira relação ao cubo temos que

$$27 = (\alpha + \beta)^3 = \alpha^3 + \beta^3 + 3\alpha\beta(\alpha + \beta),$$

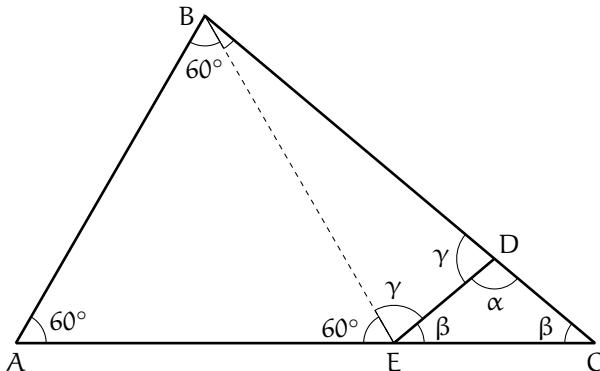
desta forma $27 = -81 + 3\alpha\beta \cdot 3$ e portanto $\alpha\beta = \frac{108}{9} = 12$.

164. Em um triângulo ABC sejam D e E pontos sobre os lados BC e AC, respectivamente, tais que $AB = BD = AE$. Se $\angle BAE = 60^\circ$ e $DE = DC$, determine a medida do ângulo $\angle EDC$.

Solução: Primeiro, vamos nomear os ângulos de acordo com a figura abaixo:



Observemos que $\angle DEC = \beta$, pois DEC é um triângulo isósceles. Se traçarmos um segmento que liga B a E obtemos dois novos triângulos, ABE e BED . Eles também são isósceles, sendo que o fato de $\angle BAE$ ser de 60° implica em ABE ser um triângulo equilátero.



Dessa maneira, $BE = AB = BD$, o que implica que o triângulo EBD é isósceles com $\gamma := \angle EDB = \angle DEB = 180 - \alpha$. Agora, observemos que

$$180 = 60 + \gamma + \beta \quad \text{e} \quad 180 = 2\beta + \alpha.$$

Substituindo a relação que temos para γ na primeira equação acima temos que $\beta = \alpha - 60$ e, por fim, substituindo na segunda, $180 = 3\alpha - 120$, o que nos dá

$$\alpha = 100^\circ.$$

165. Seja A um subconjunto de 84 elementos do conjunto $\{1, 2, 3, \dots, 169\}$ tal que em A não existem dois elementos cuja soma é 169. Prove que A possui pelo menos um quadrado perfeito.

Solução: Se 169 pertence a A o problema está resolvido, assim podemos supor que não pertence. Observemos que a única forma de escrever 169 como soma de dois quadrados é $169 = 5^2 + 12^2$. Suponhamos que o conjunto A não possui nenhum quadrado, em particular o conjunto $B = A \cup \{5^2\}$ não possui dois números tais que sua soma seja 169. Agora, consideremos os 84 conjuntos

$$\{1, 168\}, \{2, 167\}, \dots, \{84, 85\}.$$

Como B pode ter no máximo um elemento em comum com cada um desses conjuntos, segue que B tem no máximo 84 elementos, o que é contraditório.

Uma pergunta interessante é se podemos trocar 84 por um número menor, ou equivalentemente podemos transformar a pergunta na seguinte: Qual é o menor valor de n tal que se temos um subconjunto de $\{1, 2, \dots, 169\}$ com n elementos tais que não existem dois elementos em A com soma igual a 169, então A possui pelo menos um quadrado.

166. É possível encontrar 2005 quadrados perfeitos diferentes tais que sua soma também é um quadrado perfeito?

Solução: Primeiro, observe que para qualquer n par, existem s e t naturais tais que $n^2 = s^2 - t^2$. Isso ocorre pois, da igualdade obtemos $n^2 = (s+t)(s-t)$ e, como n é par, $\frac{n^2}{2}$ é natural o que permite tomar $s+t = \frac{n^2}{2}$ e $s-t = 2$, e, portanto, possíveis valores que satisfazem a relação são

$$s = \frac{\frac{n^2}{2} + 2}{2} \quad \text{e} \quad t = \frac{\frac{n^2}{2} - 2}{2},$$

que números naturais. Observemos que no caso que n seja ímpar, também é possível fazer um processo similar obtendo que

$$n^2 = \left(\frac{n^2+1}{2}\right)^2 - \left(\frac{n^2-1}{2}\right)^2.$$

Sendo assim, dada uma soma de quadrados perfeitos que gera um quadrado perfeito

$$a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_k^2 = n^2,$$

se n é par podemos realizar o processo anterior, obtendo uma soma com $k+1$ elementos, agora, se n não é par, multiplicamos a equação por 4 dos dois lados, ficando com $(2n)^2$, o que permite realizar o processo desejado. Dessa forma, a partir de uma expressão como $3^2 + 4^2 = 5^2$ é possível encontrar 2005 quadrados perfeitos cuja soma seja um quadrado perfeito.

Uma segunda solução, pode ser obtida de forma induktiva da seguinte forma: Se n é soma de k quadrados, digamos

$$a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_k^2 = n^2,$$

como $(3n)^2 + (4n)^2 = (5n)^2$, segue que usando estas duas últimas equações obtemos que

$$(3a_1)^2 + (3a_2)^2 + \cdots + (3a_k)^2 + (4n)^2 = (5n)^2$$

isto é, $(5n)^2$ é soma de $k+1$ quadrados.

167. Prove que $\frac{n^2 + 1}{[n]^2 + 2}$ não é inteiro para nenhum $n \in \mathbb{N}$.

Solução: O problema é trivial com o enunciado original, pois o numerador sempre é menor que o denominador. Se no enunciado permitirmos que o n seja um número real, neste caso o quociente é igual a 1 para infinitos valores de n . O problema é interessante e correto supondo que n pode assumir valores racionais.

Suponhamos que n é um número racional, assim ele pode ser escrito como $n = m + \frac{a}{b}$, onde n, a, b são números inteiros, com $0 < a < b$ e primos entre si. Como o quociente $\frac{n^2 + 1}{[a]^2 + 2}$ sempre está entre 0 e 2, a única possibilidade para ser inteiro é que seja igual a 1. Assim

$$\left(m + \frac{a}{b}\right)^2 + 1 = m^2 + 2.$$

Expandindo obtemos que $2\frac{am}{b} + \frac{a^2}{b^2} + 1 = 2$ e multiplicando por b^2 obtemos que

$$2amb + a^2 = b^2.$$

Desta igualdade segue que $a^2 = b(b - 2am)$, logo b divide a^2 o que é contraditório.

168. Determine todas as funções $* : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$ que são comutativas, associativas e satisfazem $0 * 0 = 0$ e $(x * c) * (y * c) = (x * y) + c, \forall x, y, c \in \mathbb{Q}$.

Solução: Seja $f(x) = x * 0$. Temos $f(0) = 0$ e $x * y = (x - y + y) * (0 + y) = (x - y) * 0 + y = f(x - y) + y, \forall x, y \in \mathbb{Q}$. A condição de $*$ ser comutativa se escreve como $y + f(x - y) =$

$x * y = y * x = x + f(y - x)$, ou seja, $f(y - x) = y - x + f(x - y), \forall x, y \in \mathbb{Q}$, o que equivale a $f(z) = z + f(-z), \forall z \in \mathbb{Q}$. A associatividade se escreve como $z + f(y - z + f(x - y)) = z + f(x * y - z) = (x * y) * z = x * (y * z) = (y * z) + f(x - (y * z)) = z + f(y - z) + f(x - z - f(y - z))$, ou seja, $f(y - z + f(x - y)) = f(y - z) + f(x - z - f(y - z))$, que equivale (fazendo $u = x - y$ e $v = y - z$) a $f(v + f(u)) = f(v) + f(u + v - f(v)), \forall u, v \in \mathbb{Q}$. Fazendo $v = 0$ obtemos $f(f(u)) = f(u), \forall u \in \mathbb{Q}$. Seja I a imagem da função f . Então $f(y) = y \iff y \in I$. Por outro lado, como $f(y) = y + f(-y)$, temos $y \in I \iff f(y) = y \iff f(-y) = 0$. Além disso, dados $v, z \in \mathbb{Q}$, fazendo $u = z + f(v) - v$, temos $f(v) + f(z) = f(v) + f(u + v - f(v)) = f(v + f(u))$, ou seja, $I + I \subset I$ (i.e., se $r, s \in I$ então $r + s \in I$). Daí segue por indução que se $r \in I$ e $n \in \mathbb{N}$ então $nr \in I$. Não podemos ter dois elementos em I com sinais contrários: se $r = p/q > 0$ e $s = -m/n < 0$ pertencessem a I (com $p, q, m, n > 0$), teríamos $pm = qmr \in I$ e $-pm = pns \in I$, mas então $f(pm) = pm$, donde $f(-pm) = 0$, mas devemos ter $f(-pm) = -pm$, absurdo. Assim, $I \subset \mathbb{Q}^+ = \{x \in \mathbb{Q}; x \geq 0\}$ ou $I \subset \mathbb{Q}^- = \{x \in \mathbb{Q}; x \leq 0\}$. Não há perda de generalidade em supor que $I \subset \mathbb{Q}^+$. De fato, se f satisfaz as condições acima, a função $g(x) = -f(-x)$ também satisfaz: temos $g(0) = 0$, $g(z) = -f(-z) = z - f(z) = z + g(-z), \forall z \in \mathbb{Q}$ e $g(v + g(u)) = -f(-(v + g(u))) = -f(-v + f(-u)) = -(f(-v) + f(-u - v - f(-v))) = g(v) + g(u + v - g(v))$. Assim, se a imagem de f está contida em \mathbb{Q}^- , então a imagem de g está contida em \mathbb{Q}^+ .

Vamos então supor que a imagem I de f está contida em \mathbb{Q}^+ . Vamos provar que $I = \mathbb{Q}^+$, e portanto $f(x) = \max\{x, 0\}, \forall x \in \mathbb{Q}$, o que implica $x * y = f(x - y) + y = \max\{x - y, 0\} + y = \max\{x, y\}, \forall x, y \in \mathbb{Q}$, o que é uma solução (no caso em que $I \subset \mathbb{Q}^-$ temos $g(x) = -f(-x) = \max\{x, 0\}, \forall x \in \mathbb{Q}$, donde $f(x) = -\max\{-x, 0\} = \min\{x, 0\}, \forall x \in \mathbb{Q}$, e $x * y = f(x - y) + y = \min\{x - y, 0\} + y = \min\{x, y\}, \forall x, y \in \mathbb{Q}$, o que também é uma solução).

Como $f(1) = 1 + f(-1)$, temos $f(1) \neq 0$ ou $f(-1) \neq 0$. Escolhendo $a \in \{-1, 1\}$ tal que $f(a) \neq 0$, teremos $f(a) > 0$. Escrevendo $f(a) = m/n$, com m e n inteiros positivos, temos $m/n \in I$, donde $m = n \cdot m/n \in I$. Suponha que existe $y > 0$ tal que $y \notin I$. Em particular $f(y) \neq y$. Assim, $d = f(y) - y \neq 0$, e $d = f(-y) \in I$. Em particular $d > 0$. Escrevamos $f(y) = a/u$ e $f(-y) = b/v$, com a, u, b, v inteiros positivos. Como $f(y) = a/u$ e $f(-y) = b/v$ pertencem a I , $(muv - 1)f(-y) + f(y) = muv + f(y) - f(-y) = muv + y \in I$. Assim, para $0 \leq j \leq muv - 1$, temos $j(mu + y) \in I$ e $(muv - 1)mu + jy = (muv - 1 - j)mu + j(mu + y) \in I$, donde $f((muv - 1)mu + jy) = (muv - 1)mu + jy$ para $0 \leq j \leq muv - 1$. Note agora que, se $f(z) = z$ e $f(z + y) = z + y$ então $z + y = f(z + y) = f(y + f(z)) = f(y) + f(y + z - f(y)) = y + d + f(z - d)$, donde $f(z - d) = z - d$. Assim, se $f(z + jy) = z + jy$ para $0 \leq j \leq muv - 1$, para $j = 0$ obtemos $f(z) = z$, donde $z \in I$ e $z + muv y = z + m(av - bu) \in I$. Da observação anterior, segue que $f(z - d + jy) = z - d + jy$ para $0 \leq j \leq muv - 1$. Por indução segue que $f(z - kd + jy) = z - kd + jy$ para todo $k \in \mathbb{N}$ e $0 \leq j \leq muv - 1$. Em particular, para $j = 0$, temos $f(z - kd) = z - kd$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Como já mostramos que $f((muv - 1)mu + jy) = (muv - 1)mu + jy$ para $0 \leq j \leq muv - 1$, segue que $f((muv - 1)mu - kd) = (muv - 1)mu - kd$ para todo $k \in \mathbb{N}$, mas, como $d > 0$, podemos tomar $k \in \mathbb{N}$ tal que $t = (muv - 1)mu - kd < 0$, o que é uma contradição,

pois teríamos $f(t) = t \in I$, mas $I \subset \mathbb{Q}^+$, absurdo.

Assim, as duas operações que satisfazem as condições do enunciado são $x * y = \max\{x, y\}, \forall x, y \in \mathbb{Q}$ e $x * y = \min\{x, y\}, \forall x, y \in \mathbb{Q}$.

As resoluções dos problemas 157 a 168 foram sugeridas pelo professor Carlos Gustavo Tamm de Araújo Moreira (Gugu) - IMPA.

Problemas propostos

Convidamos o leitor a enviar soluções dos problemas propostos e sugestões de novos problemas para próximos números. (As soluções devem ser enviadas para o email contato@associacaodaobm.org).

169. Qual o menor número de operações necessárias para chegar ao número 25 partindo do número 11 utilizando apenas a multiplicação por 2 e a subtração de 3?

170. Seja r a raiz de maior módulo do polinômio $P(x) = x^4 + 3x^3 - 3x^2 + 3x - 1$. Determine inteiro mais próximo de r^7 .

171. Considere a equação $x^6 + 5x^5 + 4x^4 + 4x^2 + 5x + 1 = 0$. Se uma das raízes da equação é $w \neq -1$, qual o valor de $3w^4 + 9w^3 - 9w^2 + 9w + 4$?

172. Sejam a , b e c números reais positivos tais que

$$a + b + c + ab + bc + ca + abc = 7.$$

Prove que $\sqrt{a^2 + b^2 + 2} + \sqrt{b^2 + c^2 + 2} + \sqrt{c^2 + a^2 + 2} \geq 6$.

173. Seja $\triangle ABC$ um triângulo com incentro I. Os pontos P e Q foram escolhidos sobre os segmentos BI e CI de tal forma que $\angle BAQ$ é o dobro de $\angle PAQ$. Se D é o ponto de contato do incírculo com o lado BC, prove que $\angle PDQ = 90^\circ$.

174. Em um triângulo acutângulo ABC que tem circuncírculo de centro O, sejam D e E pontos sobre AB e AC respectivamente, tais que DE e AO são perpendiculares. Seja K um ponto sobre a reta BC diferente do ponto de interseção de AO com BC. A reta AK corta o circuncírculo de ADE em L, um ponto diferente de A. Seja M o ponto simétrico de A com respeito à linha DE. Mostre que K, L, M e O formam um quadrilátero concíclico.

175. Quatro circunferências de raio 1 com centro em A, B, C e D estão no plano de tal forma que cada circunferência é tangente a duas das outras. Uma quinta circunferência passa pelos centro de duas das circunferências e é tangente às outras duas. Encontrar os possíveis valores para a área do quadrilátero ABCD.

176. Mostre que $\int_0^{\pi} \frac{1}{1 + 2023^{\cos x}} dx = \frac{\pi}{2}$.

177. Mostre que a matriz

$$A = \begin{pmatrix} 20212021 & 20222022 & 20242024 & 20262026 & 20282028 & 20302030 \\ 20212032 & 20222021 & 20242026 & 20262028 & 20282024 & 20302032 \\ 20212024 & 20222032 & 20242021 & 20262026 & 20282028 & 20302022 \\ 20212028 & 20222026 & 20242024 & 20262021 & 20282022 & 20302032 \\ 20212028 & 20222026 & 20242024 & 20262022 & 20282021 & 20302032 \\ 20212028 & 20222026 & 20242024 & 20262022 & 20282032 & 20302021 \end{pmatrix}$$

é invertível.

178. Euler provou que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$. Sendo $\mathcal{P} = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, \dots\}$, o conjunto dos números primos, determine o valor $\prod_{p \in \mathcal{P}} \frac{p^2}{p^2 - 1}$

179. Se $n > 2$ é um inteiro, mostre que pelo menos um entre os números $2^n - 1$ e $2^n + 1$ não é primo.

180. Sejam a, b, c, x, y e z números inteiros tais que

$$ax^5 + by^5 + cz^5 > ax + by + cz.$$

Mostre que $ax^5 + by^5 + cz^5 \geq ax + by + cz + 30$.

181. Prove que existe um número real $\alpha > 1$ tal que, para todo inteiro positivo n , $\{\alpha^n\} = \alpha^n - \lfloor \alpha^n \rfloor \in (1/3, 2/3)$ e, além disso, $\lfloor \alpha^n \rfloor$ é par se, e somente se, n é primo.

Os problemas 169 a 174 foram enviados pelo professor Fábio Brocheiro - UFMG; 175 a 180 foram propostos por Carlos A. Gomes - UFRN ; o problema 181 por Carlos Gustavo Tamm de Araújo Moreira (Gugu) - IMPA.

Coordenadores regionais

ALAGOAS

Cristiane França Nunes Moreira - PIRANHAS
Krerley Irraciel Martins Oliveira UFAL MACEIÓ

AMAPÁ

Arthur william Matias Gonçalves	IFAP	LARANJAL DO JARI
André Luiz Dos Santos Ferreira	IFAP	MACAPÁ
Lucicleuma Lobato do Amaral	-	PORTO GRANDE
Márleson Rôndiner dos Santos Ferreira	-	SANTANA
Tobias de Cabral Braga	-	PORTO GRANDE

AMAZONAS

Disney Douglas de Lima Oliveira UFAM MANAUS

BAHIA

Gabriel Farias Silva	-	XIQUE-XIQUE
Marcos Grilo Rosas	UEFS	FEIRA DE SANTANA
Nestor Felipe Castañeda Centurión	-	ILHÉUS
Samuel Barbosa Feitosa	UFBA	SALVADOR

CEARÁ

Antônio Caminha Muniz Neto	UFC	FORTALEZA
Edvalter da Silva Sena Filho	-	SOBRAL
Flávio França Cruz	URCA	JUAZEIRO DO NORTE
Francisco Odécio Sales	IFCE	ITAPIPOCA
Romílco José da Silva	UFC	FORTALEZA
Sâmara Costa Lima	URCA	JUAZEIRO DO NORTE

DISTRITO FEDERAL

Diego Marques UNB BRASÍLIA

ESPÍRITO SANTO

Florêncio Ferreira Guimarães Filho UFES VITÓRIA
Valdinei Cezar Cardoso UFES SÃO MATEUS

GOIÁS

Ana Paula de Araújo Chaves	UFG	GOIÂNIA
Márcio Antônio Ferreira Belo Filho	-	RIO VERDE
Otávio Marçal Leandro Gomide	UFG	GOIÂNIA

MARANHÃO

Arlane Manoel Silva Vieira	UFMA	CODÓ
Cleber Araújo Cavalcanti	-	SÃO LUIZ
Francisco Pessoa de Paiva Júnior	-	SANTA INÉS

MATO GROSSO

Diego Piasson	UNEMAT	BARRA DO BUGRES
Fernanda Palhares Maringolo Sekimura	UFMT	CUIABÁ

MATO GROSSO DO SUL

Edgard José Dos Santos Arinos COLÉGIO MILITAR CAMPO GRANDE

MINAS GERAIS

Aldo Peres Campos e Lopes	-	ITABIRÁ
Antônio Carlos Nogueira	UFU	UBERLÂNDIA
Beatriz Casulari da Motta Ribeiro	UFJF	JUIZ DE FORA
Carlos Eustáquio Pinto	-	BETIM
Ceile Cristina Ferreira Nunes	-	PIUMHI
Daniele Cristina Gonçalves	UEMG	JOÃO MONTEVADE
Joelson Dayvison Veloso Hermes	IFSULDEMÍNAS	INCONFIDENTES
José Jozelmo Grangeiro Vieira	CEFET-MG	TIMÓTEO
Lúcio Paccori Lima	UFV	FLORESTAL
Luccas Cassimiro Campos	UFMG	BELO HORIZONTE
Márcio Fialho Chaves	UFLA	LAVRAS
Renato Machado Pereira	IFSULDEMÍNAS	POÇOS DE CALDAS
Rosivaldo Antônio Gonçalves	UNIMONTES	MONTES CLAROS
Sávio Ribas	UFOP	OURO PRETO

PARÁ

Adenilson Pereira Bonfim	ETRB	BELÉM
Claudionei Pereira de Oliveira	-	MARABÁ
Jocimar Albernaz Xavier	IFPA	PARAGOMINAS
Mário Tanaka Filho	UFOPA	SANTARÉM
Valdelírio da Silva e Silva	-	CASTANHAL

PARAÍBA

Felipe Wallison Chaves Silva	UFPB	JOÃO PESSOA
Marcelo Carvalho Fereira	-	CAMPINA GRANDE

PARANÁ

Bruno Leonardo Macedo Ferreira	UTFPR	GUARAPUAVA
Eduardo de Amorim Neves	UEM	MARINGA
Elisângela Dos Santos Meza	UEPG	PONTA GROSSA
José Carlos Corrêa Eidam	UFPR	CURITIBA
Magna Natália Marin Pires	-	LONDRINA
Marciano Pereira	UEPG	PONTA GROSSA

PERNAMBUCO

Daniel dos Santos Rocha	-	ARCOVERDE
Jonas José Cruz dos Santos	IFPE	GARANHUNS
Luiz Paulo Freire Moreira	UFPE	RECIFE
Thiago Dias Oliveira Silva	UFRPE	RECIFE

PIAUÍ

Antônio Cardoso do Amaral	UFPI	TEREZINA
Carlos Augusto David Ribeiro	UFPI	PARNAÍBA
Francimmar de Brito Vieira	-	CORRENTE
Hilquias Santos de Oliveira	-	FLORIANO

RIO DE JANEIRO

Alex Cabral Barbosa	IFF	CAMPO DOS GOYTACAZES
Jones Colombo	-	NITERÓI
Leonardo Augusto Zão	IME	RIO DE JANEIRO
Luis Humberto Guillermo Felipe	-	CAMPO DOS GOYTACAZES
Nara Bobko	-	RIO DE JANEIRO
Rafael Filipe dos Santos	COLÉGIO PENSI	RIO DE JANEIRO
Renata Martins da Rosa	-	RIO DE JANEIRO

RIO GRANDE DO NORTE

Carlos Alexandre Gomes da Silva UFRN NATAL

RIO GRANDE DO SUL

Álvaro Krüger Ramos	UFRGS	PORTO ALEGRE
Malcus Cassiano Kuhn	-	LAJEADO
Márcio Luís Miotto	UFSM	SANTA MARIA
Paulo Marcus Hollweg Corrêa	-	SAPUCAIA DO SUL

RONDÔNIA

Vlademir Fernandes de Oliveira Júnior UFRO PORTO VELHO

RORAIMA

Gilson de Souza Costa UFRR BOA VISTA

SANTA CATARINA

Felipe Vieira - BLUMENAL
 Milton Kist - CHAPECÓ

SÃO PAULO

Américo López Gálvez	USP	RIBEIRÃO PRETO
Armando Ramos Gouveia	ITA	SÃO JOSÉ DOS CAMPOS
Edson Roberto Abe	-	CAMPINAS
Débora Bezerra Linhares Libório	FSA	SANTO ANDRÉ
Emiliano Chagas	IFSP	SÃO PAULO
Giuliano Zuglianí		CAMPINAS
João Carlos Ferreira Costa	UNESP	SÃO JOSÉ DO RIO PRETO
Lucas Colucci	IME-USP	SÃO PAULO
Maurício Richartz	UFABC	SANTO ANDRÉ
Marina Mariano de Oliveira	-	SÃO JOSÉ DOS CAMPOS
Ronaldo Penna Saraiva	UNISANTOS	SANTOS
Samuel Lilo Abdalla		SOROCABA
Parham Salehyan	UNESP	SÃO JOSÉ DO RIO PRETO
Pedro Tavares Paes Lopes	ICMC	SÃO CARLOS
Plamen Kochloukov	UNICAMP	CAMPINAS
Thaís Fernanda Mendes Monis	-	SANTO ANDRÉ

SERGIPE

Antônio Márcio de Lima Soares	-	PAULO AFONSO
Valdenberg Araújo da Silva	UFSE	ARACAJÚ

TOCANTINS

Jaime do Espírito Santo Vieira Júnior	-	PALMAS
Sâmara Leandro Matos da Silva	-	ARAGUAÍNA