Eureka!

N° 44

OBM - Olimpíada Brasileira de Matemática

Janeiro - 2026

Sociedade Brasileira de Matemática - SBM
Presidente: Jaqueline Godoy Mesquita.

Apoio:
Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico - CNPq

Comissão Nacional de Olimpíada de Matemática da SBM
Av. Rio Branco, 109 sala 703 - Centro, Rio de Janeiro - RJ CEP 20040-004
Telefone: (21) 2391-8072
e-mail: contato@associacaodaobm.org   Página eletrônica: www.obm.org.br

Editores Responsáveis:
Carlos Alexandre Gomes da Silva.
Carlos Gustavo Tamm de Araújo Moreira.
Davi Lopes Alves de Medeiros.
Fábio Enrique Brochero Martinez.

Digitação e Figuras:
Carlos Alexandre Gomes da Silva
Carlos Augusto David Ribeiro.

Tiragem:
3000 exemplares

EUREKA! 44, 2026 - ISSN 1415-479X

Desenho da Capa:
Carolina Fontenelle de Mello Souza.
Daniel Assunção Andrade.

Diagramação Final:
Carlos Alexandre Gomes da Silva.

Sumário

Aos leitores

Esta é a edição de número 44 da Eureka!. Nesta edição trazemos os enunciados, gabaritos e propostas de soluções dos problemas propostos nos níveis $1, 2, 3$ e universitário das três fases da 38^a edição da OBM - Olimpíada Brasileira de Matemática - 2016. Há tempos muitas dessas soluções já se encontram disponíveis no site oficial da OBM (www.obm.org.br). Apesar disso, algumas das soluções aqui apresentadas muitas vezes sofreram acréscimos em favor da clareza do entendimento, especialmente para o público mais jovem e menos experiente. Além disso, também foram acrescidas aqui as soluções dos problemas da terceira fase, que não se encontravam originalmente disponíveis no site.

Esperamos que a comunidade olímpica sinta-se estimulada e continue, com o entusiasmo de sempre, contribuindo para a manutenção desse importante canal de comunicação que é a nossa revista Eureka! Problemas, soluções, sugestões, artigos são muito bem vindos. Para enviá-los basta seguir as instruções publicadas em nosso endereço eletrônico https://www.obm.org.br/ ou escrever para

contato@associacaodaobm.org

O presente número da Eureka! foi editado pelos professores Carlos Alexandre Gomes da Silva - DMAT - UFRN, Fábio Brochero - UFMG e Carlos Gustavo Tamm de Araújo Moreira - IMPA-RJ, Não podemos deixar de registrar aqui o enorme esforço de todos os membros da Comissão nacional de Olimpíadas de Matemática, em especial ao professor Davi Lopes Alves de Medeiros, pelo seu trabalho de revisão desta edição, além de muitos ex-olímpicos que continuam com o mesmo entusiasmo de sempre, sem os quais essa publicação não poderia tornar-se realidade.

Saudações Olímpicas!
Os editores.

38^a OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA - 2016

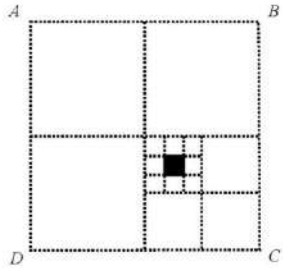
Problemas da Primeira Fase

Problemas - Nível 1 - 38^a - OBM 2016.

1. Qual é o valor da expressão $\frac{2016^2-1}{2015}$?

   (a) 1003 (b) 2003 (c) 2015 (d) 2016 (e) 2017

2. A figura apresenta quadrados de quatro tamanhos diferentes. A área do pequeno quadrado preto é 1cm^2. Qual é a área do quadrado maior $ABCD$?

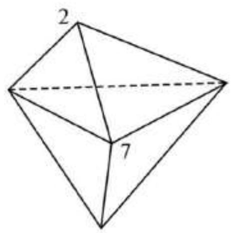


   (a) 36cm^2 (b) 72cm^2 (c) 108cm^2 (d) 144cm^2 (e) 180cm^2

3. Jaci entrega jornais numa rua na qual os números das casas têm exatamente dois algarismos e ambos são ímpares, como por exemplo, 37. No domingo passado ela entregou jornais em 18 casas. No máximo, quantas casas não receberam o jornal?

   (a) 1 (b) 3 (c) 5 (d) 7 (e) 9

4. O sólido ao lado tem seis faces triangulares e um número escrito em cada vértice, dois dos quais mostrados na figura. A soma dos números escritos nos vértices de cada face é a mesma para todas as faces. Qual é a soma de todos os cinco números escritos nos vértices?



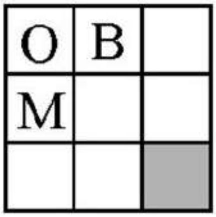
   (a) 11 (b) 20 (c) 25 (d) 28 (e) 33

5. No ano passado, o dia 1º de fevereiro caiu em um domingo. Na primeira semana desse mês, 29 rapazes e 12 moças frequentavam uma academia esportiva. Depois,

a cada semana, entraram 3 novos rapazes e 4 moças na academia, sem nenhuma desistência. Em que mês o número de moças se igualou ao número de rapazes?

(a) março (b) abril (c) maio (d) junho (e) julho

6. Lena quer completar as casas do tabuleiro 3×3 ao lado, usando as mesmas letras já escritas, de modo que casas vizinhas (casas com um lado comum) não tenham a mesma letra. Que letra poderá ser escrita na casa cinzenta?



(a) somente O (b) somente B (c) somente M
(d) somente O ou M (e) qualquer uma

7. Dona Maria fez uma grande pizza para seus filhos no Dia das Mães, mas não tinha certeza se viriam visitá-la dois, três ou cinco filhos. Ela quer deixar a pizza dividida em pedaços iguais antes da chegada dos filhos e faz questão de que aqueles que vierem comam a mesma quantidade de pizza. Qual é o menor número de pedaços em que ela deve dividir a pizza?

(a) 12 (b) 18 (c) 24 (d) 30 (e) 60

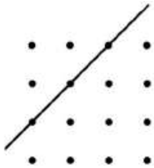
8. Numa maratona com 2016 participantes, o número de corredores que chegaram antes de Josias foi igual a um quarto do número de corredores que chegaram depois de Josias. Em que lugar chegou Josias?

(a) 404º (b) 405º (c) 407º (d) 1007º (e) 1008º

9. A área de um quadrado é um número inteiro de metros quadrados e é igual à área de um retângulo cujo perímetro é 58 metros. Se os lados do retângulo também medem números inteiros de metros, qual é a medida do lado do quadrado, em metros?

(a) 8 (b) 9 (c) 10 (d) 11 (e) 12

10. Os pontos da figura são vértices de um quadriculado.



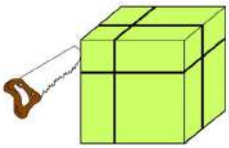
Pelo menos quantos desses pontos devem ser eliminados de forma que qualquer reta que passar por dois pontos terá que passar por, pelo menos, mais um ponto, como no exemplo?

(a) 6 (b) 7 (c) 8 (d) 12 (e) 13

11. Num país imaginário vivem somente duas espécies de pessoas: os honestos, que sempre dizem a verdade e os mentirosos, que só dizem mentira. Numa fila de 2016 pessoas da ilha, o primeiro da fila diz que todos atrás dele são mentirosos e todas as demais pessoas da fila dizem que quem está à sua frente é mentiroso. Quantas pessoas mentirosas estão nessa fila?

(a) nenhuma (b) 1007 (c) 1008 (d) 2015 (e) todas

12. Um cubo foi pintado de verde. Em seguida, foi cortado paralelamente às faces, obtendo-se oito blocos retangulares menores. As faces sem cor desses blocos foram pintadas de vermelho. Qual é a razão entre a área da superfície total verde e a área da superfície total vermelha?

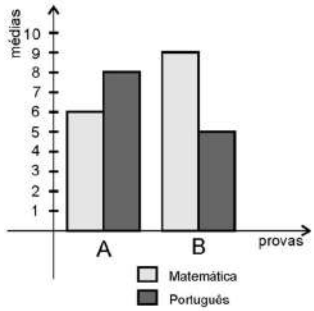


(a) 1 : 1 (b) 1 : 2 (c) 1 : 3 (d) 2 : 3 (e) 3 : 4

13. Janaína escreveu uma lista de 10 números inteiros positivos no quadro-negro e obteve todas as somas possíveis de dois desses números, verificando que todas eram diferentes. O número de somas pares que ela obteve era igual a quatro vezes o número de somas ímpares. Qual é a maior quantidade de números pares que poderia haver na lista de Janaína?

(a) 1 (b) 3 (c) 5 (d) 7 (e) 9

14. Numa escola, 20 alunos da sala A e 30 alunos da sala B fizeram a mesma prova de Matemática e a mesma de Português. As médias das notas obtidas nessas provas encontram-se no gráfico ao lado. Qual das afirmações a seguir é verdadeira?



(a) A média de Português dos alunos da sala A é maior do que a média de Matemática dos alunos da sala B.

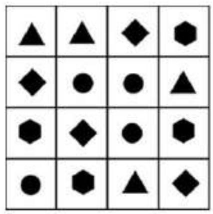
(b) A média de Português é maior do que a média de Matemática em ambas as salas.

(c) A média de Matemática dos alunos das duas salas juntas é menor do que $7,5$.

(d) A média das notas das duas provas na sala A é menor do que a da sala B.

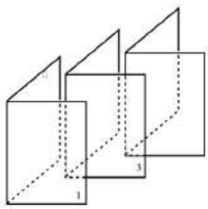
(e) A média geral das notas de todos os alunos nas duas matérias é 7.

15. Cada uma das casas de um tabuleiro 4×4 contém peças na forma de triângulo, quadrado, hexágono ou círculo. Um movimento consiste na troca de posições de duas peças. No mínimo, quantos movimentos serão necessários na configuração a seguir para que todas as linhas e colunas tenham quatro peças diferentes?



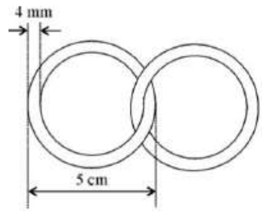
(a) 1 (b) 2 (c) 3 (d) 4 (e) 5

16. Uma revista de 60 páginas é montada a partir de pilha de 15 folhas de papel dobradas ao meio. Por defeito, uma dessas revistas veio sem a página 7. Quais outras páginas também vieram faltando?



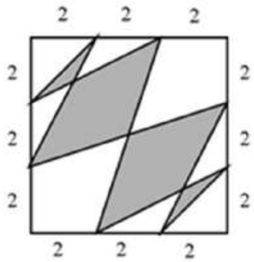
(a) $8, 9$ e 10 (b) $8, 42$ e 43 (c) $8, 48$ e 49
(d) $8, 52$ e 53 (e) $8, 53$ e 54

17. Um joalheiro fabrica colares juntando argolas circulares com as medidas indicadas na figura. Qual é o comprimento, em centímetros, de um colar com 20 argolas?



(a) $84, 8$ (b) 92 (c) $96, 6$ (d) $98, 2$ (e) 100

18. Na figura, as medidas são dadas em centímetros. Qual é a área da região cinzenta no interior do quadrado em centímetros quadrados?



(a) $\frac{56}{5}$ (b) $\frac{44}{3}$ (c) 22 (d) $\frac{68}{3}$ (e) 24

19. Qual das equações abaixo resolve o problema a seguir?

"Uma quantidade x de amigos resolveu fazer uma viagem juntos, dividindo igualmente suas despesas, no total de 6000 reais. Entretanto, na última hora, três dos amigos desistiram e cada um dos que foram viajar teve que arcar com uma despesa extra de 100 reais. Incluindo os que desistiram, quantos amigos eram?"

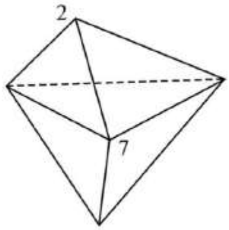
(a) $x^2 - 12x = 0$
(b) $x^2 - 3x - 180 = 0$
(c) $x^2 = 144$
(d) $x^2 - 5x + 6 = 0$
(e) $x^2 - 100x + 6000 = 0$

20. Na igualdade $\dfrac{\mathsf{D} \times \mathsf{O} \times \mathsf{Z} \times \mathsf{E}}{\mathsf{D} \times \mathsf{O} \times \mathsf{I} \times \mathsf{S}} = \mathsf{S} \times \mathsf{E} \times \mathsf{I} \times \mathsf{S}$, letras iguais representam algarismos iguais e letras diferentes representam algarismos diferentes. Se os algarismos são todos diferentes de zero, quantos valores diferentes o produto pode ter?

(a) 12 (b) 18 (c) 22 (d) 28 (e) 36

Problemas - Nível 2 - 38^a - OBM 2016.

1. O sólido ao lado tem seis faces triangulares e um número escrito em cada vértice, dois dos quais mostrados na figura. A soma dos números escritos nos vértices de cada face é a mesma para todas as faces. Qual é a soma de todos os cinco números escritos nos vértices?



(a) 11 (b) 20 (c) 25 (d) 28 (e) 33

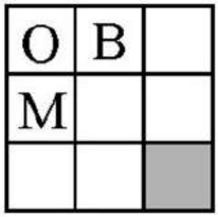
2. Numa maratona com 2016 participantes, o número de corredores que chegaram antes de Josias foi igual a um quarto do número de corredores que chegaram depois de Josias. Em que lugar chegou Josias?

(a) 404º (b) 403º (c) 404º (d) 1007º (e) 1008º

3. Jaci entrega jornais numa rua na qual os números das casas têm exatamente dois algarismos e ambos são ímpares, como por exemplo, 37. No domingo passado ela entregou jornais em 18 casas. No máximo, quantas casas não receberam o jornal?

(a) 1 (b) 3 (c) 5 (d) 7 (e) 9

4. Lena quer completar as casas do tabuleiro 3 × 3 ao lado, usando as mesmas letras já escritas, de modo que casas vizinhas (casas com um lado comum) não tenham a mesma letra. Que letra poderá ser escrita na casa cinzenta?



(a) somente O (b) somente B (c) somente M
(d) somente O ou M (e) qualquer uma

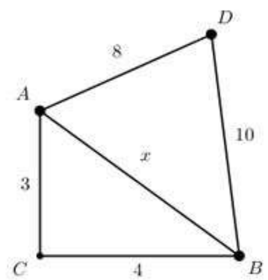
5. Dona Maria fez uma grande pizza para seus filhos no Dia das Mães, mas não tinha certeza se a visitariam dois, três ou cinco filhos. Ela quer deixar a pizza dividida em pedaços iguais antes da chegada dos filhos e faz questão de que aqueles que vierem comam a mesma quantidade de pizza. Qual é o menor número de pedaços em que ela deve dividir a pizza?

(a) 12 (b) 18 (c) 24 (d) 30 (e) 60

6. Determine o valor da expressão $\dfrac{2015^3 - 1^3}{1^2 + 2015^2 + 2016^2}$.

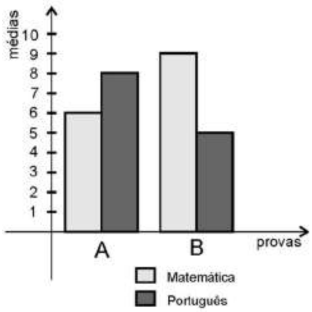
(a) 1006 (b) 1007 (c) 1008 (d) 2014 (e) 2015

7. Três medidas positivas são lados de um triângulo se qualquer uma delas é menor que a soma das outras duas. Na figura ao lado, os triângulos ABC e ABD possuem os três lados de comprimentos inteiros. Sabendo que $AC = 3, BC = 4$ e $BD = 10$, determine a quantidade de valores inteiros possíveis para a medida do lado AB.



(a) 2 (b) 3 (c) 4 (d) 5 (e) 6

8. Numa escola, 20 alunos da sala A e 30 alunos da sala B fizeram a mesma prova de Matemática e a mesma de Português. As médias das notas obtidas nessas provas encontram-se no gráfico ao lado. Qual das afirmações a seguir é verdadeira?



(a) A média de Português dos alunos da sala A é maior do que a média de Matemática dos alunos da sala B.

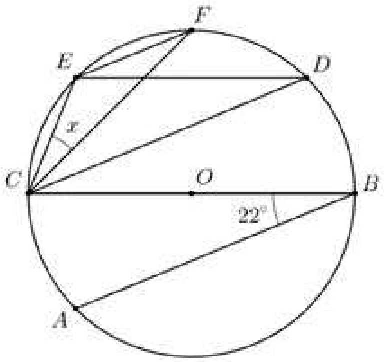
(b) A média de Português é maior do que a média de Matemática em ambas as salas.

(c) A média de Matemática dos alunos das duas salas juntas é menor do que $7,5$.

(d) A média das notas das duas provas na sala A é menor do que a da sala B.

(e) A média geral das notas de todos os alunos nas duas matérias é 7.

9. Na figura ao lado, os pontos A, B, C, D, E e F estão sobre uma circunferência de centro O com AB, CD e EF paralelos entre si e o segmento BC paralelo ao segmento DE. Sabendo que o segmento BC é diâmetro e que o ângulo $\angle ABC$ mede 22^o , determine a medida do ângulo $\angle ECF$, representado na figura pela letra x.



(a) 20^o (b) 22^o (c) 24^o (d) 26^o (e) 28^o

10. Determine o menor inteiro positivo n tal que $n!$ é múltiplo de 2016.

(a) 7 (b) 8 (c) 9 (d) 10 (e) 2016

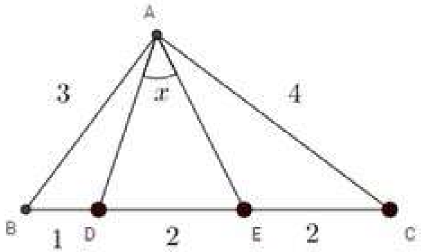
11. Em um jogo de videogame, um personagem, o OBMario, se desloca em uma tela de medidas 3 e 4; quando ele chega no limite da tela, ele reaparece no lado oposto (se sai pela esquerda, volta à direita, à mesma altura, e vice-versa; se sai por cima, volta por baixo, à mesma distância do lado esquerdo da tela, e vice-versa). Chamamos o menor trajeto de OBMario entre dois pontos de *distância de videogame*. Qual é a maior distância de videogame possível entre dois pontos da tela?

(a) 2 (b) $2,5$ (c) 3 (d) 4 (e) 5

12. O número de seis dígitos $ab2016$ é múltiplo de 99. Determine o valor do dígito a.

(a) 2 (b) 3 (c) 6 (d) 8 (e) 9

13. Considere o triângulo ABC a seguir tal que $AB = 3, AC = 4$ e $BC = 5$. Sobre o lado BC, são marcados os pontos D e E de modo que $BD = 1, DE = 2$ e $EC = 2$.



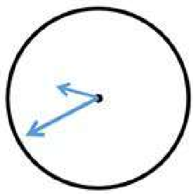
Determine a medida do ângulo $\angle DAE$.

(a) 30º (b) 35º (c) 40º (d) 45º (e) 50º

14. Num país imaginário vivem somente duas espécies de pessoas: os honestos, que sempre dizem a verdade e os mentirosos, que só dizem mentira. Numa fila de 2016 pessoas da ilha, o primeiro da fila diz que todos atrás dele são mentirosos e todas as demais pessoas da fila dizem que quem está à sua frente é mentiroso. Quantas pessoas mentirosas estão nessa fila?

(a) nenhuma (b) 1007 (c) 1008 (d) 2015 (e) todas

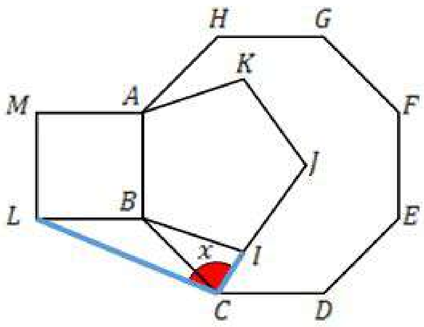
15. O relógio de ponteiros de Esmeralda está quebrado: o ponteiro dos minutos anda na velocidade correta, mas no sentido contrário; o ponteiro das horas funciona corretamente. Por exemplo, quando são 09h20 o relógio é mostrado na figura ao lado.



O relógio de Esmeralda quebrou exatamente às 00h00 e, no intervalo de 00h00 às 23h59 de um mesmo dia, os ponteiros de um relógio normal se sobrepõem x vezes. Se y é o número de vezes que os ponteiros do relógio de Esmeralda se sobrepõem no intervalo das 00h00 às 23h59 de um mesmo dia, então:

(a) $x = y$ (b) $x = y + 2$ (c) $y = x + 2$ (d) $y = x + 4$ (e) $x = y + 4$

16. Na figura a seguir sabe-se que $ABCDEFGH$ é um octógono regular, $ABIJK$ é um pentágono regular e $ABLM$ é um quadrado. Determine a medida em graus do ângulo $\angle LCI$ denotado na figura pela letra x.



(a) 81º (b) 90º (c) 92º (d) 99º (e) 102º

17. Pedroso tem pilhas com $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$ e 11 pedras (sim, ele não tem uma pilha com 10 pedras). Ele pode juntar duas pilhas de pedras. Quantas vezes, no mínimo, ele deve fazer essa operação para ter pilhas com as mesmas quantidades de pedras?

(a) 1 (b 2 (c) 3 (d) 6 (e) 8

18. A área de um quadrado é um número inteiro de metros quadrados e é igual à área de um retângulo cujo perímetro é 58 metros. Além disso, ambos possuem lados cujos comprimentos são números inteiros. Qual é a medida do lado do quadrado em metros?

(a) 8 (b) 9 (c) 10 (d) 11 (e) 12

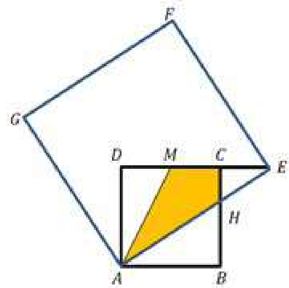
19. Em uma circunferência de raio 1, estão inscritos um hexágono regular $ABCDEF$ e um quadrado $AXDY$. O segmento BF intersecta os lados AX e AY do quadrado nos pontos R e S, respectivamente. Determine o comprimento do segmento RS.

(a) 1 (b) $\sqrt{3}$ (c) $\frac{1}{2}$ (d) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (e) $\frac{\sqrt{3}}{3}$

20. Janaína escreveu uma lista de 10 números inteiros positivos no quadro-negro e obteve todas as somas possíveis de dois desses números, verificando que todas eram diferentes. O número de somas pares que ela obteve era igual a quatro vezes o número de somas ímpares. Qual é a maior quantidade de números pares que poderia haver na lista de Janaína?

    (a) 1 (b) 3 (c) 5 (d) 7 (e) 9

21. Na figura ao lado, $AEFG$ e $ABCD$ são quadrados e o ponto E está na reta CD. Além disso, M é o ponto médio do segmento CD e C é o ponto médio do segmento ME. Sabendo que o quadrado $ABCD$ possui lado 6 , determine a razão entre as áreas do quadrilátero $CHAM$ e do quadrado $AEFG$.



    (a) $\frac{5}{39}$ (b) $\frac{5}{27}$ (c) $\frac{3}{8}$ (d) $\frac{3}{13}$ (e) $\frac{2}{13}$

22. Na igualdade $\dfrac{D \times O \times Z \times E}{D \times O \times I \times S} = S \times E \times I \times S$, letras iguais representam algarismos iguais e letras diferentes representam algarismos diferentes. Se os algarismos são todos diferentes de zero, quantos valores diferentes o produto $S \times E \times I \times S$ pode ter?

    (a) 12 (b) 18 (c) 22 (d) 28 (e) 36

23. O ano de 2016 é sabadoso, pois há cinco meses com cinco sábados. Qual será o próximo ano sabadoso?

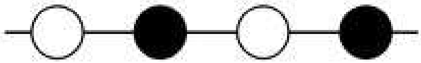
    (a) 2017 (b) 2019 (c) 2020 (d) 2021 (e) 2022

24. Juca gosta de brincar com um número e a soma dos seus dígitos. Ele decidiu chamar um número inteiro s de sagaz se existe algum número n tal que s é a diferença entre n e a soma dos dígitos de n. Por exemplo, 18 é sagaz, pois ele é $28 - (1 + 8)$. Existem quantos números sagazes maiores que 1 e menores que 1000?

    (a) 90 (b) 91 (c) 100 (d) 111 (e) 998

25. Um colar é constituído por dois tipos de pérolas: as brancas e as pretas. Ele está aberto e disposto em uma mesa formando uma linha de pérolas consecutivas. Duas sequências de três pérolas consecutivas são equivalentes se elas possuem exatamente

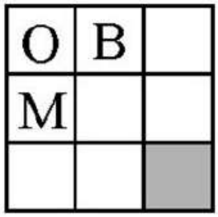
as mesmas pérolas dispostas na mesma ordem ou em ordem inversa. Por exemplo, se P e B indicam as cores das pérolas pretas e brancas, respectivamente, a sequência PBBP contém duas sequências de três pérolas equivalentes: as primeiras três, com a combinação PBB; e as últimas três, com a combinação BBP. Qual a quantidade mínima de pérolas que o colar deve possuir para termos certeza de que existem duas sequências equivalentes independente de como elas estejam distribuídas?



(a) 6 (b) 7 (c) 8 (d) 9 (e) 10

Problemas - Nível 3 - 38ª - OBM 2016.

1. Lena quer completar as casas do tabuleiro 3×3 ao lado, usando as mesmas letras já escritas, de modo que casas vizinhas (casas com um lado comum) não tenham a mesma letra. Que letra poderá ser escrita na casa cinzenta?



(a) somente O (b) somente B (c) somente M
(d) somente O ou M (e) qualquer uma

2. Numa maratona com 2016 participantes, o número de corredores que chegaram antes de Josias foi igual a um quarto do número de corredores que chegaram depois de Josias. Em que lugar chegou Josias?

(a) 404º (b) 405º (c) 407º (d) 1007º (e) 1008º

3. A área de um quadrado é um número inteiro de metros quadrados e é igual à área de um retângulo cujo perímetro é 58 metros. Além disso, ambos possuem lados cujos comprimentos são números inteiros. Qual é a medida do lado do quadrado em metros?

(a) 8 (b) 9 (c) 10 (d) 11 (e) 12

4. Considere uma pirâmide P cuja base é um polígono regular de 2016 lados. Apesar de sua base ser um polígono regular, a pirâmide P não é regular, pois a projeção do seu vértice sobre o plano da base não coincide com o centro da base. No mínimo quantas faces laterais não congruentes duas a duas P tem?

   (a) 672 (b) 1008 (c) 1009 (d) 1010 (e) 2016

5. Num país imaginário vivem somente duas espécies de pessoas: os honestos, que sempre dizem a verdade e os mentirosos, que só dizem mentira. Numa fila de 2016 pessoas da ilha, o primeiro da fila diz que todos atrás dele são mentirosos e todas as demais pessoas da fila dizem que quem está à sua frente é mentiroso. Quantas pessoas mentirosas estão nessa fila?

   (a) nenhuma (b) 1007 (c) 1008 (d) 2015 (e) Todas

6. Janaína escreveu uma lista de 10 números inteiros positivos no quadro-negro e obteve todas as somas possíveis de dois desses números, verificando que todas eram diferentes. O número de somas pares que ela obteve era igual a quatro vezes o número de somas ímpares. Qual é a maior quantidade de números pares que poderia haver na lista de Janaína?

   (a) 1 (b) 3 (c) 5 (d) 7 (e) 9

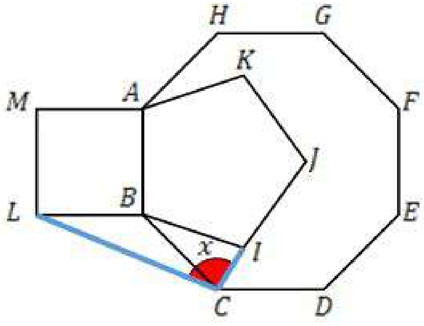
7. Qual das equações abaixo resolve o problema a seguir?

   "Uma quantidade x de amigos resolveu fazer uma viagem juntos, dividindo igualmente suas despesas, no total de 6000 reais. Entretanto, na última hora, três dos amigos desistiram e cada um dos que foram viajar teve que arcar com uma despesa extra de 100 reais. Incluindo os que desistiram, quantos amigos eram?"

   (a) $x^2 - 12x = 0$ (b) $x^2 - 3x - 180 = 0$ (c) $x^2 = 144$

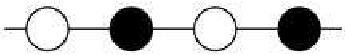
   (d) $x^2 - 5x + 6 = 0$ (e) $x^2 - 100x + 6000 = 0$

8. Na figura a seguir sabe-se que $ABCDEFGH$ é um octógono regular, $ABIJK$ é um pentágono regular e $ABLM$ é um quadrado. Determine a medida em graus do ângulo $\angle LCI$ denotado na figura pela letra x.



(a) 81º (b) 90º (c) 92º (d) 99º (e) 102º

9. Um colar é constituído por dois tipos de pérolas: as brancas e as pretas. Ele está aberto e disposto e uma mesa formando uma linha de pérolas consecutivas. Duas sequências de três pérolas consecutivas são equivalentes se elas possuem exatamente as mesmas pérolas dispostas na mesma ordem ou em ordem inversa. Por exemplo, se P e B indicam as cores das pérolas pretas e brancas, respectivamente, a sequência PBBP contém duas sequências de três pérolas equivalentes: as primeiras três, com a combinação PBB; e as últimas três, com a combinação BBP. Qual a quantidade mínima de pérolas que o colar deve possuir para termos certeza de que existem duas sequências equivalentes independente de como elas estejam distribuídas?



(a) 6 (b) 7 (c) 8 (d) 9 (e) 10

Texto para os problemas 10 e 11.

Em uma circunferência de raio 1 estão inscritos um hexágono regular $ABCDEF$ e um quadrado $AXDY$. O segmento BF intersecta os lados AX e AY do quadrado nos pontos R e S, respectivamente. A reta BD intersecta as retas AX e AY em T e U, respectivamente.

10. A distância RS é

(a) 1 (b) $\sqrt{3}$ (c) $\frac{1}{2}$ (d) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (e) $\frac{\sqrt{3}}{3}$

11. A distância TU é

    (a) 3 (b) $\sqrt{10}$ (c) $2\sqrt{3}$ (d) $2+\sqrt{3}$ (e) 4

12. Dado um real x , sua parte inteira $\lfloor x \rfloor$ é o maior inteiro menor ou igual a x e sua parte fracionária é dada por $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$. Quantas soluções tem a equação $\lfloor x \rfloor - 2016\{x\} = 38$?

    (a) 11 (b) 36 (c) 1008 (d) 2016 (e) 2017

13. De quantas maneiras podemos escolher n casas de um tabuleiro $n \times n$, $n > 3$, sem escolher duas casas na mesma linha ou na mesma coluna, sabendo que os quatro cantos do tabuleiro não podem ser escolhidos?

    (a) $(n-2)(n-3)(n-2)!$
    (b) $(n-4)(n-1)!$
    (c) $(n^2-5n+2)(n-2)!$
    (d) $(n-2)(n-1)!$
    (e) $(n-2)(n-2)!$

14. Na igualdade $\dfrac{D \times O \times Z \times E}{D \times O \times I \times S} = S \times E \times I \times S$, letras iguais representam algarismos iguais e letras diferentes representam algarismos diferentes. Se os algarismos são todos diferentes de zero, quantos valores diferentes o produto $S \times E \times I \times S$ pode ter?

    (a) 12 (b) 18 (c) 22 (d) 28 (e) 36

15. Humberto joga um dado honesto e obtém x_1 pontos; Doisberto joga dois dados honestos e tira a média aritmética x_2 dos resultados; Tresberto joga três dados honestos e tira a média aritmética x_3 dos resultados. Todos os dados têm faces numeradas de 1 a 6. Sendo p_1, p_2 e p_3 as probabilidades de obter $x_1 \geq 5, x_2 \geq 5$ e $x_3 \geq 5$, respectivamente, então

    (a) $p_1 < p_2 < p_3$
    (b) $p_1 < p_3 < p_2$
    (c) $p_2 < p_1 < p_3$
    (d) $p_2 < p_3 < p_1$
    (e) $p_3 < p_2 < p_1$

16. Em um jogo de videogame, um personagem, o OBMario, se desloca em uma tela de medidas 3 e 4; quando ele chega no limite da tela, ele reaparece no lado oposto (se sai pela esquerda, volta à direita, à mesma altura, e vice-versa; se sai por cima, volta

por baixo, à mesma distância do lado esquerdo da tela, e vice-versa). Chamamos o menor trajeto de OBMario entre dois pontos de distância de videogame. Qual é a maior *distância de videogame* possível entre dois pontos da tela?

(a) 2 (b) 2, 5 (c) 3 (d) 4 (e) 5

17. A quantidade de triplas ordenadas (a, b, c) de reais tais que

$$a = \frac{b}{c} + \frac{c}{b}, \qquad b = \frac{c}{a} + \frac{a}{c} \text{ e } \qquad c = \frac{a}{b} + \frac{b}{a}$$

é:

(a) 0 (b) 1 (c) 3 (d) 4 (e) 5

18. O ano de 2016 é sabadoso, pois há cinco meses com cinco sábados. Qual será o próximo ano sabadoso?

(a) 2017 (b) 2019 (c) 2020 (d) 2021 (e) 2022

19. O conjunto X está contido em $\{1, 2, 3, \ldots, 2016\}$ e tem a seguinte propriedade: para todos $x, y \in X$ com $x < y$, $y + 1$ é múltiplo de x. Qual é a quantidade máxima de elementos que X pode ter?

(a) 3 (b) 4 (c) 5 (d) 6 (e) 7

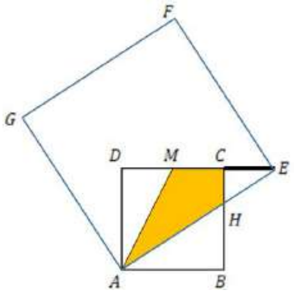
20. Juca gosta de brincar com um número e a soma dos seus dígitos. Ele decidiu chamar um número inteiro s de sagaz se existe algum número n tal que s é a diferença entre n e a soma dos dígitos de n. Por exemplo, 18 é sagaz, pois ele é igual a $28 - (2 + 8)$. Existem quantos números sagazes maiores que 1 e menores que 1000?

(a) 0 (b) 100 (c) 111 (d) 250 (e) 998

21. Pedroso tem pilhas com $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$ e 11 pedras (sim, ele não tem uma pilha com 10 pedras). Ele pode juntar duas pilhas de pedras. Quantas vezes, no mínimo, ele deve fazer essa operação para ter pilhas com as mesmas quantidades de pedras?

(a) 1 (b) 2 (c) 3 (d) 6 (e) 8

22. Na figura abaixo, $AEFG$ e $ABCD$ são quadrados e o ponto E está na reta CD. Além disso, M é o ponto médio do segmento CD e C é o ponto médio do segmento ME. Sabendo que o quadrado $ABCD$ possui lado 6, determine a razão entre as áreas do quadrilátero $CHAM$ e do quadrado $AEFG$.



(a) $\frac{5}{39}$ (b) $\frac{5}{27}$ (c) $\frac{3}{8}$ (d) $\frac{3}{13}$ (e) $\frac{2}{13}$

23. Uma função $f(n)$ dos inteiros positivos nos inteiros positivos é tal que se m é múltiplo de n e $m > n$ então $f(m) > f(n)$. O menor valor possível de $f(2016)$ é

    (a) 2 (b) 8 (c) 9 (d) 12 (e) 2016

24. A soma de 2016 números inteiros positivos é maior ou igual ao produto dos mesmos 2016 números inteiros positivos. Pelo menos quantos desses números são iguais a 1 ?

    (a) 2004 (b) 2005 (c) 2006 (d) 2007 (e) 2008

25. No quadrilátero convexo $ABCD, m(B\hat{A}D) = m(B\hat{C}D) = 60^o$ e $BC \perp BD$. A razão entre a distância de C ao circuncentro de ABD e a medida do segmento de reta CD é:

    (a) $\sqrt{2}$ (b) $\sqrt{3}$ (c) 1 (d) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (e) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

Problemas e soluções da Primeira fase

Nível 1 - 38ª - OBM 2016 - 1ª Fase.

GABARITO NÍVEL 1 (cada questão vale 1 ponto)

1.E	6.E	11.C	16.E
2.D	7.D	12.A	17.A
3.D	8.A	13.E	18.B
4.C	9.C	14.E	19.B
5.D	10.D	15.B	20.A

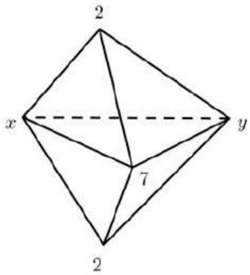
1. (E) Temos que $\frac{2016^2-1}{2015} = \frac{(2016+1)(2016-1)}{2015} = \frac{2017\cdot 2015}{2015} = 2017$. Uma outra solução é fazer as contas, ou seja,

$$\frac{2016^2-1}{2015} = \frac{4064256-1}{2015} = \frac{4064255}{2015} = 2017.$$

2. (D) A área do quadrado maior ABCD é $9 \times 1 \times 4 \times 4\text{cm}^2 = 144\text{cm}^2$.

3. (D) Existem 5 algarismos ímpares: $1, 3, 5, 7$ e 9. Logo, existem $5 \cdot 5 = 25$ números de exatamente dois dígitos e sendo ambos ímpares. Portanto, no máximo $25 - 18 = 7$ casas não receberam jornal.

4. (C) Sejam x e y os números escritos nos outros dois vértices que aparecem nas faces que contêm o segmento com os números 2 e 7, como mostrado na figura a seguir. Observando as faces que possuem o vértice com o número 2, temos $2 + x + 7 = 2 + 7 + y = 2 + x + y$ implicando $x = y = 7$. Ou seja, a soma dos números nos vértices de cada face deve ser $2 + 7 + 7 = 16$. Para descobrir o número no vértice inferior, basta observar uma das faces a qual ele faz parte e concluir que é 2.



Logo, a soma dos números escritos em todos os vértices é $7+7+7+2+2=25$.

5. (D) Seja x o número de semanas para que o número de moças se iguale ao número de rapazes. Temos, então, $29+3x=12+4x \Leftrightarrow x=17$ semanas. Como a entrada dos novos frequentadores iniciou na segunda semana de fevereiro, a igualdade ocorreu $17 \times 7=119$ dias após o início da segunda semana de fevereiro. Como em 2015 o mês de fevereiro teve 28 dias, vemos que 21 dias de fevereiro mais 31 dias de março mais 30 dias de abril e mais 31 dias de maio totalizam $21+31+30+31=113$ dias. Logo, temos a certeza de que o número de moças se igualou ao número de rapazes apenas no final da primeira semana de junho.

6. (E) Os seguintes exemplos mostram que qualquer uma das letras pode figurar na casa cinza:

O	B	O
M	O	B
O	B	O

O	B	O
M	O	B
O	B	M

O	B	O
M	O	M
O	M	B

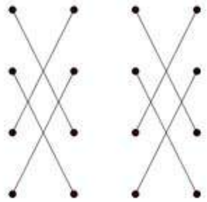
7. (D) Como os pedaços são iguais e eles podem ser divididos em grupos para $2, 3$ e 5 pessoas, a quantidade de pedaços deve ser um múltiplo do mínimo múltiplo comum desses números, ou seja, múltiplo de 30. De fato, com 30 pedaços iguais é imediato verificar que a divisão desejada é possível.

8. (A) Sendo x a posição de Josias, $x-1$ pessoas chegaram antes dele e $2016-x$ pessoas chegaram depois dele. Assim, $x-1=\frac{2016-x}{4} \Leftrightarrow 4(x-1)=2016-x$, ou seja, $x=404$.

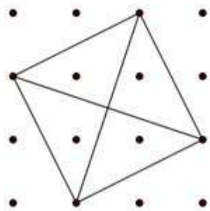
9. (C) Sejam x e y as dimensões do retângulo e n o lado do quadrado. Como $2x+2y=58$, temos $x+y=29$. Supondo $x \leq y$, as possíveis dimensões do retângulo são:
$$(x,y)=(1,28),(2,27),(3,26),\ldots,(14,15).$$
Destes pares, apenas o $(4,25)$ tem como produto de seus elementos um quadrado perfeito, que é o $4 \cdot 25=100$. Logo, o lado do quadrado é $n=\sqrt{4 \cdot 25}=\sqrt{100}=10$.

10. (D) Observe que, se apagarmos os 12 pontos e deixarmos os 4 pontos da linha superior, temos a propriedade desejada. Resta provar, então, que devemos eliminar pelo menos 9 pontos e podemos concluir, através dos itens, que a resposta é 12.

Veja agora os segmentos na figura a seguir.



Cada par de pontos unidos por um segmento são pontos sobre uma reta que não passa por outro ponto entre os 16 pontos existentes. Então, para cada um desses pares, um dos pontos deve ser eliminado. Logo, se eliminarmos exatamente um ponto de cada par, eliminaríamos exatamente 8 pontos. Porém, a figura a seguir mostra que existem dois desses pares de de pontos que formam um grupo de 4 pontos em que quaisquer dois não podem estar juntos na configuração final. Isso mostra que devemos apagar mais do que 8 pontos.



11. (C) A primeira pessoa a responder não pode estar dizendo a verdade, pois assim parte das pessoas que estão atrás dela também estão falando a verdade ao dizerem que a pessoa à sua frente é mentirosa. Como a primeira pessoa a responder mentiu, a segunda pessoa falou a verdade. Assim, a terceira pessoa mentiu e a quarta falou a verdade. Repetindo essa análise, podemos concluir que as pessoas na fila se alternam entre honestos e mentirosos. Logo, existem $\frac{2016}{2} = 1008$ pessoas mentirosas na fila.

12. (A) Cada face verde dos oito blocos menores obtidos após cortar o cubo é oposta a exatamente uma face pintada de vermelho, e vice-versa. Assim, a razão entre a área da superfície total verde e a área da superfície total vermelha é $1 : 1$.

13. (E) Em um conjunto com n elementos, a quantidade de subconjuntos formados por dois de seus elementos é $\frac{n(n-1)}{2}$. Sejam x e y as quantidades de números pares e ímpares na lista de Janaína, respectivamente. Temos $x + y = 10$ e, pela condição dada no enunciado, $\frac{x(x-1)}{2} + \frac{y(y-1)}{2} = 4xy$ $(*)$, pois a soma de dois números com paridades diferentes gera um número ímpar e a soma de dois números de mesma

paridade gera um número par.
Substituindo $y = 10 - x$ na última equação, concluímos que $x^2 - 9x + 10 = 0$. Essa equação possui duas soluções: $x = 1$ ou $x = 9$. Como $(x, y) = (9, 1)$ satisfaz a condição $(*)$, o valor máximo de x é 9.

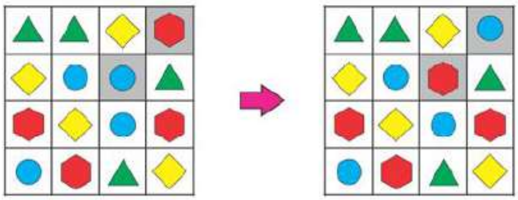
14. (E) A tabela abaixo mostra a soma das notas dos alunos das salas A e B nas provas de Matemática e Português:

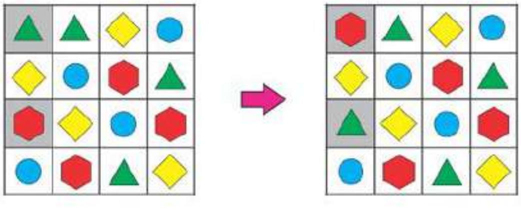
	Turma A	Turma B
Matemática	$6 \cdot 20 = 120$	$9 \cdot 30 = 270$
Português	$8 \cdot 20 = 160$	$5 \cdot 30 = 150$

A análise do gráfico mostra imediatamente que os itens (a) e (b) são falsos.
A média de matemática dos alunos das duas salas é $\frac{120+270}{50} = 7,8$ e assim o item (c) também é falso.
As médias das duas provas nas salas A e B são $\frac{280}{40} = 7$ e $\frac{420}{60} = 7$, respectivamente. Isto mostra que o item (d) também é falso.
Por fim, o item (e) é o verdadeiro, pois a média geral das notas é

$$\frac{120 + 160 + 270 + 150}{20 + 20 + 30 + 50} = 7.$$

15. (B) A terceira e a quarta colunas têm elementos repetidos, bastando um movimento para acertá-las. Mas, ainda assim, a primeira e a terceira linhas estarão com elementos repetidos, sendo necessário mais um movimento para fazer a correção. Portanto, um movimento não será suficiente para fazer com que todas as linhas e colunas tenham elementos diferentes. De fato, dois serão suficientes, conforme ilustração abaixo.

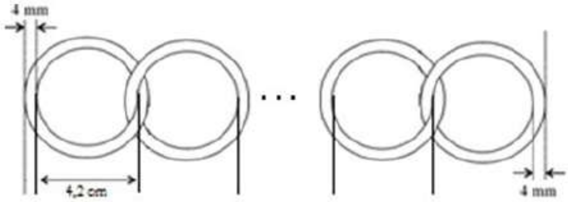




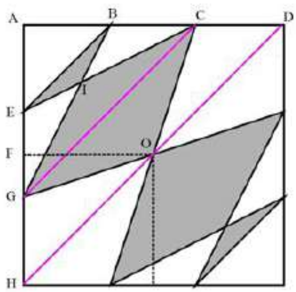
16. (E) A página 1 tem a página 2 no seu verso e as páginas 59 e 60 na sua outra parte. Logo, a página 7 (que é $1+6$) tem a página 8 (que é $2+6$) no seu verso e as páginas $53 = 59-6$ e $54 = 6-6$ na sua outra parte.

17. (A) Dividindo o colar em partes como mostrado na figura a seguir, o comprimento procurado é

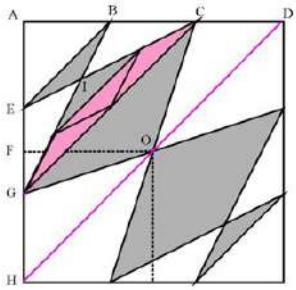
$$4\text{mm} + 20 \times 4,2\text{cm} + 4\text{mm} = 84\text{cm} + 0,8\text{cm} = 84,8\text{cm}.$$



18. (B) Temos $AB = BC = CD = AE = EG = GH = 2$. A área do triângulo AEB é igual a $\frac{2\times2}{2} = 2$. A área do triângulo OGH é $\frac{2\times3}{2} = 3$, pois $OF = 3$, já que F é o ponto médio do lado AH e O é o centro do quadrado. A área do triângulo AGC é $\frac{4\times4}{2} = 8$ e a área do triângulo DAH é $\frac{6\times6}{2} = 18$, logo a área do quadrilátero $CGHD$ é $18-8 = 10$ e, assim, a área do triângulo CGO é $10-2\times3 = 4$, pela simetria da figura. Falta calcular as áreas dos triângulos BEI e IGC, que são semelhantes.



Podemos dividir o triângulo IGC em quatro triângulos "iguais"ao triângulo BEI, conforme a figura abaixo.



Logo, se x é a área do triângulo BEI então $4x$ é a área do triângulo IGC. O triângulo ABG tem área $\frac{2\times 4}{2} = 4$. Logo a área do triângulo EIG é igual a $4-(2+x) = 2-x$. Como a área do quadrilátero $BEGC$ é $8-2=6$, temos

$$x + 4x + 2(2-x) = 6 \Leftrightarrow 3x = 2 \Leftrightarrow x = \frac{2}{3}.$$

Portanto, a área da região cinzenta contida no triângulo AHD é igual a $5x+4 = 5\cdot\frac{2}{3}+4 = \frac{22}{3}$. Logo, a área da região cinzenta, pela simetria da figura, é igual a $2\cdot\frac{22}{3} = \frac{44}{3}$.

19. (B) Inicialmente, dividindo igualmente as despesas, no total de 6000 reais, caberia a cada um arcar com $\frac{6000}{x}$ reais. Como na última hora três dos amigos desistiram, cada um dos que foram viajar arcou com $\frac{6000}{x-3}$ reais, o que trouxe uma despesa extra de 100 reais para cada, ou seja,

$$\frac{6000}{x} + 100 = \frac{6000}{x-3} \Leftrightarrow 60(x-3) + x(x-3) = 60x \Leftrightarrow$$

$$60x - 180 + x^2 - 3x = 60x \Leftrightarrow x^2 - 3x - 180 = 0.$$

20. (A) Como todos os algarismos são não nulos, podemos simplificar a igualdade, cancelando os termos repetidos e obtendo: $Z = S^3 \times I^2$. Como Z é um algarismo, temos que $S = 1$ ou $S = 2$. No primeiro caso, $I^2 = 4$ ou $I^2 = 9$. No segundo caso, a única opção é $I^2 = 1$. Assim, as possibilidades são: $(S, I) = (1,2), (1,3)$ ou $(2,1)$. Dado que E é diferente de I e S, temos 7 opções para a sua escolha.
Vejamos numa tabela quais os possíveis produtos $P = S \times E \times I \times S$ e de Z oriundos destas escolhas.

S	I	E	P	Z	S	I	E	P	Z	S	I	E	P	Z
1	2	3	6	4	1	3	2	6	9	2	1	3	12	8
1	2	4	8	4	1	3	4	12	9	2	1	4	16	8
1	2	5	10	4	1	3	5	15	9	2	1	5	20	8
1	2	6	12	4	1	3	6	18	9	2	1	6	24	8
1	2	7	14	4	1	3	7	21	9	2	1	7	28	8
1	2	8	16	4	1	3	8	24	9	2	1	8	32	8
1	2	9	18	4	1	3	9	27	9	2	1	9	36	8

Da tabela anterior, excluindo as combinações que fazem Z ser uma das letras já escolhidas, podemos concluir que existem 12 valores distintos para P:

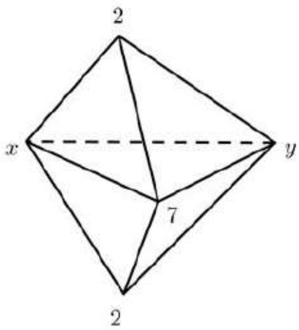
$$6, 10, 12, 14, 15, 16, 18, 20, 21, 24, 28 \text{ e } 36.$$

Nível 2 - 38^a - OBM 2016 - 1^a Fase.

GABARITO NÍVEL 2 (cada questão vale 1 ponto)

1.C	6.B	11.B	16.D	21.A
2.A	7.C	12.C	17.D	22.A
3.D	8.E	13.D	18.C	23.E
4.E	9.C	14.C	19.A	24.C
5.D	10.B	15.D	20.E	25.D

1. (C) Sejam x e y os números escritos nos outros dois vértices que aparecem nas faces que contêm o segmento com os números 2 e 7, como mostrado na figura a seguir. Observando as faces que possuem o vértice com o número 2, temos $2 + x + 7 = 2 + 7 + y = 2 + x + y$ implicando $x = y = 7$. Ou seja, a soma dos números nos vértices de cada face deve ser $2 + 7 + 7 = 16$. Para descobrir o número no vértice inferior, basta observar uma das faces a qual ele faz parte e concluir que é 2.



Logo, a soma dos números escritos em todos os vértices é $7+7+7+2+2=25$.

2. (A) Sendo x a posição de Josias, $x-1$ pessoas chegaram antes dele e $2016-x$ pessoas chegaram depois dele. Assim, $x-1=\frac{2016-x}{4} \Leftrightarrow 4(x-1)-2016-x$, ou seja, $x=404$.

3. (D) Existem 5 algarismos ímpares: $1,3,5,7$ e 9. Logo, existem $5\cdot 5=25$ números de exatamente dois dígitos e sendo ambos ímpares. Portanto, no máximo $25-18=7$ casas não receberam jornal.

4. (E) Os seguintes exemplos mostram que qualquer uma das letras pode figurar na casa cinza:

O	**B**	**O**
M	**O**	**B**
O	**B**	**O**

O	**B**	**O**
M	**O**	**B**
O	**B**	**M**

O	**B**	**O**
M	**O**	**M**
O	**M**	**B**

5. (D) Como os pedaços são iguais e eles podem ser divididos em grupos para $2,3$ e 5 pessoas, a quantidade de pedaços deve ser um múltiplo do mínimo múltiplo comum desses números, ou seja, múltiplo de 30. De fato, com 30 pedaços iguais é imediato verificar que a divisão desejada é possível.

6. (B) Seja $x=2015$, então a expressão dada pode ser reescrita como

$$\frac{x^3-1}{1^2+x^2+(x+1)^2}=\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{2(x^2+x+1)}=\frac{x-1}{2}.$$

Assim, o valor procurado é $\frac{2015-1}{2}=1007$.

7. (C) Pela desigualdade triangular aplicada aos triângulos ABC e ABD, temos:

$$x<4+3=7 \text{ e } 8+x>10,$$

respectivamente. Isto nos permite concluir que $2<x<7$. A princípio, os valores possíveis de x são: $3,4,5$ ou 6. Uma das consequências da recíproca da desigualdade triangular é que três números positivos são medidas de lados de um triângulo se o maior deles é menor que a soma dos outros dois. Os 4 valores encontrados satisfazem as condições.

8. (E) A tabela abaixo mostra a soma das notas dos alunos das salas A e B nas provas de Matemática e Português:

	Turma A	Turma B
Matemática	$6 \cdot 20 = 120$	$9 \cdot 30 = 270$
Português	$8 \cdot 20 = 160$	$5 \cdot 30 = 150$

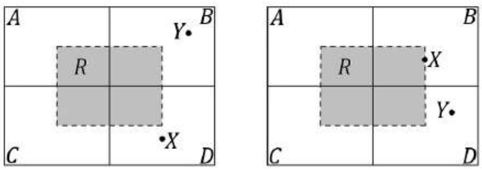
A análise do gráfico mostra imediatamente que os itens (a) e (b) são falsos.
A média de matemática dos alunos das duas salas é $\frac{120+270}{50} = 7,8$ e assim o item (c) também é falso.
As médias das duas provas nas salas A e B são $\frac{280}{40} = 7$ e $\frac{420}{60} = 7$, respectivamente. Isto mostra que o item (d) também é falso.
Por fim, o item (e) é o verdadeiro, pois a média geral das notas é

$$\frac{120+160+270+150}{20+20+30+50} = 7.$$

9. (C) Como o arco CA mede 44^o e EF, CD e AB são paralelos, podemos concluir que os arcos DB, CE e FD são congruentes e também medem 44^o. Além disso, dado que CB é um diâmetro, o arco EF mede $180^0 - 44^o - 44^o - 44^o = 48^o$. Finalmente, sendo $\angle ECF$ um ângulo inscrito determinado pelo arco EF, o valor de x é $\frac{48^o}{2} = 24^o$.

10. (B) Fatorando 2016 em primos, obtemos $2016 = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 7$. Assim, $n!$ deve conter pelo menos essas potências de primos como seus divisores. Para que apareça o fator 7 na fatoração de $n!$, devemos ter $n \geq 7$. Como 2^5 não divide $7! = 5040$, o próximo candidato é $8! = 40320 = 20 \cdot 2016$. Portanto, o menor valor de n é 8.

11. (B) Divida a tela do videogame, usando as mediatrizes dos seus lados, em quatro retângulos iguais denotados por A, B, C e D. Considere ainda o retângulo sombreado R formado pelos centros destes quatro retângulos.



A distância de videogame sempre é menor ou igual à distância euclidiana usual na tela e a troca de posição de 2 desses 4 retângulos com um lado em comum não muda a distância de videogame entre dois pontos quaisquer inseridos neles, apesar de eventualmente mudar a distância euclidiana na tela. Veja a figura anterior. Consequentemente, dados quaisquer dois pontos da tela, após algumas trocas de posições de retângulos, podemos supor que existem dois pontos no retângulo R cuja distância euclidiana é igual à distância de videogame entre eles. Como a maior distância em R é sua diagonal, que mede $\frac{\sqrt{3^2+4^2}}{2} = 2,5$, podemos concluir que nenhuma distância de videogame entre dois pontos é maior que $2,5$. Além disso, veja que a distância de videogame entre o centro da tela e qualquer um dos cantos é $2,5$.

12. (C) Pelo critério de divisibilidade por 11, para que $ab2016$ seja divisível por 11, devemos ter
$$11 \mid (a+2+1)-(b+0+6) = a-b-3.$$
Além disso, para que o número dado seja divisível por 9, devemos ter
$$9 \mid a+b+2+0+1+6 = a+b+9.$$
Como $a+b \leq 18$, as únicas possibilidades que satisfazem a relação de divisibilidade anterior são $a+b=9$ ou $a+b=18$. No primeiro caso, temos
$$11 \mid a-b-3 = 2(3-b).$$
O único dígito que satisfaz a relação anterior é $b=3$. Consequentemente, $a=6$. No segundo caso, $a=b=9$ e $11 \mid 9-9-3=-3$. Isso é um absurdo e a única solução possível é $(a,b)=(6,3)$.

13. (D) Sejam p e q as medidas dos ângulos $\angle BAD$ e $\angle EAC$, respectivamente. Como $BA = BE$, segue que $\angle ABE = \angle BAE = p + x$. Analogamente, como $AC = DC$, temos $\angle DAC = \angle ADC = x + q$. Pela recíproca do Teorema de Pitágoras, como $BC^2 = AB^2 + AC^2$, segue que $p+q+x = \angle BAC = 90^o$. Finalmente, analisando a soma dos ângulos do triângulo DAE, temos
$$180^o = (p+x)+x+(q+x) = 90^o + 2x,$$
ou seja, $x = 45^o$.

14. (C) A primeira pessoa a responder não pode estar dizendo a verdade, pois assim parte das pessoas que estão atrás dela também estão falando a verdade ao dizerem que a pessoa à sua frente é mentirosa. Como a primeira pessoa a responder mentiu, a segunda pessoa falou a verdade. Assim, a terceira pessoa mentiu e a quarta falou a verdade. Repetindo essa análise, podemos concluir que as pessoas na fila se alternam entre honestos e mentirosos. Logo, existem $\frac{2016}{2} = 1008$ pessoas mentirosas na fila.

15. (D) Como o ponteiro dos minutos é doze vezes mais rápido que o ponteiro das horas, em ambas as situações, para um deslocamento em um arco de tamanho k do ponteiro das horas, o ponteiro dos minutos terá se deslocado $12k$. Seja l o comprimento da circunferência do relógio. No relógio de Esmeralda, após um encontro dos ponteiros, o próximo se dará quando $12k + k = l$, ou seja, $k = \frac{l}{13}$.

Assim, dado um certo encontro, os próximos em um intervalo de 12 horas ocorrerão nos instantes correspondentes aos deslocamentos do ponteiro das horas de "tamanhos":

$$\frac{l}{13}, \frac{2l}{13}, \frac{3l}{13}, \ldots, \frac{12l}{13}.$$

Para o relógio normal, dado o encontro dos ponteiros, o próximo encontro ocorrerá quando $12k - k = l$, ou seja, $k = \frac{l}{11}$. Assim, dado um certo encontro, os próximos em um intervalo de 12 horas ocorrerão nos instantes correspondentes aos deslocamentos do ponteiro das horas de tamanhos:

$$\frac{l}{11}, \frac{2l}{11}, \frac{3l}{11}, \ldots, \frac{10l}{11}.$$

Veja que em um intervalo de 12 horas, existem 2 encontros a mais no relógio de Esmeralda em comparação a um relógio normal. Durante um dia completo, teremos $y = x + 4$.

16. (D) O ângulo interno de qualquer vértice de um polígono regular de n lados é $\frac{180^o(n-2)}{n}$. Consequentemente, $\angle ABL = 90^o, \angle ABI = 108^o$ e $\angle ABC = 135^o$. Daí, $\angle CBI = 27^o$ e $\angle LBC = 360^o - 90^o - 135^0 = 135^o$. Como $LB = BC = BI$, os triângulos LBC e CBI são isósceles de bases LC e CI. Assim

$$x = \angle LCB + \angle BCI = \frac{180^o - 135^o}{2} + \frac{180^o - 27^o}{2} = 99^o.$$

17. (D) A soma total das quantidades de pedras é

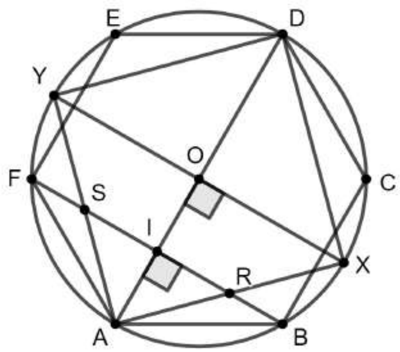
$$1 + 2 + 3 + \ldots + 9 + 11 = 56.$$

Para que as pilhas possuam uma mesma quantidade k de pedras, este inteiro deve ser um divisor de 56. Além disso, como alguma das pilhas no final do processo conterá a pilha com 11 pedras, cada uma deve ter 11 ou mais pedras. Analisando os divisores de 56, temos apenas as possibilidades $14, 28$ e 56 como possíveis valores de k. Veja que a cada junção de pilhas, a quantidade total delas diminui em apenas uma unidade. Assim, para que no final tenhamos apenas uma pilha com 56 pedras, serão necessários 9 usos da operação. Para obtermos duas pilhas com 28, precisamos fazer 8 operações. Finalmente, para obtermos 4 pilhas com 14, precisamos usar 6 operações. De fato, podemos executar explicitamente essas 6 operações indicando-as pelo símbolo de $+$ e agrupando as pilhas correspondentes entre parênteses:

$$(x, y) = (11 + 3), (9 + 5), (8 + 6), (7 + 4 + 2 + 1).$$

18. (C) Sejam x e y as dimensões do retângulo e n o lado do quadrado. Como $2x + 2y = 58$, temos $x + y = 29$. Supondo $x \leq y$, as possíveis dimensões do retângulo são:
$$(1, 28), (2, 27), (3, 26), \ldots, (14, 15).$$
Destes pares, apenas o $(4, 25)$ tem como produto de seus elementos um quadrado perfeito, que é o $4 \cdot 25 = 100$. Logo, o lado do quadrado é $n = \sqrt{4 \cdot 25} = \sqrt{100} = 10$.

19. (A)



Sejam I a interseção de AD e BF e O o centro da circunferência. Como $FA = AB$ e $AY = AX$, segue que os arcos FX e BX são iguais, ou seja, $FB||XY$. Assim, os triângulos RSA e XYA são semelhantes e
$$\frac{SR}{2} = \frac{SR}{XY} = \frac{AI}{AO} = \frac{1 \cdot (sen\angle ABI)}{1} = \frac{1}{2},$$
pois $\angle ABI = 30^o$ e $AB = AO = OB$. Logo, $SR = 1$.

20. (E) Em um conjunto com n elementos, a quantidade de subconjuntos formados por dois de seus elementos é $\frac{n(n-1)}{2}$. Sejam x e y as quantidades de números pares e ímpares na lista de Janaína, respectivamente. Temos $x + y = 10$ e, pela condição dada no enunciado, $\frac{x(x-1)}{2} + \frac{y(y-1)}{2} = 4xy$ $(*)$, pois a soma de dois números com paridades diferentes gera um número ímpar e a soma de dois números de mesma paridade gera um número par.
Substituindo $y = 10 - x$ na última equação, concluímos que $x^2 - 9x + 10 = 0$. Essa equação possui duas soluções: $x = 1$ ou $x = 9$. Como $(x, y) = (9, 1)$ satisfaz a condição $(*)$, o valor máximo de x é 9.

21. (A) Como o lado do quadrado mede 6, temos $DM = MC = CE = 3$. Os triângulos CEH e DEA são semelhantes. Daí,

$$\frac{CH}{DA} = \frac{CE}{DE} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}.$$

Portanto, $CH = \frac{6}{3} = 2$ e $HB = CB - CH = 4$. A área do quadrilátero $CHAM$, denotada por $[CHAM]$, pode ser obtida através da equação:

$$[CHAM] = [ACM] + [ACH] = \frac{3 \cdot 6}{2} + \frac{2 \cdot 6}{2} = 15.$$

Pelo Teorema de Pitágoras aplicado no triângulo ADE, temos

$$[AEFG] = AE^2 = AD^2 + DE^2 = 117.$$

Logo, $\frac{[CHAM]}{[AEFG]} = \frac{15}{117} = \frac{5}{39}$.

22. (A) Como todos os algarismos são não nulos, podemos simplificar a igualdade, cancelando os termos repetidos e obtendo: $Z = S^3 \times I^2$. Como Z é um algarismo, temos que $S = 1$ ou $S = 2$. No primeiro caso, $I^2 = 4$ ou $I^2 = 9$. No segundo caso, a única opção é $I^2 = 1$. Assim, as possibilidades são: $(S, I) = (1, 2), (1, 3)$ ou $(2, 1)$. Dado que E é diferente de I e S, temos 7 opções para a sua escolha.
Vejamos numa tabela quais os possíveis produtos $P = S \times E \times I \times S$ e de Z oriundos destas escolhas.

S	I	E	P	Z	S	I	E	P	Z	S	I	E	P	Z
1	2	3	6	4	1	3	2	6	9	2	1	3	12	8
1	2	4	8	4	1	3	4	12	9	2	1	4	16	8
1	2	5	10	4	1	3	5	15	9	2	1	5	20	8
1	2	6	12	4	1	3	6	18	9	2	1	6	24	8
1	2	7	14	4	1	3	7	21	9	2	1	7	28	8
1	2	8	16	4	1	3	8	24	9	2	1	8	32	8
1	2	9	18	4	1	3	9	27	9	2	1	9	36	8

Da tabela anterior, excluindo as combinações que fazem Z ser uma das letras já escolhidas, podemos concluir que existem 12 valores distintos para P:

$$6, 10, 12, 14, 15, 16, 18, 20, 21, 24, 28 \text{ e } 36.$$

23. (E) Note que um mês possui 4 ou 5 sábados e que $365 = 7 \times 52 + 1$. Então, um ano possui 52 semanas completas e 1 ou 2 dias extras, dependendo de ele ser ou não ser bissexto. Desse modo, um ano terá 52 ou 53 sábados e, chamando de x o número de meses com 5 sábados, podemos analisar as equações:

$$5x + 4(12 - x) = 52 \Leftrightarrow x + 48 = 52 \Leftrightarrow x = 4;$$

$$5x + 4(12 - x) = 53 \Leftrightarrow x + 48 = 53 \Leftrightarrow x = 5.$$

Então, um ano é sabadoso quando possui 53 sábados e isso acontece quando 1 de janeiro é sábado ou quando 2 de janeiro é sábado e o ano é bissexto, como acontece com 2016. Quando um ano é bissexto, o dia 1 de janeiro "avança dois dias na semana"em relação ao ano anterior e, quando o ano não é bissexto, "ele avança apenas um dia na semana"também em relação ao ano anterior. Desse modo, podemos montar a tabela a seguir com os dias 1 de janeiro dos próximos anos.

Ano	2016	2017	2018	2019	2020	2021	2022
1 de jan	sex.	dom.	seg.	ter.	qua.	sex.	sáb.

Portanto, o próximo ano sabadoso será 2022.

24. (C) Considere um número de até quatro dígitos, denotado por $\overline{\overline{abcd}}$, e veja que a diferença entre ele e a soma dos seus dígitos é:

$$\overline{\overline{abcd}} - (a + b + c + d) = 999a + 99b + 9c.$$

Se $a \geq 1$, o resultado passa de 1000. Além disso, se um número possuir 5 ou mais dígitos, uma diferença semelhante à mencionada anteriormente, também será maior que 1000. Se $a = 0$, temos 10 opções para o b, 10 opções para o c e devemos subtrair a opção em que ambos são zero, pois só nos interessa resultados maiores que 1 e menores que 1000. Então, nesse caso, temos $10 \cdot 10 - 1 = 99$ números sagazes. Se $a = 1$, então a diferença será menor que 1000 apenas para $b = c = 0$ e isto nos produz o número sagaz 999. Note que não há números contados com repetição, pois para dígitos a, b, c, x, y, z, a igualdade $999a + 99b + 9c = 999x + 99y + 9z$ é equivalente a $999(a - x) + 99(b - y) + 9(c - z) = 0$ e isto implica $a = x, b = y$ e $c = z$. Concluímos então que existem $99 + 1 = 100$ números sagazes maiores que 1 e menores que 1000.

25. (D) A sequência BBBPBPPP possui oito pérolas e nenhuma sequência equivalente. Considere uma sequência qualquer com 9 pérolas. Dividamos o problema em dois casos:

    (1) Se não existirem três delas consecutivas com a mesma cor, então ou as pérolas estão distribuídas em cores alternadas ao longo do colar ou existem duas de mesma cor. Se elas possuem cores alternadas, digamos BPBPBP..., qualquer trecho com 5 pérolas consecutivas conterá 2 sequências equivalentes. Se existem duas consecutivas de mesma cor entre as 7 pérolas que não são extremos do colar, digamos BB, os seus vizinhos devem ser ambos da cor oposta, ou seja, devemos encontrar a sequência PBBP. Como mencionado no enunciado, existem duas sequências equivalentes neste trecho do colar. Caso as 7 pérolas que não são extremos tenham cores alternadas, seguindo o caso anterior, qualquer trecho de 5 delas conterá duas sequências equivalentes.

    (2) Se existem três pérolas consecutivas de mesma cor, digamos BBB, e se uma das duas continuações em seus extremos não for da cor oposta, teremos imediatamente duas sequências equivalentes. Supondo agora que suas continuações são da cor oposta, se elas não estiverem em um dos extremos do colar, aparecerá o trecho PBBBP que contém duas sequências equivalentes. Caso BBB esteja em um dos extremos, digamos no esquerdo, e não existam três letras consecutivas de mesma cor fora dos extremos, então as suas possíveis continuações são:

    $$\mathsf{BBBPPB}, \mathsf{BBBPBB}, \mathsf{BBBPBP}$$

    Nas duas primeiras continuações anteriores, temos 3 sequências equivalentes. Para não formarmos duas sequências equivalentes, a única continuação possível é:

    $$\mathsf{BBBPBPPP}$$

    Agora, qualquer acréscimo de nova pérola no extremo direito gera duas sequências equivalentes.

    Ou seja, qualquer sequência com 9 pérolas possuirá duas sequências equivalentes.

Nível 3 - 38ª - OBM 2016 - 1ª Fase.

GABARITO NÍVEL 3 (cada questão vale 1 ponto)

1.E	6.E	11.E	16.B	21.D
2.A	7.B	12.D	17.D	22.A
3.C	8.D	13.A	18.E	23.C
4.B	9.D	14.A	19.D	24.C
5. C	10.A	15.E	20.B	25.E

1. (E) Os seguintes exemplos mostram que qualquer uma das letras pode figurar na casa cinza:

O	**B**	**O**
M	**O**	**B**
O	**B**	**O**

O	**B**	**O**
M	**O**	**B**
O	**B**	**M**

O	**B**	**O**
M	**O**	**M**
O	**M**	**B**

2. (A) Sendo x a posição de Josias, $x - 1$ pessoas chegaram antes dele e $2016 - x$ pessoas chegaram depois dele. Assim, $x - 1 = \frac{2016-x}{4} \Leftrightarrow 4(x - 1) = 2016 - x$, ou seja, $x = 404$.

3. (C) Sejam x e y as dimensões do retângulo e n o lado do quadrado. Como $2x + 2y = 58$, temos $x + y = 29$. Supondo $x \leq y$, as possíveis dimensões do retângulo são:
$$(x, y) = (1, 28), (2, 27), (3, 26), \ldots, (14, 15).$$
Destes pares, apenas o $(4, 25)$ tem como produto de seus elementos um quadrado perfeito, que é o $4 \cdot 25 = 100$. Logo, o lado do quadrado é $n = \sqrt{4 \cdot 25} = \sqrt{100} = 10$.

4. (B) Sendo $A_1A_2 \ldots A_{2016}$ o polígono regular da base, tome o vértice no plano perpendicular à base passando pela diagonal A_1A_{1009} de maneira que a projeção do vértice sobre o plano seja distinta do centro do polígono. Este plano é um plano de simetria do polígono e, portanto, temos 1008 pares de triângulos congruentes e podemos assim escolher 1008 faces laterais que não sejam congruentes dois a dois. Por outro lado, se há menos de 1008 faces laterais não congruentes duas a duas, temos no máximo 1007 classes de faces laterais congruentes. Desta maneira, pelo princípio da casa dos pombos, existem três faces laterais na mesma classe e assim o vértice equidista de três vértices do polígono. Desta maneira, a projeção do vértice seria o circuncentro do triângulo formado por estes três vértices, que coincide com o centro do polígono, absurdo, pois a pirâmide não é regular.

5. (C) A primeira pessoa a responder não pode estar dizendo a verdade, pois assim parte das pessoas que estão atrás dela também estão falando a verdade ao dizerem que a pessoa à sua frente é mentirosa. Como a primeira pessoa a responder mentiu, a segunda pessoa falou a verdade. Assim, a terceira pessoa mentiu e a quarta falou a verdade. Repetindo essa análise, podemos concluir que as pessoas na fila se alternam entre honestos e mentirosos. Logo, existem $\frac{2016}{2} = 1008$ pessoas mentirosas na fila.

6. (E) Em um conjunto com n elementos, a quantidade de subconjuntos formados por dois de seus elementos é $\frac{n(n-1)}{2}$. Sejam x e y as quantidades de números pares e ímpares na lista de Janaína, respectivamente. Temos $x + y = 10$ e, pela condição dada no enunciado, $\frac{x(x-1)}{2} + \frac{y(y-1)}{2} = 4xy$ $(*)$, pois a soma de dois números com paridades diferentes gera um número ímpar e a soma de dois números de mesma paridade gera um número par.
Substituindo $y = 10 - x$ na última equação, concluímos que $x^2 - 9x + 10 = 0$. Essa equação possui duas soluções: $x = 1$ ou $x = 9$. Como $(x, y) = (9, 1)$ satisfaz a condição $(*)$, o valor máximo de x é 9.

7. (B) Inicialmente, dividindo igualmente as despesas, no total de 6000 reais, caberia a cada um arcar com $\frac{6000}{x}$ reais. Como na última hora três dos amigos desistiram, cada um dos que foram viajar arcou com $\frac{6000}{x-3}$ reais, o que trouxe uma despesa extra de 100 reais para cada, ou seja,

$$\frac{6000}{x} + 100 = \frac{6000}{x-3} \Leftrightarrow 60(x-3) + x(x-3) = 60x \Leftrightarrow$$

$$60x - 180 + x^2 - 3x = 60x \Leftrightarrow x^2 - 3x - 180 = 0$$

8. (D) O ângulo interno de qualquer vértice de um polígono regular de n lados é $\frac{180^o(n-2)}{n}$. Consequentemente, $\angle ABL = 90^o, \angle ABI = 108^o$ e $\angle ABC = 135^o$. Daí, $\angle CBI = 27^o$ e $\angle LBC = 360^o - 90^o - 135^0 = 135^o$. Como $LB = BC = BI$, os triângulos LBC e CBI são isósceles de bases LC e CI. Assim

$$x = \angle LCB + \angle BCI = \frac{180^o - 135^o}{2} + \frac{180^o - 27^o}{2} = 99^o.$$

9. (D) A sequência $BBBPBPPP$ possui oito pérolas e nenhuma sequência equivalente. Considere uma sequência qualquer com 9 pérolas. Dividamos o problema em dois casos:

(1) Se não existam três delas consecutivas com a mesma cor, então ou as pérolas estão distribuídas em cores alternadas ao longo do colar ou existem duas de mesma cor. Se elas possuem cores alternadas, digamos $BPBPBP\ldots$, qualquer trecho com

5 pérolas consecutivas conterá 2 sequências equivalentes. Se existem duas consecutivas de mesma cor entre as 7 pérolas que não são extremos do colar, digamos BB, os seus vizinhos devem ser ambos da cor oposta, ou seja, devemos encontrar a sequência PBBP. Como mencionado no enunciado, existem duas sequências equivalentes neste trecho do colar. Caso as 7 pérolas que não são extremos tenham cores alternadas, seguindo o caso anterior, qualquer trecho de 5 delas conterá duas sequências equivalentes.

(2) Se existem três pérolas consecutivas de mesma cor, digamos BBB, e se uma das duas continuações em seus extremos não for da cor oposta, teremos imediatamente duas sequências equivalentes. Supondo agora que suas continuações são da cor oposta, se elas não estiverem em um dos extremos do colar, aparecerá o trecho PBBBP que contém duas sequências equivalentes. Caso BBB esteja em um dos extremos, digamos no esquerdo, e não existam três letras consecutivas de mesma cor fora dos extremos, então as suas possíveis continuações são:

$$\mathsf{BBBPPB}, \mathsf{BBBPBB}, \mathsf{BBBPBP}$$

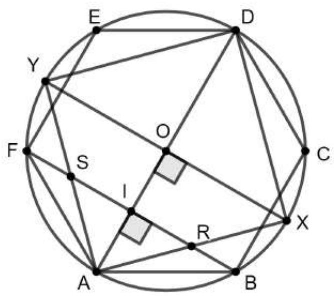
Nas duas primeiras continuações anteriores, temos 3 sequências equivalentes. Para não formarmos duas sequências equivalentes, a única continuação possível é:

$$\mathsf{BBBPBPPP}$$

Agora, qualquer acréscimo de nova pérola no extremo direito gera duas sequências equivalentes.

Ou seja, qualquer sequência com 9 pérolas possuirá duas sequências equivalentes.

10. (A)

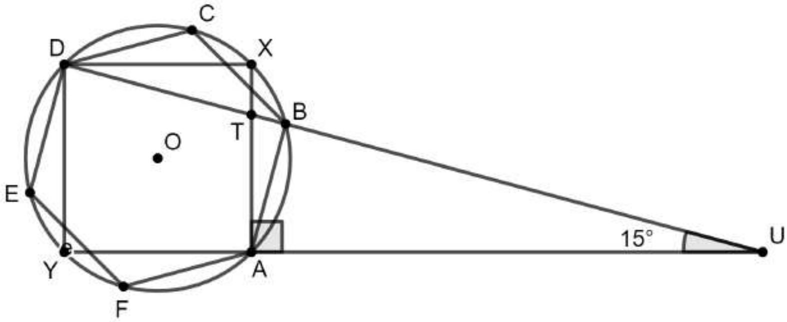


Sejam I a interseção de AD e BF e O o centro da circunferência. Como $FA = AB$ e $AY = AX$, segue que os arcos FX e BX são iguais, ou seja, $FB||XY$. Assim, os triângulos RSA e XYA são semelhantes e

$$\frac{SR}{2} = \frac{SR}{XY} = \frac{AI}{AO} = \frac{1 \cdot (sen\angle ABI)}{1} = \frac{1}{2},$$

pois $\angle ABI = 30^o$ e $AB = AO = OB$. Logo, $SR = 1$.

11. (E)



Temos que $m(\angle TAU) = 90^o$, pois $XAYD$ é quadrado. Também temos que $m(\angle TUA) = \frac{m(DY)-m(AB)}{2} = 15^o$ e $m(\angle UBA) = m(\angle AYD) = 90^o$, pois $ABDY$ é inscritível. Como AB é lado do hexágono inscrito na circunferência de raio 1, temos que $AB = 1$. Assim, no triângulo retângulo UBA, $AT = \frac{1}{sen15^o}$ e no triângulo retângulo TAU, $\frac{AU}{TU} = cos15^o \Leftrightarrow TU = \frac{1}{sen15^o cos15^o} = \frac{2}{sen30^o} = 4$, onde usamos que $sen2x = 2senxcosx$.

12. (D) Reescreva a equação como $\{x\} = \frac{\lfloor x \rfloor - 38}{2016}$. Como $0 \leq \{x\} < 1$, devemos ter

$$0 \leq \frac{\lfloor x \rfloor - 38}{2016} < 1 \Leftrightarrow 38 \leq \lfloor x \rfloor < 2054.$$

Como $\lfloor x \rfloor$ é inteiro, pode variar de 38 a 2053, em um total de 2016 números. Para cada valor de $\lfloor x \rfloor$, temos um valor de x correspondente, o que nos dá um total de 2016 soluções.

13. (A) Iniciaremos escolhendo as casas da primeira e da última linha, o que pode ser feito de $(n-2)(n-3)$ maneiras, uma vez que os quatro cantos do tabuleiro são proibidos. Feito isto, as $n-2$ casas restantes podem ser escolhidas de $(n-2)!$ maneiras, pois podemos pensar nesta escolha como uma permutação de $n-2$ elementos. Desta maneira, pelo princípio multiplicativo, há $(n-2)(n-3)(n-3)!$ maneiras de escolhermos as casas com as condições impostas.

14. (A) Como todos os algarismos são não nulos, podemos simplificar a igualdade, cancelando os termos repetidos e obtendo: $Z = S^3 \times I^2$. Como Z é um algarismo, temos que $S = 1$ ou $S = 2$. No primeiro caso, $I^2 = 4$ ou $I^2 = 9$. No segundo caso, a única opção é $I^2 = 1$. Assim, as possibilidades são: $(S, I) = (1, 2), (1, 3)$ ou $(2, 1)$. Dado que E é diferente de I e S, temos 7 opções para a sua escolha.
Vejamos numa tabela quais os possíveis produtos $P = S \times E \times I \times S$ e de Z oriundos destas escolhas.

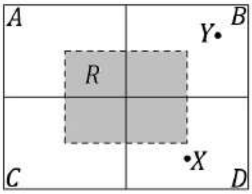
S	I	E	P	Z	S	I	E	P	Z	S	I	E	P	Z
1	2	3	6	4	1	3	2	6	9	2	1	3	12	8
1	2	4	8	4	1	3	4	12	9	2	1	4	16	8
1	2	5	10	4	1	3	5	15	9	2	1	5	20	8
1	2	6	12	4	1	3	6	18	9	2	1	6	24	8
1	2	7	14	4	1	3	7	21	9	2	1	7	28	8
1	2	8	16	4	1	3	8	24	9	2	1	8	32	8
1	2	9	18	4	1	3	9	27	9	2	1	9	36	8

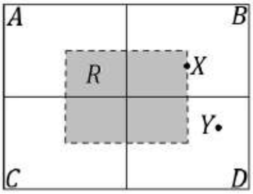
Da tabela anterior, excluindo as combinações que fazem Z ser uma das letras já escolhidas, podemos concluir que existem 12 valores distintos para P:

$$6, 10, 12, 14, 15, 16, 18, 20, 21, 24, 28 \text{ e } 36.$$

15. (E) Temos que $p_1 = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$, pois há 2 casos favoráveis (resultados iguais a 5 ou 6) e 6 casos possíveis.
Para calcular p_2, temos que o número de casos possíveis é $6^2 = 36$. Para os casos favoráveis, veja que devemos ter a soma dos dados iguais a $10, 11$ ou 12. Para termos a soma 10, podemos ter $(6, 4), (5, 5)$ e suas permutações. Para a soma 11, podemos ter $(6, 5)$ e suas permutações e para a soma 12, podemos ter $(6, 6)$. Há assim um total de $2 + 1 + 2 + 1 = 6$ casos favoráveis. Logo $P - 2 = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$.
Finalmente, para calcular p_3, temos que o número de casos possíveis é $6^3 = 216$. Para os casos favoráveis, devemos ter a soma dos dados igual a $15, 16, 17$ ou 18. Para a soma 15, podemos ter $(6, 6, 3), (6, 5, 4), (5, 5, 5)$ e suas permutações; para a soma 16, podemos ter $(6, 6, 4), (6, 5, 5)$ e suas permutações; para a soma 17, podemos ter $(6, 6, 5)$ e suas permutações e para a soma 18, podemos ter $(6, 6, 6)$. Há, assim, um total de $3 + 6 + 1 + 3 + 3 + 3 + 1 = 20$ casos favoráveis. Logo $p_3 = \frac{20}{216} = \frac{5}{54}$. Desta maneira, temos que $p_3 < p_2 < p_1$.

16. (B) Divida a tela do videogame, usando as mediatrizes dos seus lados, em quatro retângulos iguais denotados por A, B, C e D. Considere ainda o retângulo sombreado R formado pelos centros destes quatro retângulos.





A distância de videogame sempre é menor ou igual à distância euclidiana usual na tela e a troca de posição de 2 desses 4 retângulos com um lado em comum não muda a distância de videogame entre dois pontos quaisquer inseridos neles, apesar de eventualmente mudar a distância euclidiana na tela. Veja a figura anterior. Consequentemente, dados quaisquer dois pontos da tela, após algumas trocas de posições de retângulos, podemos supor que existem dois pontos no retângulo R cuja distância euclidiana é igual à distância de videogame entre eles. Como a maior distância em R é sua diagonal, que mede $\frac{\sqrt{3^2+4^2}}{2} = 2,5$, podemos concluir que nenhuma distância de videogame entre dois pontos é maior que $2,5$. Além disso, veja que a distância de videogame entre o centro da tela e qualquer um dos cantos é $2,5$.

17. (D) O sistema pode ser reescrito como

$$abc = b^2 + c^2 = c^2 + a^2 = a^2 + b^2,$$

com a, b e c não nulos. Desta maneira, obtemos que $a^2 = b^2 = c^2$. Logo, há dois números iguais e suporemos $a = b$ (depois basta permutar para obter as outras soluções).
Se $a = b = c$, temos que $a = b = c = 2$ e obtemos a solução $(2, 2, 2)$.
Se $a = b = -c$, temos que $a = b = -2$ e $c = 2$, o que nos dá a solução $(-2, -2, 2)$. Permutando essa tripla, obtemos também as soluções $(-2, 2, -2)$ e $(2, -2, -2)$, o que nos dá um total de 4 soluções.

18. (E) Note que um mês possui 4 ou 5 sábados e que $365 = 7 \times 52 + 1$. Então, um ano possui 52 semanas completas e 1 ou 2 dias extras, dependendo de ele ser ou não ser bissexto. Desse modo, um ano terá 52 ou 53 sábados e, chamando de x o número de meses com 5 sábados, podemos analisar as equações:

$$5x + 4(12 - x) = 52 \Leftrightarrow x + 48 = 52 \Leftrightarrow x = 4;$$

$$5x + 4(12 - x) = 53 \Leftrightarrow x + 48 = 53 \Leftrightarrow x = 5.$$

Então, um ano é sabadoso quando possui 53 sábados e isso acontece quando 1 de janeiro é sábado ou quando 2 de janeiro é sábado e o ano é bissexto, como acontece com 2016. Quando um ano é bissexto, o dia 1 de janeiro "avança dois dias na semana"em relação ao ano anterior e, quando o ano não é bissexto, "ele avança apenas um dia na semana"também em relação ao ano anterior. Desse modo, podemos montar a tabela a seguir com os dias 1 de janeiro dos próximos anos.

Ano	2016	2017	2018	2019	2020	2021	2022
1 de jan	sex.	dom.	seg.	ter.	qua.	sex.	sáb.

Portanto, o próximo ano sabadoso será 2022.

19. (D) O conjunto $\{1, 2, 3, 5, 29, 869\}$ tem a propriedade do enunciado. Provaremos agora que X não pode ter 7 elementos, o que mostrará que a quantidade máxima de elementos é 6. Suponha por absurdo que X possui 7 elementos, digamos $X = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7\}$, com $a_i < a_j$, se $i < j$.
Afirmamos agora que $mdc(a_i, a_j) = 1$ se $i \neq j$. De fato, se $p \mid a_i$ e $p \mid a_j$, supondo sem perdas $i < j$, temos que $a_i \mid a_j + 1$. Logo $p \mid a_j + 1$ e $p \mid a_j$, o que nos dá que $p = 1$, como queríamos.

    Como $a_7 + 1$ é múltiplo de $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$, segue que $a_7 + 1$ é múltiplo do produto $a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6$. Como os números $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$ são primos entre si dois a dois, temos que $a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6 \geq 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 = 2310$. Logo $a_7 \geq 2309$, o que é absurdo, pois $a_7 \leq 2016$.

20. (B) Considere um número de até quatro dígitos, denotado por $\overline{\overline{abcd}}$, e veja que a diferença entre ele e a soma dos seus dígitos é:

$$\overline{\overline{abcd}} - (a + b + c + d) = 999a + 99b + 9c.$$

Se $a \geq 1$, o resultado passa de 1000. Além disso, se um número possuir 5 ou mais dígitos, uma diferença semelhante à mencionada anteriormente, também será maior que 1000. Se $a = 0$, temos 10 opções para o b, 10 opções para o c e devemos subtrair a opção em que ambos são zero, pois só nos interessa resultados maiores que 1 e menores que 1000. Então, nesse caso, temos $10 \cdot 10 - 1 = 99$ números sagazes. Se $a = 1$, então a diferença será menor que 1000 apenas para $b = c = 0$ e isto nos produz o número sagaz 999. Note que não há números contados com repetição, pois para dígitos a, b, c, x, y, z, a igualdade $999a + 99b + 9c = 999x + 99y + 9z$ é equivalente a $999(a - x) + 99(b - y) + 9(c - z) = 0$ e isto implica $a = x, b = y$ e $c = z$. Concluímos então que existem $99 + 1 = 100$ números sagazes maiores que 1 e menores que 1000.

21. (D) A soma total das quantidades de pedras é

$$1 + 2 + 3 + \ldots + 9 + 11 = 56.$$

Para que as pilhas possuam uma mesma quantidade k de pedras, este inteiro deve ser um divisor de 56. Além disso, como alguma das pilhas no final do processo conterá a pilha com 11 pedras, cada uma deve ter 11 ou mais pedras. Analisando os divisores de 56, temos apenas as possibilidades $14, 28$ e 56 como possíveis valores de k. Veja que a cada junção de pilhas, a quantidade total delas diminui em apenas uma unidade. Assim, para que no final tenhamos apenas uma pilha com 56 pedras, serão necessários 9 usos da operação. Para obtermos duas pilhas com 28, precisamos fazer 8 operações. Finalmente, para obtermos 4 pilhas com 14, precisamos usar 6 operações. De fato, podemos executar explicitamente essas 6 operações indicando-as pelo símbolo de $+$ e agrupando as pilhas correspondentes entre parênteses:

$$(11+3),(9+5),(8+6),(7+4+2+1).$$

22. (A) Como o lado do quadrado mede 6, temos $DM = MC = CE = 3$. Os triângulos CEH e DEA são semelhantes. Daí,

$$\frac{CH}{DA} = \frac{CE}{DE} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}.$$

Portanto, $CH = \frac{6}{3} = 2$ e $HB = CB - CH = 4$. A área do quadrilátero $CHAM$, denotada por $[CHAM]$, pode ser obtida através da equação:

$$[CHAM] = [ACM] + [ACH] = \frac{3\cdot 6}{2} + \frac{2\cdot 6}{2} = 15.$$

Pelo Teorema de Pitágoras aplicado no triângulo ADE, temos

$$[AEFG] = AE^2 = AD^2 + DE^2 = 117.$$

Logo, $\frac{[CHAM]}{[AEFG]} = \frac{15}{117} = \frac{5}{39}$.

23. (C) Considere a função f tal que se $n = p_1^{\alpha_1}\dots p_k^{\alpha_k}$ é a fatoração em primos de n, então $f(n) = \alpha_1 + \ldots + \alpha_k + 1$; defina também $f(1) = 1$. Esta função é tal que se m é múltiplo de n, com $m > n$, então $f(m) > f(n)$. Para esta função, temos que

$$f(2016) = f(2^5\cdot 3^2\cdot 7) = 5+2+1+1 = 9.$$

Provaremos agora, por indução forte em n, que se n possui t fatores primos (contando repetições), então $f(n) \geq t+1$.
Como f toma valores nos inteiros positivos, temos que $f(1) \geq 1$ e como 2 é múltiplo de 1, segue que $f(2) > f(1)$ e, portanto, $f(2) \geq 2$, o que mostra os casos iniciais da indução.
Suponha agora que para todo $k < n$, a propriedade é válida. Se n é primo,

$f(n) > f(1)$ e então $f(n) \geq 2$, como queríamos. Se n não é primo, tome p um fator primo de n. Logo $f(n) > f\left(\frac{n}{p}\right)$. Se n tem t fatores primos, $\frac{n}{p}$ possui $t-1$ fatores primos e por hipótese de indução, $f\left(\frac{n}{p}\right) \geq t$. Logo $f(n) > f\left(\frac{n}{p}\right) \geq t$ e então $f(n) \geq t+1$, como queríamos. Desta forma, mostramos que $f(2016) \geq 9$, e então o valor mínimo buscado é de fato 9.

24. (C) Considerando 2006 números iguais a 1 e os outros 10 números iguais a 2, temos que a soma é igual a $2006 + 10 \cdot 2 = 2026$ e o produto é igual a $2^{10} = 1024$. Neste caso, a soma é maior ou igual ao produto.
Provaremos agora que devemos ter pelo menos 2006 números iguais a 1. Para isso, suponha por absurdo que há k números iguais a 1, com $k \leq 2005$.
Sejam $x_1 \leq x_2 \leq \ldots \leq x_{2016}$ os números. Logo temos que $k + x_{k+1} + \ldots + x_{2016} \geq x_{k+1} \ldots x_{2016}$. Usaremos agora que $k + x_{k+1} + \ldots + x_{2016} \leq k + (2016-k)x_{2016}$ e que $x_{k+1} \ldots x_{2016} \geq 2^{2015-k}x_{2016}$. Desta forma, segue que:

$$k + (2016-k)x_{2016} \geq 2^{2015-k}x_{2016} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x_{2016}(2^{2015-k} + k - 2016) \leq k.$$

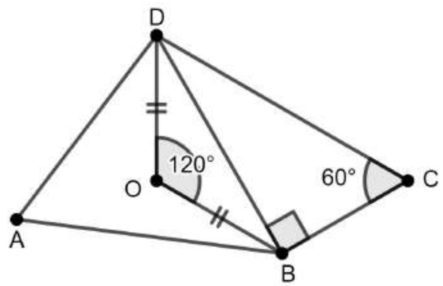
Como $k \leq 2005, 2^{2015-k} + k - 2016 > 0$, e usando que $x_{2016} \geq 2$, segue que

$$2^{2016-k} + 2k - 4032 \leq k \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2^{2016-k} + k \leq 4032.$$

Para $k \leq 2004$, $2^{2016-k} \geq 2^{12} = 4096$ e temos um absurdo. Por outro lado, para $k = 2005$, deveríamos ter $2^{11} + 2005 = 4043 \leq 4032$, o que também é absurdo. Com isso, segue que pelo menos 2006 dos números são iguais a 1.

25. (E) Sendo O o circuncentro do triângulo ABD, segue que $m(\angle BOD) = 120^o$ e então o quadrilátero $BCDO$ é inscritível. Temos que $m(\angle COD) = m(\angle CBD) = 90^o$ e $m(\angle OCD) = m(\angle OBD) = 30^o$. Desta forma, no triângulo retângulo DOC, a razão pedida é igual a $\frac{CO}{CD} = \cos 30^o = \frac{\sqrt{3}}{2}$.



38^a OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA - 2016

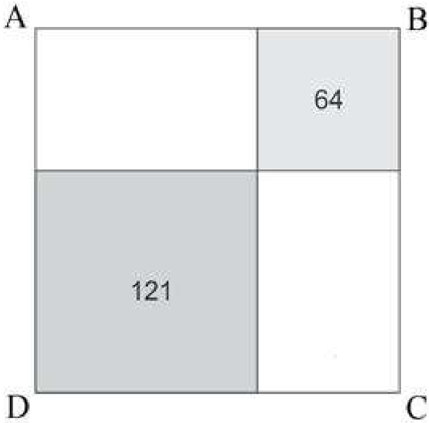
Problemas da Segunda fase

Problemas - Nível 1 - Parte A

1. Elevando o número 2016 ao cubo, obtemos o número 8193540096, de dez algarismos. Quantos números inteiros menores do que 2016 têm como cubo um número de dez algarismos?

2. Um comerciante de carros usados vendeu dois carros pelo preço de 12.000 reais cada um. Num deles, ele obteve um lucro de 20% sobre o custo e no outro, ele teve um prejuízo de 20% sobre o custo.
   Parece que ele não perdeu nem ganhou nada nessa negociação, mas na verdade teve prejuízo. No total, de quantos reais foi o prejuízo?

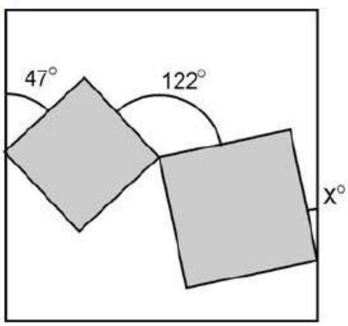
3. O quadrado $ABCD$ foi dividido em dois retângulos congruentes e mais dois quadrados cujas áreas em metros quadrados estão indicadas na figura. Qual é a área do quadrado $ABCD$ em metros quadrados?



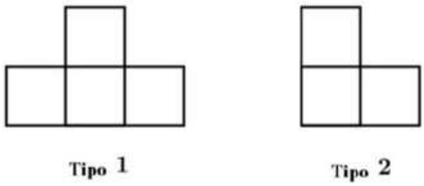
4. Na conta de multiplicar a seguir, os algarismos primos $2, 3, 5$ e 7 são representados pelas letras A, B, C, D, não necessariamente nessa ordem. Qual é o número $ABCD$?

$$\begin{array}{ccccc} & & A & A & B \\ & \times & & C & C \\ \hline & D & C & D & B \\ D & B & D & B & B \\ \hline D & B & B & A & B \end{array}$$

5. Na figura, os quadrados cinzentos têm um vértice comum e o quadrado maior tem um vértice de cada um desses quadrados em seus lados. As medidas de alguns ângulos, em graus, estão indicadas na figura. Qual é o valor de X?



6. A figura a seguir apresenta peças de dois tipos: o Tipo 1, com 4 quadradinhos, e o Tipo 2, com 3 quadradinhos.



Um tabuleiro com m linhas e n colunas foi coberto, sem sobreposição, com peças do Tipo 1 com a exceção de 3 quadradinhos. Então, o mesmo tabuleiro foi coberto, também sem sobreposição, com peças do Tipo 2 com exceção de 2 quadradinhos. As peças podem ser giradas, mas não podem sair do tabuleiro. Qual é o menor valor possível para o produto $m \cdot n$?

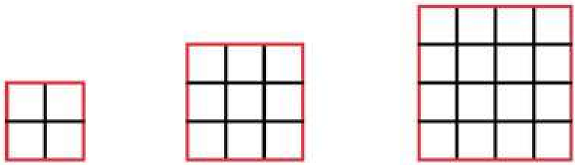
Problemas - Nível 1 - Parte B

1. Janaína quer pintar as casas de um tabuleiro 7×7 de vermelho, de azul ou de marrom, da seguinte maneira: em cada linha, o número de casas vermelhas não pode ser menor que o número de casas com cada uma das outras cores e, em cada coluna, o número de casas azuis não pode ser menor que o número de casas com cada uma das outras cores. Todas as linhas e colunas devem conter casas das três cores.

   (a) Pelo menos quantas casas serão pintadas de vermelho?

   (b) Quantas casas serão pintadas de marrom?

2. Associamos a cada quadriculado $2 \times 2, 3 \times 3, 4 \times 4, \ldots$, o quociente do número de segmentos unitários do perímetro pelo número de segmentos unitários no interior do quadriculado. A figura mostra os três primeiros quadriculados e seus quocientes associados.



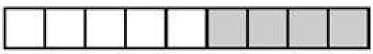
$\frac{8}{4} = 2$ $\qquad$ $\frac{12}{12} = 1$ $\qquad$ $\frac{16}{24} = \frac{2}{3}$

   (a) Qual é o quociente associado ao quadriculado 5×5?

   (b) Quantos segmentos unitários tem o quadriculado cujo quociente associado é igual a $\frac{1}{4}$?

   (c) A diferença, em módulo, entre os quocientes associados a dois quadriculados consecutivos da sequência é igual a $\frac{1}{190}$. Quantos segmentos unitários tem cada lado do quadriculado menor?

3. Ana pretende escrever os algarismos de 1 a 9 nas casas do desenho abaixo para formar um número N de 9 algarismos distintos:



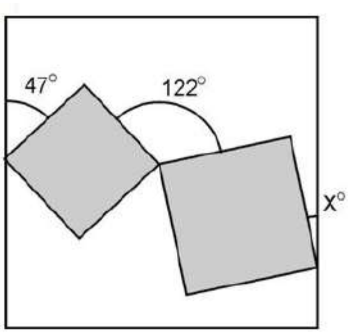
(a) De quantas maneiras Ana pode formar o número N escrevendo os algarismos pares nas casas cinzentas?

(b) De quantas maneiras Ana pode formar o número N escrevendo apenas algarismos ímpares nas casas cinzentas?

(c) De quantas maneiras ela pode formar o número N de maneira que a soma dos algarismos escritos nas casas cinzentas seja o dobro da soma dos algarismos escritos nas casas brancas?

Problemas - Nível 2 - Parte A

1. Na figura, os quadrados cinzentos têm um vértice comum e o quadrado maior tem um vértice de cada um desses quadrados em seus lados. As medidas de alguns ângulos, em graus, estão indicadas na figura. Qual é o valor do ângulo X?



2. Na conta de multiplicar a seguir, os algarismos primos $2, 3, 5$ e 7 são representados pelas letras A, B, C, D, não necessariamente nessa ordem. Qual é o número $ABCD$, cujos algarismos são, da esquerda para a direita, A, B, C e D?

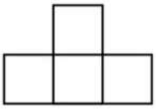
$$\begin{array}{ccccc} & & A & A & B \\ & \times & & C & C \\ \hline D & B & B & A & B \end{array}$$

3. Sabendo que as raízes da equação $(4^2 + b^2)x^2 - 26bx + (b^2 + 9^2) = 0$ são iguais e que b é um número real positivo, determine o valor de b.

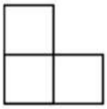
4. Considere a sequência de números $1, 1, 2, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 1, 2, \ldots$ em que escrevemos os números de 1 até $1!$, de 1 até $2!$, de 1 até $3!$ e assim por diante. Veja que cada

posição dessa sequência é ocupada por um número. Por exemplo, na primeira vez que o número 5 aparece na sequência ele ocupa a posição 8. Determine qual número ocupa a posição 10.000.

5. A figura a seguir apresenta peças de dois tipos: o Tipo 1, com 4 quadradinhos, e o Tipo 2, com 3 quadradinhos.



Tipo 1



Tipo 2

Um tabuleiro com m linhas e n colunas foi coberto, sem sobreposição, com peças do Tipo 1 com a exceção de 3 quadradinhos. Então, o mesmo tabuleiro foi coberto, também sem sobreposição, com peças do Tipo 2 com exceção de 2 quadradinhos. As peças podem ser giradas, mas não podem sair do tabuleiro. Qual é o menor valor possível para o produto $m \cdot n$?

6. O quadrado $ABCD$ de lado $12cm$ está inscrito em uma circunferência Γ. Seja E um ponto sobre o lado BC tal que $BE = 5cm$. A reta AE corta Γ novamente no ponto F. O segmento DF corta o lado BC no ponto G. O comprimento do segmento EG em cm é escrito como fração irredutível $\frac{X}{Y}$. Quanto vale a soma $X + Y$?

Problemas - Nível 2 - Parte B

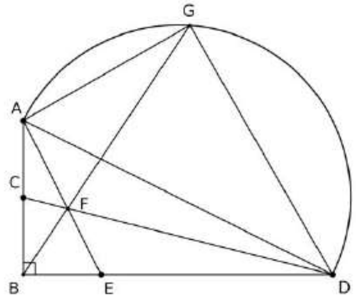
1. Janaína quer pintar as casas de um tabuleiro 7×7 de vermelho, de azul ou de marrom, da seguinte maneira: em cada linha, o número de casas vermelhas não pode ser menor que o número de casas com cada uma das outras cores e, em cada coluna, o número de casas azuis não pode ser menor que o número de casas com cada uma das outras cores. Todas as linhas e colunas devem conter casas das três cores.

   (a) Pelo menos quantas casas serão pintadas de vermelho?

   (b) Quantas casas serão pintadas de marrom?

2. Uma lista de números de dois dígitos é *legal* se, a partir de seu segundo termo, a quantidade de divisores positivos de cada um é maior que a do número que o precede na lista e, além disso, pelo menos um de seus dígitos é maior que um dos dígitos do número que o precede. Qual é o tamanho máximo de uma lista *legal*?

3. Na figura abaixo, $AB = 4, BD = 8, CB = BE = 2$ e AGD é um semicírculo de diâmetro AD. Encontre a razão entre os comprimentos de AG e GD.

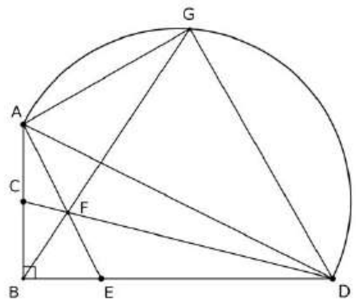


Problemas - Nível 3 - Parte A

1. Considere a sequência de números $1, 1, 2, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 1, 2, \ldots$ em que escrevemos os números de 1 até $1!$, de 1 até $2!$, de 1 até $3!$ e assim por diante. Veja que cada posição dessa sequência é ocupada por um número. Por exemplo, na primeira vez que o número 5 aparece na sequência ele ocupa a posição 8. Determine qual número ocupa a posição 10.000.

2. Seja r uma raiz da equação $x^2 - 12x - 12 = 0$. Sabe-se que r também é raiz da equação $x^4 - ax^3 - b = 0$, sendo a e b racionais positivos. Calcule $a + b$.

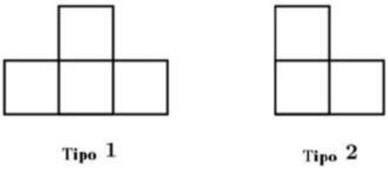
3. Na figura abaixo, $AB = 4, BD = 8, CB = BE = 2$ e AGD é um semicírculo de diâmetro AD. Sendo $\frac{AG}{GD} = \frac{p}{q}$, com p e q inteiros positivos primos entre si, calcule p^q.



4. Determine o menor inteiro positivo n tal que existem dois triângulos retângulos não congruentes com lados de medida inteira e perímetro n.

5. As raízes de um polinômio P, de coeficientes inteiros e grau 10, são todas inteiras e distintas. Então todo valor não nulo de $P(n)$, n inteiro, tem no mínimo quantos divisores positivos?

6. A figura a seguir apresenta peças de dois tipos: o Tipo 1, com 4 quadradinhos, e o Tipo 2, com 3 quadradinhos. Um tabuleiro com m linhas e n colunas foi coberto, sem sobreposição, com peças do Tipo 1 com a exceção de 3 quadradinhos. Então, o mesmo tabuleiro foi coberto, também sem sobreposição, com peças do Tipo 2 com exceção de 2 quadradinhos. As peças podem ser giradas, mas não podem sair do tabuleiro.
   Qual é o menor valor possível para o produto $m \cdot n$?



Problemas - Nível 3 - Parte B

1. Janaína quer pintar as casas de um tabuleiro 7×7 de vermelho, de azul ou de marrom, da seguinte maneira: em cada linha, o número de casas vermelhas não pode ser menor que o número de casas com cada uma das outras cores e, em cada coluna, o número de casas azuis não pode ser menor que o número de casas com cada uma das outras cores. Todas as linhas e colunas devem conter casas das três cores. Quantas casas serão pintadas de marrom?

2. Dois círculos Γ e Ω se cortam em A e G. A reta t tangencia Γ em B e Ω em C. Se G é o baricentro de ABC, qual é o maior valor possível do ângulo $\angle BAC$?

3. Em Combinatória, existem os q-*análogos* de contas combinatórias; basicamente, trocamos n por $[n]_q = 1 + q + q^2 + \ldots + q^{n-1}$. Por exemplo, o q-*fatorial* é:

$$[n]_q! = [1]_q \cdot [2]_q \ldots [n]_q = 1(1+q)\ldots(1+q+q^2+\ldots+q^{n-1}).$$

   Sendo $\binom{n}{k}_q = \frac{[n]_q!}{[k]_q! \cdot [n-k]_q!}$, com quantos zeros termina o 3-binomial $\binom{2016}{38}_3$?

Problemas e soluções da Segunda fase

Soluções - 38^a - OBM 2016 - Nível 1 - 2^a Fase.

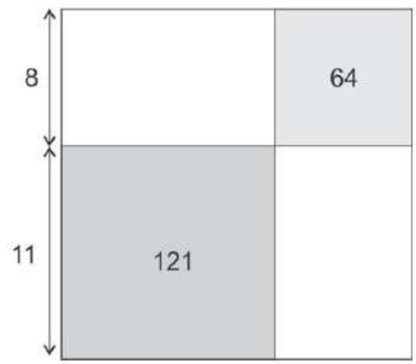
GABARITO PARTE A (cada problema vale 5 pontos)

Problema	01	02	03	04	05	06
Resposta	1016	1000	361	7532	11	0035

1. **Resposta:** 1016.
   Solução: O menor número de dez algarismos é $1000^3 = 1000000000$. Portanto, o menor número cujo cubo é um número de dez algarismos é o número 1000 e a quantidade de números inteiros de 1000 a 2015 é $2015 - 1000 + 1$.

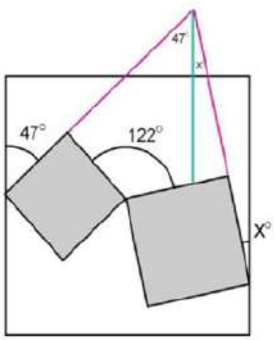
2. **Resposta:** 1000.
   Solução: Se o valor de um carro era inicialmente x e foi vendido com lucro de 20% sobre x, então ele foi vendido por $(x + 20)\%$ de x, ou seja, por $x + 0,2x = 1,2x$. Logo $1,2x = 12000 \Leftrightarrow x = 10000$, ou seja, obteve um lucro de $12000 - 10000 = 2000$ reais. Se o valor do carro era inicialmente y e foi vendido com um prejuízo de 20% sobre y, então ele foi vendido por $y - 20\%$ de y, ou seja, por $y - 0,2y = 0,8y$. Logo $0,8y = 12000 \Leftrightarrow y = 15000$, ou seja, obteve um prejuízo de $15000 - 12000 = 3000$ reais. Portanto, no total, o comerciante teve um prejuízo de $3000 - 2000 = 1000$ reais.

3. **Resposta:** 361.
   Solução: O quadrado de $64m^2$ de área tem seu lado medindo $8m$, pois $8^2 = 64$, e o de área $12m^2$ tem seu lado medindo $11m$, pois $11^2 = 121$. Logo, o quadrado maior tem lado de medida $8 + 11 = 19m$ e sua área é $19^2 = 361m^2$.



4. **Resposta:** 7532.
Solução: Quando multiplicamos B por C, o resultado termina em B. Como os nú meros são $2, 3, 5$ e 7, concluímos que $B = 5$. O número C pode ser 3 ou 7. Por outro lado, vemos que $B + D = A$, ou seja, $5 + D = A$, isto é, $A = 7$. Assim, $D = 2$ e $C = 3$. Portanto o número ABCD é o número 7532.

5. **Resposta:** 11.
Solução: Um quadrilátero convexo pode ser dividido em dois triângulos. Portanto, a soma das medidas dos ângulos internos de um quadrilátero é igual a 360^o. Na figura, o prolongamento de cada um dos lados dos triângulos internos e dois desses lados formam um quadrilátero cujos ângulos internos medem $90^o, 90^o, 122^o$ e $X + 47^o$. Para se convencer disso, considere a linha verde vertical traçada a partir do vértice superior do quadrilátero, paralela ao lado do quadrado maior. Veja a figura abaixo:

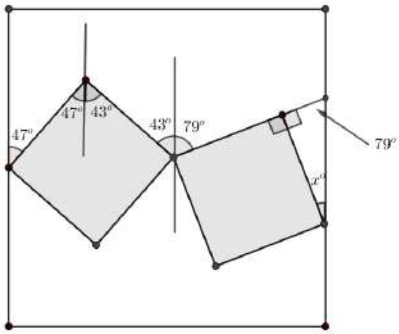


Logo, $90^o + 90^o + 122^o + X + 47^o = 360^o \Leftrightarrow X = 360^o - 349^o = 11^o$.

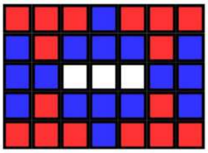
Solução alternativa: Traçando duas pelos vértices dos quadrados menores, paralelas ao lado do quadrado maior, e, prolongado-se o lado do quadrado para obter um triângulo retângulo, temos

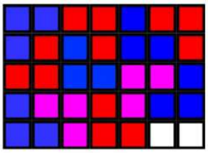
$$X + 79^o + 90^o = 180^o \Leftrightarrow X = 11^o$$

Veja a figura a seguir:



6. **Resposta:** 0035.
   Solução: Sendo k a quantidade de peças do tipo 1, a quantidade de casas no tabuleiro é $mn = 4k+3 = 4(k+1)-1$. Além disso, sendo x a quantidade de peças do tipo 2, a quantidade de casas no tabuleiro é $mn = 3x+2 = 3(x+1)-1$. Logo $mn+1 = 4(k+1) = 3(x+1)$ é múltiplo de 4 e 3, e é portanto múltiplo de 12. Com isso, mn pode ser igual a $11, 23, 35, \ldots$ Como 11 e 23 são primos, nesse caso o tabuleiro teria uma linha ou uma coluna, e não é possível preencher com peças do tipo 1 nem do tipo 2. Para $m = 5$ e $n = 7$, temos as seguintes possibilidades de preencher o tabuleiro:

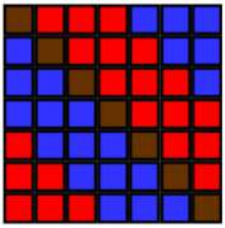




GABARITO PARTE B

1. Como há três cores para $7 = 3 \cdot 2 + 1$ casas em cada fila, cada linha tem pelo menos 3 casas vermelhas e cada coluna tem pelo menos 3 casas azuis. Logo o tabuleiro tem pelo menos $3 \cdot 7 = 21$ casas vermelhas e $3 \cdot 7 = 21$ casas azuis.
   Suponha que há pelo menos 22 casas vermelhas. Assim, pelo princípio da casa dos pombos, alguma coluna tem pelo menos 4 casas vermelhas, o que não é possível pois deveria haver pelo menos mais 4 casas azuis. Da mesma maneira mostramos que não é possível haver 22 ou mais casas azuis.

   Logo há 21 casas vermelhas, 21 casas azuis e $49 - 21 - 21 = 7$ casas marrons.O seguinte exemplo mostra a existência de um tabuleiro com essas condições.

2. (a) O quadriculado 5×5 tem perímetro igual a $4 \cdot 5 = 20$. No seu interior há $2 \cdot 4 \cdot 5 = 40$ segmentos unitários.
   Portanto, o quociente associado a esse quadriculado é $\frac{20}{40} = \frac{1}{2}$.

   (b) O quadriculado $n \times n$ tem $4n$ segmentos unitários no seu perímetro e $2n(n-1)$ no seu interior. Logo, o número associado a esse quadrilátero é $\frac{4n}{2n(n-1)} = \frac{2}{n-1}$.
   Temos
   $$\frac{2}{n-1} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow n - 1 = 8 \Leftrightarrow n = 9.$$
   O número de segmentos unitários desse quadriculado é igual ao número de segmentos unitários do seu perímetro mais o número de segmentos unitários do seu interior, totalizando $4 \cdot 9 + 2 \cdot 9 \cdot (9 - 1) = 36 + 144 = 180$ segmentos unitários.

   (c) Se um quadriculado da sequência é $n \times n$, o seu sucessor é $(n+1) \times (n+1)$ e os nuúmeros associados a eles são, respectivamente, $\frac{2}{n-1}$ e $\frac{2}{n+1-1} = \frac{2}{n}$. Como os números associados decrescem em valor, temos
   $$\frac{2}{n} - \frac{2}{n-1} = \frac{1}{190} \Leftrightarrow \frac{2n+2-2n}{n(n-1)} = \frac{1}{190} \Leftrightarrow \frac{2}{n(n-1)} = \frac{1}{380}.$$
   Note que $380 = 19 \cdot 20$, logo o quadriculado menor tem $n = 20$ segmentos unitários.

Observação: resolvendo a equação de segundo grau, obtemos dois valores para n, mas um deles é negativo.

3. (a) Para escrever os quatro algarismos pares nas quatro casas cinzentas, temos $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ possibilidades e para escrever os cinco algarismos ímpares nas cinco casas brancas, temos $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$ possibilidades. Para cada escrita feita nas casas cinzentas, temos 120 possibilidades de escrita nas casas brancas. Logo, o número total de possibilidades é $120 \cdot 24 = 2880$.

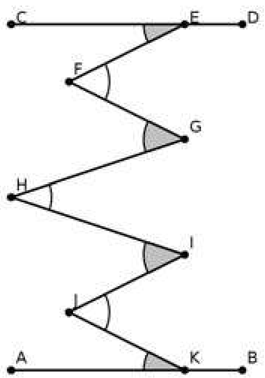
   (b) Para escrever quatro dos cinco algarismos ímpares nas casas cinzentas, temos $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 120$ possibilidades e para escrever os cinco algarismos que restarem nas cinco casas brancas, temos $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$ possibilidades. Logo, o número total de possibilidades é $120 \cdot 120 = 14400$.

   (c) A soma dos algarismos de 1 a 9 é 45. Dividindo 45 em duas parcelas tais que uma é o dobro das outras, obtemos 15 e 30. Portanto, a soma dos algarismos escritos nas casas cinzentas é 30 e isto pode ser feito usando apenas os algarismos maiores: $9+8+7+6 = 30$. Como existem somente quatro dentre os nove algarismos que podem ser escritos nas casas cinzentas, a resposta para este item é exatamente igual a resposta para o item $(a), 2880$ possibilidades.

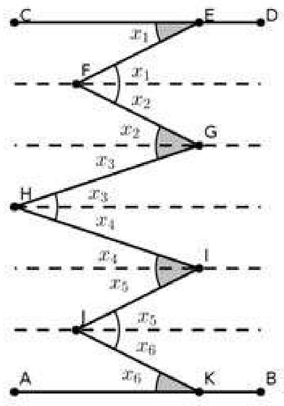
Soluções - 38ª - OBM 2016 - Nível 2 - 2ª Fase.

GABARITO PARTE A

1. **Resposta:** 0011.
   Solução: Iniciaremos esta solução com um comentário sobre um resultado geral. No desenho abaixo, temos duas retas paralelas e uma linha poligonal simples.



Por cada um dos vértices da linha poligonal, trace uma paralela ao segmento AB. Vários pares de ângulos alternos internos serão formados como indica a figura abaixo:



Cada um dos ângulos marcados possui exatamente um representante entre os ângulos brancos e cinzas. Assim, cada uma dessas somas de ângulos vale $x_1 + x_2 + \ldots + x_6$. O resultado anterior é popularmente conhecido como "Teorema do Bico". No desenho do problema original, os ângulos cinzas serão os ângulos internos aos quadrados e os ângulos brancos serão os demarcados na figura. Assim,

$$47^o + 122^o + x^o = 90^o + 90^o \Leftrightarrow x^o = 11^o.$$

2. **Resposta:** 7532.
Solução: O dígito das unidades do produto do enunciado é o dígito das unidades da multiplicação $C \times B$. Dentre os seis possíveis produtos de dois números dentre os quatro mencionados no enunciado, o único que também aparece como dígito das unidades de um de seus produtos associados é o 5. Portanto, $B = 5$. Como o número CC é múltiplo de 11, o produto final $DBBAB$ também é múltiplo de 11. Daí, pelo critério de divisibilidade por $11, 11|(D+5+5)-(5+A) = 5+D-A$. Em virtude da limitação dos algarismos, temos $0 = 5+2-7 \leq 5+D-A \leq 5+9-2 = 12$. Daí, $5 + D - A = 0$ ou 11. No primeiro caso, a única solução é $D = 2$ e $A = 7$. No segundo, não temos solução, pois não existem dois dígitos no conjunto dado inicialmente que diferem por 6. Finalmente, tendo encontrado os valores de A, B e D, obtemos $C = 3$ e $ABCD = 7532$.

3. **Resposta:** 0006.
Solução: A equação pode ser reescrita como $(b-4x)^2 + (xb-9)^2 = 0$. Como a equação admite uma raiz real x, devemos ter $b - 4x = 0$ e $xb - 9 = 0$. Claramente $x \neq 0$, portanto, $b^2 = 4x \cdot \frac{9}{x}$ e $b = 6$.

4. **Resposta:** 4087.
   Solução: Como $1! = 1, 2! = 2, 3! = 3 \cdot 2! = 6, 4! = 4 \cdot 3! = 24, 5! = 54! = 120, 6! = 6 \cdot 5! = 720, 7! = 7 \cdot 6! = 5040$ e $8! = 8 \cdot 7! = 40320$,

$$1! + 2! + \ldots + 7! < 100000 < 1! + 2! + \ldots + 8!,$$

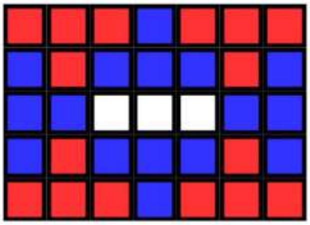
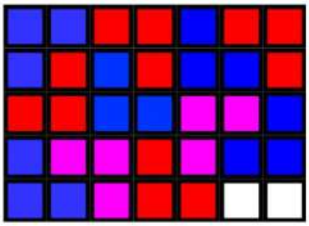
   e o número na posição 10000 é obtido tirando os primeiros $1! + 2! + \ldots + 7!$ números de 10000:

$$10000 - 1! - 2! - \ldots - 7! = 4087.$$

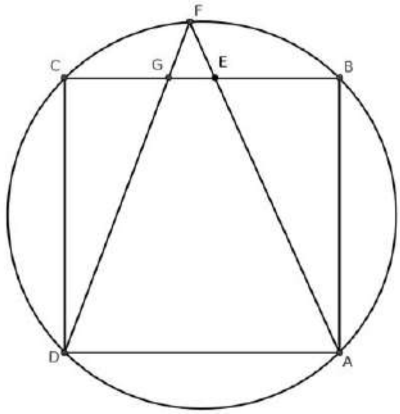
5. **Resposta:** 0035.
   Solução: Sendo k a quantidade de peças do tipo 1, a quantidade de casas no tabuleiro é

$$mn = 4k + 3 = 4(k + 1) - 1.$$

   Além disso, sendo x a quantidade de peças do tipo 2, a quantidade de casas no tabuleiro é $mn = 3x + 2 = 3(x + 1) - 1$. Logo $mn + 1 = 4(k + 1) = 3(x + 1)$ é múltiplo de 4 e 3, é portanto múltiplo de 12. Com isso, mn pode ser igual a $11, 23, 35, \ldots$ Como 11 e 23 são primos, nesse caso o tabuleiro teria uma linha ou uma coluna, e não é possível preencher com peças do tipo 1 nem do tipo 2. Para $m = 5$ e $n = 7$, temos as seguintes possibilidades de preencher o tabuleiro:

6. **Resposta:** 0052.
   Solução:



Pelo Teorema de Pitágoras aplicado no triângulo retângulo EBA, temos

$$EA = \sqrt{EB^2 + BA^2} = \sqrt{5^2 + 12^2} = \sqrt{25 + 144} = 13.$$

A Pontência do Ponto E em relação ao círculo Γ, nos diz que $FE \cdot EA = CE \cdot EB$.
Como $CE = 12 - EB$, segue que $FE = \frac{7 \cdot 5}{13}$.
Como $CB || DA$, temos $\Delta FEG \equiv \Delta FDA$. Daí

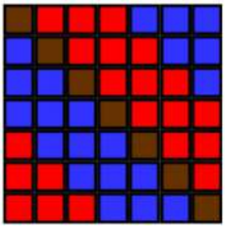
$$\frac{EG}{AD} = \frac{EF}{AF} \Rightarrow \frac{EG}{DA - EG} = \frac{EF}{AF - EF} \Rightarrow \frac{EG}{12 - EG} = \frac{35}{169}.$$

Assim, $\frac{X}{Y} = FG = \frac{35}{17} \Rightarrow X + Y = 52.$

GABARITO PARTE B

1. Como há três cores para $7 = 3 \cdot 2 + 1$ casas em cada fila, cada linha tem pelo menos 3 casas vermelhas e cada coluna tem pelo menos 3 casas azuis. Logo o tabuleiro tem pelo menos $3 \cdot 7 = 21$ casas vermelhas e $3 \cdot 7 = 21$ casas azuis.
   Suponha que há pelo menos 22 casas vermelhas. Assim, pelo princípio da casa dos pombos, alguma coluna tem pelo menos 4 casas vermelhas, o que não é possível pois deveria haver pelo menos mais 4 casas azuis. Da mesma maneira mostramos que não é possível haver 22 ou mais casas azuis.

   Logo há 21 casas vermelhas, 21 casas azuis e $49 - 21 - 21 = 7$ casas marrons. O seguinte exemplo mostra a existência de um tabuleiro com essas condições.

2. Como $2^7 > 100$, e 2 é o menor número primo, nenhum número de dois dígitos pode ter mais que 6 fatores primos em sua fatoração. Além disso, como $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 > 100$, nenhum número de dois dígitos pode pode ter mais que três fatores primos distintos. Assim, a fatoração em primos de um número de dois dígitos é da forma $p^x q^y r^z$, com $x + y + z \leq 6$ e p, q e r primos distintos. Com essas restrições, um número de dois dígitos possui no máximo 12 divisores positivos. Como não existe um inteiro de dois dígitos com 11 divisores, pois nenhum número de dois dígitos possui 10 fatores primos, a quantidade máxima de inteiros da lista é $11 - 1 = 10$. Um exemplo de lista é :
   $$13, 2\underline{5}, 3\underline{5}, 1\underline{6}, 2\underline{8}, \underline{6}4, 5\underline{6}, 3\underline{6}, 4\underline{8}, \underline{9}6.$$
   Em cada número da lista, sublinhamos o dígito que é maior que um dos dígitos do número que o precede na lista.

3. Seja H a interseção de AD e BG. Como AD é diâmetro, $\angle AGD = \angle ABD = 90^o$, segue que $\angle BAG + \angle BDG = 180^o$. Se (XYZ) denota a área de um triângulo XYZ, temos
   $$\frac{(AGB)}{(BDG)} = \frac{AB \cdot AG \cdot sen\angle BAG}{BD \cdot DG \cdot sen\angle BDG} = \frac{4 \cdot AG}{8 \cdot GD}.$$
   Além disso, como a área entre triângulos de mesma altura é a razão entre suas bases correspondentes, temos
   $$\frac{(AHB)}{(BHD)} = \frac{(AHG)}{(HGD)} = \frac{AH}{HD} \Rightarrow$$

$$\frac{(AHB)+(AHG)}{(BHD)+(HGD)} = \frac{AH}{HD} \Rightarrow \frac{(ABG)}{(BGD)} = \frac{AH}{HD}.$$

Pelo Teorema de Ceva,

$$\frac{AC}{CB} \cdot \frac{BG}{GD} \cdot \frac{DH}{HA} = 1 \Rightarrow \cdot \frac{DH}{HA} = 3.$$

Portanto,

$$\frac{AG}{GD} = 2 \cdot \frac{(AGB)}{(BDG)} = 2 \cdot \frac{AH}{HD} = \frac{2}{3}.$$

Resolução alternativa para a primeira parte:

Como AD é diâmetro e $\angle ABD = 90^o$, o quadrilátero $ABDG$ é cíclico. Daí, $\angle AGB = \angle ADB$ e $\angle BGD = \angle BAD$. Pelo Teorema da Bissetriz Interna Generalizada, temos:

$$\begin{aligned}
\frac{AG}{GD} &= \frac{AH \cdot sen\angle BGD}{HD \cdot sen\angle AGB} \\
&= \frac{AH \cdot sen\angle BAD}{HD \cdot sen\angle ADB} \\
&= \frac{AH}{HD} \cdot \frac{BD}{AD} \cdot \frac{AD}{AB} \\
&= \frac{AH}{HD} \cdot \frac{BD}{AB} \\
&= 2 \cdot \frac{AH}{HD}.
\end{aligned}$$

Soluções - 38ª - OBM 2016 - Nível 3 - 2ª Fase.

GABARITO PARTE A

1. **Resposta:** 4087.
   Solução: Como $1! = 1, 2! = 2, 3! = 3 \cdot 2! = 6, 4! = 4 \cdot 3! = 24, 5! = 54! = 120, 6! = 6 \cdot 5! = 720, 7! = 7 \cdot 6! = 5040$ e $8! = 8 \cdot 7! = 40320$,
   $$1! + 2! + \ldots + 7! < 100000 < 1! + 2! + \ldots + 8!,$$
   e o número na posição 10000 é obtido tirando os primeiros $1! + 2! + \ldots + 7!$ números de 10000:
   $$10000 - 1! - 2! - \ldots - 7! = 4087.$$

2. **Resposta:** 0024.
   Solução: Temos
   $$r^2 = 12r + 12 \Rightarrow r^3 = 12r^2 + 12r = 12(12r + 12) + 12r \Leftrightarrow$$
   $$r^3 = 156r + 144 \Rightarrow r^4 = 156r^2 + 144r = 156(12r + 12) + 144r \Leftrightarrow$$
   $$r^4 = 12(168r + 156).$$
   Logo,
   $$r = \frac{r^3 - 144}{156} = \frac{\frac{r^4}{12} - 156}{168} \Rightarrow 14(r^3 - 144) = 13(\frac{r^4}{12} - 156) \Leftrightarrow$$
   $$r^4 - \frac{168}{13}r^3 - \frac{144}{13} = 0,$$
   ou seja, r é raiz de $x^4 - \frac{168}{13}r^3 - \frac{144}{13} = 0$. Para mostrar que tal polinômio é único, veja que $r^4 = ar^3 + b = cr^3 + d \Rightarrow (a - c)r^3 = d - b$, de modo que ou r é raiz cúbica de um racional (o que não possível pois $r = 6 \pm 4\sqrt{3}$) ou $a - c = 0 \Leftrightarrow a = c \Rightarrow b = d$. Com isso, $a + b = \frac{168}{13} + \frac{144}{13} = 24$.

3. **Resposta:** 0008.
   Solução: Temos $AC = AB - BC = 4 - 2 = 2$. Pelo teorema de Ceva, sendo H a interseção de BG e AD,
   $$\frac{DH}{HA} \cdot \frac{AC}{CB} \cdot \frac{BE}{ED} = 1 \Leftrightarrow \frac{DH}{HA} = \frac{ED}{BE} \Leftrightarrow EH \| AB.$$
   Então $EH \perp BE$, e senso HED e ABD semelhantes,
   $$\frac{EH}{AB} = \frac{ED}{BD} \Leftrightarrow EH = \frac{4 \cdot 6}{8} = 3.$$

Finalmente, como $m(\angle ABD) + m(\angle(AGD) = 90^o + 90^o = 180^o$, o quadrilátero $ABGD$ é inscritível. Com isso,

$$\frac{AG}{GD} = \frac{1}{tg\angle GAD} = \frac{1}{tg\angle GBD} = \frac{BE}{HE} = \frac{2}{3}.$$

Logo $p = 2, q = 3$ e $P^q = 2^3 = 8$.

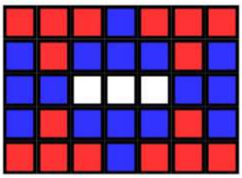
4. **Resposta:** 0060.
Solução: Primeiro note que $n \leq 60$, pois temos os $\mathtt{triângulos}$ semelhantes ao $(3, 4, 5)$, de perímetro 12, e $(5, 12, 13)$, de perímetro 30, e $mmc(30, 12) = 60$. Com isso, usamos os triâgulos $(15, 20, 25)$ e $(10, 24, 26)$. Agora, suponha que a é o menor cateto. Note que $a^2 = (c-b)(c+b)$, e que $c-b$ e $c+b$ têm a mesma paridade, e $c-b < c+b$. Encontraremos triângulos primitivos, ou seja, b e c primos entre si para valores pequenos de a:

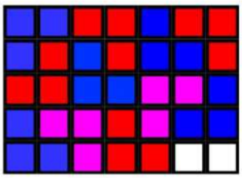
- Primeiro note que o perímetro é maior do que $3a$, logo se o perímetro é menor que 60 então $a < 20$. Além disso, é imediato que $a = 1$, e que $mdc(c-b, c+b) \leq 2$. Finalmente, como $b \geq a, (c+b)-(c-b) = 2b \geq 2a$.
- $a = 2 : (c-b)(c+b) = 4$ não tem solução, pois $c-b$ e $c+b$ deveriam ser ambos pares e, portanto, iguais a 2.
- Se a é primo ímpar, $(c-b)(c+b) = a^2 \Leftrightarrow c-b = 1$ e $c+b = a^2$, e obtemos perímetro $a^2 + a$, que é menor que 60 se, e somente se, $a \leq 5$. Obtemos $(3, 4, 5)$ e $(5, 12, 13)$, respectivamente.
- Se $a = 2p, p$ primo, $(c-b)(c+b) = 4p^2; c-b$ e $c+b$ são ambos pares, logo $c-b = 2$ e $c+b = 2p^2$, e obtemos $c = p^2+1$ e $b = p^2-1$, que não são primos entre si para p ímpar; para $p = 2$, temos $c = 5$ e $b = 3$.
- Sobram $a \in \{8, 9, 12, 15, 16, 18\}$. Para $a = 8$, temos $(c-b)(c+b) = 64$, de modo que $c-b = 2$ e $c+b = 32$, para o qual o perímetro é 40, triâgulo $(8, 15, 17)$. Para $a = 9$, temos $(c-b)(c+b) = 81$, e temos $c-b = 1$ e $c+b = 81$, para o qual o perímetro é 90. Para $a = 12$, temos $(c-b)(c+b) = 144$, e temos $c-b = 2$ e $c+b = 72$, com perímetro 84. A outra possibilidade para distribuir os fatores é $c-b = 8$ e $c+b = 18$, mas aí $b < a$. Para $a = 15$, temos $(c-b)(c+b) = 225$, e temos $c-b = 1$ e $c+b = 225$, para o qual o perímetro é 240, ou $c-b = 9$ e $c+b = 25$, para o qual $b < a$. Para $a = 16, (c-b)(c+b) = 256 \Leftrightarrow c-b = 2$ e $c+b = 128$, com perímetro 144. Finalmente, para $a = 18, (c-b)(c+b) = 182$ e $c+b \geq 81$ (pois todos os fatores 3 devem ir para o mesmo fator), perímetro pelo menos 99.

  Com isso, os triângulos primitivos com perímetro menor do que 60 são $(3, 4, 5), (5, 12, 13)$ e $(8, 15, 17)$, de perímetros $12, 25$ e 40. Com isso, verificamos que o menor mdc ocorre para 12 e 25, que é 60.

5. **Resposta:** 0021.
Solução: Temos $P(x) = a(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_{10})$. Assim, $P(n)$ é o produto de pelo menos dez inteiros distintos. Tomando $a = 1$, temos exatamente dez inteiros distintos. Podemos fazer dois deles iguais a 1 e a -1, e os outros oito inteiros tem módulo pelo menos 2. Se tomarmos como esses inteiros $p, -p, p^2, -p^2, p^3, -p^3, p^4$ e $-p^4$, p primo, obtemos $P(n) = -p^{20}$, que tem 21 divisores positivos.
Se $P(n)$ tiver k fatores primos, então a quantidade de divisores positivos é pelo menos $(1+1)^k = 2^k$. Assim $k \leq 4$. Para $k = 4$, como cada um de oito inteiros tem pelo menos um fator primo, algum primo aparece duas vezes, e a quantidade de divisores positivos é pelo menos $(2+1)(1+1)^3 = 24$. Para $k = 3$, se algum primo aparece em quatro inteiros, algum dos outros dois aparece em outros dois e a quantidade de divisores é pelo menos $(4+1)(2+1)(1+1) = 30$; se todo primo aparece em três inteiros, algum outro aparece em três inteiros, e a quantidade de divisores é pelo menos $(3+1)(3+1)(1+1) = 32$. Falta o caso em que $P(n)$ tem exatamente dois divisores primos distintos. Mas só é possível ter menos de 21 divisores quando um deles aparece em um inteiro e o outro, em sete; caso contrario, a quantidade de divisores é $(d+1)(8-d+1) \geq 3 \cdot 7 = 21$. Mas se um primo p só aparece em um inteiro, os outros sete devem ter pelo menos quatro expoentes diferentes em q, e a quantidade de fatores q e pelo menos $1+1+2+2+3+3+4 = 16$, e portanto há mais de $2 \cdot 17 = 34$ divisores.

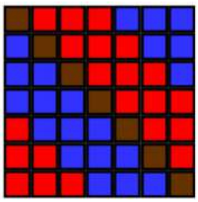
6. **Resposta:** 0035.
Solução: Sendo k a quantidade de peças do tipo 1, a quantidade de casas no tabuleiro é
$$mn = 4k + 3 = 4(k+1) - 1.$$
Além disso, sendo x a quantidade de peças do tipo 2, a quantidade de casas no tabuleiro é $mn = 3x + 2 = 3(x+1) - 1$. Logo $mn + 1 = 4(k+1) = 3(x+1)$ é múltiplo de 4 e 3, e é portanto múltiplo de 12. Com isso, mn pode ser igual a $11, 23, 35, \ldots$ Como 11 e 23 são primos, nesse caso o tabuleiro teria uma linha ou uma coluna, e não é possível preencher com peças do tipo 1 nem do tipo 2. Para $m = 5$ e $n = 7$, temos as seguintes possibilidades de preencher o tabuleiro:





GABARITO PARTE B

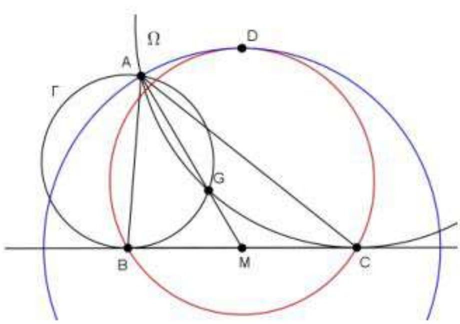
1. Como há três cores para $7 = 3 \cdot 2 + 1$ casas em cada fila, cada linha tem pelo menos 3 casas vermelhas e cada coluna tem pelo menos 3 casas azuis. Logo o tabuleiro tem pelo menos $3 \cdot 7 = 21$ casas vermelhas e $3 \cdot 7 = 21$ casas azuis.
   Suponha que há pelo menos 22 casas vermelhas. Assim, pelo princípio da casa dos pombos, alguma coluna tem pelo menos 4 casas vermelhas, o que não é possível pois deveria haver pelo menos mais 4 casas azuis. Da mesma maneira mostramos que não é possível haver 22 ou mais casas azuis.
   Logo há 21 casas vermelhas, 21 casas azuis e $49 - 21 - 21 = 7$ casas marrons. O seguinte exemplo mostra a existência de um tabuleiro com essas condições.



2. Seja $GM = k$ e $MA = 3k$. Sendo M a interseção das retas AG e BC, por potência de ponto temos

$$MG \cdot MA = MB^2 = MC^2 \Rightarrow MB = MC = k\sqrt{3}.$$

   Considere o arco capaz de 60^o que passa por B e C e o círculo de centro M e raio MA. Esses dois círculos se tangenciam no ponto médio D do arco BC, pois BCD é equilátero e, portanto, $MD = k\sqrt{3}$. Assim, A está fora ou sobre o ponto de tangência do arco capaz, de modo que $m(\angle BAC) \leq 60^o$. O valor máximo ocorre para $A = D$.



3. Podemos reescrever o 3-análogo $[n]_q$ na forma

$$[n]_3 = \frac{3^n - 1}{3 - 1} = \frac{1}{2}(3^n - 1).$$

Vamos contar a quantidade de fatores 5 em $\binom{2016}{38}_3$. Primeiro note que 5 divide $[n]_3$ se, e somente se, n é múltiplo de 4, pois $3^{4k+r} - 1 \equiv 3^r(3^4)^k - 1 \equiv 3^r - 1 \pmod 5), 0 \le r \le 3$, e testando os valores de r vemos que $r = 0$.
Agora, suponha que $n = 4 \cdot 5^\alpha m$, em que m não é múltiplo de 5. Com isso, $3^n - 1 = (3^{4 \cdot 5^\alpha} - 1)((3^{4 \cdot 5^\alpha})^{m-1} + (3^{4 \cdot 5^\alpha})^{m-2} + \ldots + 1)$. Como $3^{4 \cdot 5^\alpha} \equiv 1 (\mathrm{mod}\ 5)$, o segundo fator é congruente módulo 5 a uma soma de m uns, ou seja, não tem fator 5. Finalmente,

$$3^{4 \cdot 5^\alpha} - 1 = (3^{4 \cdot 5^{\alpha-1}})((3^{4 \cdot 5^{\alpha-1}})^4 + (3^{4 \cdot 5^{\alpha-1}})^3 + (3^{4 \cdot 5^{\alpha-1}})^2 + (3^{4 \cdot 5^{\alpha-1}}) + 1).$$

Se $t = 5q + r, 0 \le r \le 4$, então $t^5 = (5q + r)^5 \equiv \binom{5}{1}(5q)r^4 + r^5 \equiv r^5 (\mathrm{mod}\ 25)$. Assim, indutivamente, $t^{5^k} \equiv r^{5^k} (\mathrm{mod}\ 25)$. Aplicando o resultado para $t = 3^4 = 81$, temos que o segundo fator do produto acima é congruente a 5 módulo 25, e portanto $3^{4 \cdot 5^\alpha} - 1$ tem exatamente um fator 5 a mais do que $3^{4 \cdot 5^{\alpha-1}} - 1$. Como $3^4 - 1$ tem um fator 5, segue que $3^n - 1$ e, portanto, $[n]_3$, tem um total de $\alpha + 1$ fatores 5.
Note que ainda podemos cortar os q-análogos no fatorial (ou seja, $[n+1]!_q = [n+1]_q \cdot [n]_q!$). Com isso, podemos escrever

$$\binom{2016}{38}_3 = \frac{[2016]_3 [2015]_3 \ldots [1979]_3}{[38]!_3}.$$

Entre 1979 e 2016 temos 10 múltiplos de 4, entre os quais 1980 tem um fator 5 e 2000 tem 3 fatores 5; entre 1 e 38 temos 9 múltiplos de 4, sendo 20 com 1 fator 5. Com isso, a quantidade de fatores 5 em $\binom{2016}{37}_3$ é $1 + 3 = 4$.
Uma conta análoga mostra que se $n = 2^\alpha m$, m ímpar, e $\alpha > 0$, então $[n]_3$ tem $\alpha + 1$ fatores 2, e que $[n]_3$ não tem fatores 2 para n ímpar. Com isso, como entre 1979 e 2016 há 19 pares, 10 múltiplos de 4, 5 múltiplos de 8, 3 múltiplos de 16, um múltiplo de 32 e um múltiplo de 64, e entre 1 e 38 há 19 pares, 9 múltiplos de 4, 4 múltiplos de $8, 2$ múltiplos de 16 e um múltiplo de 32, a quantidade de fatores 2 em $\binom{2016}{38}_3$ é $6 - 1 = 5$. Logo a quantidade de zeros no final de $\binom{2016}{38}_3$ é 4.

Observação: pode-se usar diretamente o Teorema do Levantamento de Expoente para o cálculo da quantidade de fatores: sendo $\nu_p(k)$ a quantidade de fatores primos p em k, $\nu_p(a^n - 1) + \nu_p(n)$ se p é primo ímpar e $a - 1$ é múltiplo de p e $\nu_2(a^n - 1) = \nu_2(a^2 - 1) + \nu_2(n) - 1$ se a é ímpar.

38ª OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA - 2016

Problemas da Terceira fase

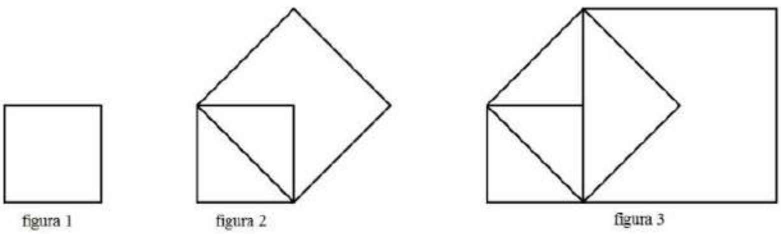
Problemas - Nível 1 (6º ou 7º ano - EF)

1. Quatro times de futebol irão disputar um campeonato no qual cada time joga uma única vez com todos os demais times. Cada vitória vale 3 pontos, cada empate vale 1 ponto e as derrotas não pontuam.

   a) Nesse campeonato, se o campeão conseguir 9 pontos, o vice 6 pontos e o terceiro 3 pontos, quantos pontos obterá o quarto colocado?

   b) Nesse campeonato, se o campeão conseguir 5 pontos, dois times acabarem na mesma posição com 3 pontos cada um e o último obtiver 2 pontos, quantos empates terão acontecido?

2. Janaína desenha uma sequência de figuras conforme a ilustração a seguir. Cada figura tem um quadrado a mais do que a figura anterior e esse quadrado que foi acrescentado tem lado igual à diagonal do maior quadrado da figura anterior. Além disso, todos os quadrados de cada figura têm um vértice comum. O quadrado da figura 1 tem área de 2 cm^2.



   a) Qual é a área do quadrado maior da figura 2?

   b) Qual é a área total da figura 3?

   c) Qual é a área total da figura 6?

3. Os números inteiros de 1 a 99 são divididos em n grupos, obedecendo às seguintes regras:

   I. Cada número pertence a somente um grupo;
   II. Cada grupo tem pelo menos dois números;
   III. Se dois números pertencem a um mesmo grupo, então a sua soma não é um número divisível por 3.

   Sabendo disso:

   a) Explique porque o número n de grupos não pode ser 50.
   b) Qual é o menor número n possível?

4. Carlinhos fez uma lista de todos os números de quatro algarismos distintos nas seguintes condições: a soma dos algarismos é 12, dois deles são pares e dois são ímpares. O número 2703, por exemplo, está nessa lista. Lembre-se de que zero é par e nenhum número começa com zero à esquerda.

   a) Qual é o número mais próximo de 2016 que está na lista de Carlinhos?
   b) Determine a soma de todos os números da lista de Carlinhos que são menores que 2016.

5. Seja N um inteiro, $N \geq 2$. O jogo da OBM tem a participação de dois jogadores A e B e começa com o jogador A recebendo o número N. Ele então deve escolher um novo número n, com n e N primos entre si e n maior ou igual à metade de N e menor do que N. Esse número n é passado para o jogador B. O jogador B, então, recebe o número n de seu oponente e deve escolher um novo número m, com m e n primos entre si e m maior ou igual à metade de n e menor do que n. Ele, então, passa para o seu oponente A o número m e o processo se repete até que um dos jogadores somente possa escolher o número 1. Esse jogador é o vencedor! Por exemplo, para $N = 9$, o jogador A pode escolher o número 5 (observe que as suas opções são $5, 7$ ou 8); o jogador B pode então escolher o número 3; A é obrigado a escolher o número 2 (essa é a única opção respeitando as regras do jogo) e, então, B escolhe 1 e vence. Determine para cada valor de N a seguir, qual jogador possui estratégia vencedora, ou seja, consegue vencer não importando quais sejam as jogadas de seu oponente.

   a) $N = 7$.
   b) $N = 2016$.

   Observação: dizemos que dois números são primos entre si se não possuem um divisor comum maior ou igual a 1. Veja que 9 e 6 não são primos entre si, pois 3 é um divisor comum.

Problemas - Nível 2

PRIMEIRO DIA

1. a) Considere todos os números formados usando os quatro algarismos $1, 2, 3$ e 4. Formamos a seguinte expressão numérica

$$S_4 = 4321 - 4312 + 4231 - 4213 + \ldots + 1243 - 1234,$$

na qual os números são listados da esquerda para a direita do maior para o menor, e os sinais $+$ e $-$ alternam-se até o final. Calcule o valor de S_4.

b) De modo análogo, tomamos todos os números de nove algarismos distintos e não nulos e formamos a expressão numérica

$$S_9 = 987654321 - 987654312 + 987654231 - \ldots - 123456789,$$

na qual os números são listados da esquerda para a direita do maior para o menor, e os sinais $+$ e $-$ alternam-se até o final. Calcule o valor de S_9.

2. As bissetrizes internas dos ângulos $\angle ABC$ e $\angle ACB$ do triângulo ABC se encontram no ponto I. A reta paralela a BI que passa pelo ponto A encontra a reta CI no ponto D. A reta paralela a CI por A encontra a reta BI no ponto E. As retas BD e CE se encontram no ponto F. Mostre que F, A e I são colineares se, e somente se, $AB = AC$.

3. Os números reais a, b, r e s são tais que as raízes da equação do segundo grau $x^2 - ax + b = 0$ são $\frac{1}{r}$ e $\frac{1}{s}$ as raízes da equação do segundo grau $x^2 - rx + s = 0$ são a e b. Sabendo que $a > 0$, encontre o seu valor.

SEGUNDO DIA

4. Considere um triângulo escaleno ABC com $AB < AC < BC$. A mediatriz do lado AB corta o lado BC no ponto K e o prolongamento de AC no ponto U. A mediatriz do lado AC corta o lado BC no ponto O e o prolongamento do lado AB no ponto G. Prove que o quadrilátero $GOKU$ é cíclico, ou seja, que seus quatro vértices estão em uma mesma circunferência.

5. Uma permutação $(a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n)$ dos números do conjunto $\{1, 2, \ldots, n\}$ é *legal* se não existem dois termos consecutivos cuja soma é um múltiplo de 3 e se os dois vizinhos de um termo qualquer não diferem por um múltiplo de 3. Por exemplo, $(4, 6, 2, 5, 3, 1)$ é uma permutação *legal* dos números do conjunto $1, 2, 3, 4, 5, 6$. Entretanto, $(1, 2, 5, 3, 4, 6)$ não é uma permutação *legal* do mesmo conjunto, pois os números 1 e 2 são vizinhos e sua soma é um múltiplo de 3. Além disso, outra razão para ela não ser *legal*, é que os vizinhos do número 4, que são o 3 e o 6, diferem por um múltiplo de 3.

a) Determine o número de permutações *legais* do conjunto de 6 elementos $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

b) Determine o número de permutações *legais* do conjunto de 2016 elementos $\{1, 2, 3, \dots, 2016\}$

Observação: Uma permutação de um conjunto é uma sequência ordenada contendo cada um de seus elementos uma única vez.

6. Seja $a_0 = a > 1$ um inteiro e, para $n \geq 0$, defina $a_{n+1} = 2^{a_n} - 1$. Mostre que o conjunto dos divisores primos dos termos da sequência a_n é infinito.

Problemas - Nível 3

PRIMEIRO DIA

1. Seja ABC um triângulo. As retas r e s são as bissetrizes internas de $\angle ABC$ e $\angle BCA$, respectivamente. Os pontos E sobre r e D sobre s são tais que $AD \| BE$ e $AE \| CD$. As retas BD e CE se cortam em F. Seja I o incentro do triângulo ABC. Mostre que se os pontos A, F e I são colineares, então $AB = AC$.

2. Encontre o menor inteiro positivo n tal que qualquer conjunto de n pontos do plano cartesiano, todos com coordenadas inteiras, contém dois cujo quadrado da distância é um múltiplo de 2016.

3. Seja k um inteiro positivo fixado. Alberto e Beralto participam do seguinte jogo: dado um número inicial N_0 e começando por Alberto, eles alternadamente fazem a seguinte operação: trocar um número n por um número m tal que $m < n$ e n e m diferem, na sua representação em base 2, exatamente em ℓ dígitos consecutivos para algum ℓ tal que $1 \leq \ell \leq k$. Quem não conseguir mais jogar, perde.

   Dizemos que um inteiro não negativo t é *vencedor* quando o jogador que recebe o número t tem uma estratégia vencedora, ou seja, consegue escolher os números seguintes de modo a garantir a vitória, não importando como o outro jogador faça suas escolhas. Caso contrário, dizemos que t é perdedor.

   Prove que, para todo N inteiro positivo, a quantidade de inteiros não negativos perdedores e menores do que 2^N é $2^{N - \lfloor \log_2(\min\{k, N\}) \rfloor - 1}$.

   Observação: $\lfloor x \rfloor$ é o maior inteiro menor ou igual a x. Por exemplo, $\lfloor 3,14 \rfloor = 3$, $\lfloor 2 \rfloor = 2$ e $\lfloor -4,6 \rfloor = -5$.

SEGUNDO DIA

4. Qual é a maior quantidade de inteiros positivos menores ou iguais a 2016 que podemos escolher de modo que não haja dois números cuja diferença é $1, 2$ ou 6?

5. Considere o polinômio do segundo grau $P(x) = 4x^2 + 12x - 3015$. Defina a sequência de polinômios $P_1(x) = \frac{P(x)}{2016}$ e $P_{n+1}(x) = \frac{P(P_n(x))}{2016}$ para todo inteiro $n \geq 1$.

   a) Prove que existe um número real r tal que $P_n(r) < 0$ para todo inteiro positivo n.

   b) Determine a quantidade de inteiros m tais que $P_n(m) < 0$ para infinitos inteiros positivos n.

6. Seja $ABCD$ um quadrilátero convexo, não circunscritível, sem lados paralelos. As retas AB e CD se cortam em E. Seja $M \neq E$ a interseção dos circuncírculos de ADE e BCE. As bissetrizes internas de $ABCD$ determinam um quadrilátero convexo cíclico de circuncentro I e as bissetrizes externas de $ABCD$ determinam um quadrilátero convexo cíclico de circuncentro J. Prove que I, J e M são colineares.

Problemas e soluções da Terceira fase

Soluções - 38ª - OBM 2016 - Nível 1 - 3ª Fase

1. **Solução:**

   a) Em um campeonato onde cada time joga uma única vez com todos os outros, cada time participa de 3 jogos. Designemos, sem perda de generalidade, os times como:

      I - Time A (campeão) com 9 pontos.
      II - Time B (vice-campeão) com 6 pontos.
      III - Time C (terceiro colocado) com 3 pontos.
      IV - Time D (quarto colocado) cujos pontos serão determinados.

      Analisando os pontos acumulados:

      - Time A, ao somar 9 pontos, certamente venceu seus 3 jogos.
      - Time B, com 6 pontos, certamente ganhou 2 jogos e perdeu 1 (não é possível atingir 6 pontos com algum empate, pois com empates um time atingiria no máximo 3 pontos).
      - Time C, acumulando 3 pontos, certamente ganhou 1 jogo e perdeu 2, pois para atingir 3 pontos com empates seria preciso ter empatado os seus três jogos, o que não é possível pois os times A e B não empataram com nenhum time.

      Diante do exposto, o time A ganhou de B, C e D; o time B perdeu para A e ganhou para C e D; o time C perdeu para A e B, e ganhou do time D. Por fim o time D perdeu para os times A, B e C, e portanto não conquistou pontos.

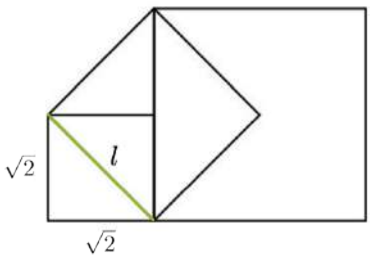
   b) Mantendo a nomenclatura anterior, as partidas e seus resultados são deduzidos da seguinte forma:

      - Time A, como campeão com 5 pontos, teve 1 vitória e 2 empates. Caso A ganhe de B ou de C, como cada um deles tem 3 pontos, o que perdeu de A é forçado a perder de D, o que é impossível, pois D tem 2 pontos. Suponhamos então que o Time A venceu o Time D e empatou com os Times B e C.
      - Os Times B e C, cada um com 3 pontos e já contabilizando 1 ponto do empate contra o Time A, devem ter empatado em todas as suas partidas. Isso implica que B empatou com C e com D, e o mesmo aconteceu para C em relação a D.

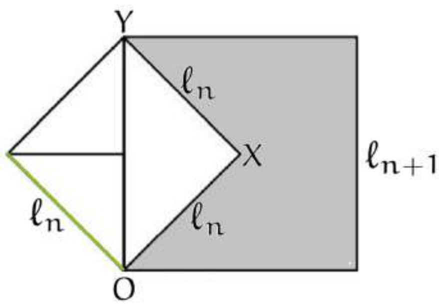
      Ao considerar todas as 6 partidas que aconteceram, 5 delas terminaram empatadas.

Observação: Outra forma de resolver esse item é notar que, se tivemos V vitórias e E empates, como foram disputadas ao todo 6 partidas, temos $V + E = 6$. Como o total de pontos distribuídos foi $5 + 3 + 3 + 2 = 13$, temos $3V + 2E = 13$, já que cada partida empatada dá 2 pontos ao total, e cada partida com um vencedor, 3 pontos. Resolvendo o sistema, encontramos $E = 5$.

2. **Solução:**
Para o item **(a)**, considerando que a área do quadrado menor, apresentado na figura 1, é de $2\,\mathrm{cm}^2$, podemos deduzir que seu lado possui uma medida de $\sqrt{2}$ cm. Consultando a ilustração abaixo, fica claro que a diagonal deste quadrado menor corresponde ao lado do quadrado maior da figura 2. Aplicando o Teorema de Pitágoras, obtemos que $l^2 = 2(\sqrt{2})^2$, resultando em $l = 2$ cm. Portanto, a área do quadrado maior na figura 2 é de $4\,\mathrm{cm}^2$.



Para a resolução dos itens **(b)** e **(c)**, definimos, para cada inteiro positivo n, o comprimento do lado do quadrado maior como ℓ_n e a área da figura n como A_n. Pelo que vimos antes, $\ell_1 = \sqrt{2}$ cm, $A_1 = 2$ cm^2 e $\ell_2 = 2$ cm. Agora observe a figura a seguir, que mostra como relacionar ℓ_n e ℓ_{n+1}, bem como a área hachurada, que corresponde à área que adicionamos à Figura n para obter a Figura $(n+1)$. Note que O é o vértice comum aos quadrados.



Pelo teorema de Pitágoras no triângulo OXY, temos $\ell_{n+1}^2 = \ell_n^2 + \ell_n^2 = 2\ell_n^2$, ou seja, $\ell_{n+1} = \sqrt{2} \cdot \ell_n$. Agora, obteremos recursivamente os valores, em centímetros, de $\ell_2, \ell_3, \ldots, \ell_6$.

$$\ell_2 = \sqrt{2} \cdot \ell_1 = 2\,\text{cm}$$

$$\ell_3 = \sqrt{2} \cdot \ell_2 = 2\sqrt{2}\,\text{cm}$$

$$\ell_4 = \sqrt{2} \cdot \ell_3 = 4\,\text{cm}$$

$$\ell_5 = \sqrt{2} \cdot \ell_4 = 4\sqrt{2}\,\text{cm}$$

$$\ell_6 = \sqrt{2} \cdot \ell_5 = 8\,\text{cm}$$

A área hachurada é a área do quadrado de lado ℓ_{n+1}, menos a área do triângulo OXY, que é $\frac{\ell_n^2}{2}$. Isso nos dá que ela é $\ell_{n+1}^2 - \frac{\ell_n^2}{2} = \frac{3\ell_n^2}{2}$ e como adicionamos essa área hachurada para obter a área da figura seguinte, concluímos que $A_{n+1} = A_n + \frac{3\ell_n^2}{2}$. Vamos agora obter as áreas $A_2, A_3, \ldots, A_6$ e resolver nosso problema.

$$A_2 = A_1 + \frac{3\ell_1^2}{2} = 2 + \frac{3 \cdot 2}{2} = 5\,\text{cm}^2$$

$$A_3 = A_2 + \frac{3\ell_2^2}{2} = 5 + \frac{3 \cdot 4}{2} = 11\,\text{cm}^2$$

$$A_4 = A_3 + \frac{3\ell_3^2}{2} = 11 + \frac{3 \cdot 8}{2} = 23\,\text{cm}^2$$

$$A_5 = A_4 + \frac{3\ell_4^2}{2} = 23 + \frac{3 \cdot 16}{2} = 47\,\text{cm}^2$$

$$A_6 = A_5 + \frac{3\ell_5^2}{2} = 47 + \frac{3 \cdot 32}{2} = 95\,\text{cm}^2$$

Portanto, a área total da Figura 3 é igual a 11 cm^2 e a área total da Figura 6 é igual a 95 cm^2.

Observação: Essa estratégia só é efetiva até a figura 8, pois a partir disto as figuras seguintes irão intersectar figuras anteriores.

3. **Solução:**

   a) Considerando a hipótese de que temos 50 grupos, pelas regras I e II, cada grupo deveria conter, no mínimo, 2 números, resultando em um total de $50 \times 2 = 100$ números. Isso contradiz o fato de que estamos trabalhando apenas com os números de 1 a 99, ou seja, um total de 99 números.

b) A regra III proíbe que dois múltiplos de 3 estejam no mesmo grupo, já que sua soma resultaria em outro múltiplo de 3. Assim, dos números de 1 a 99, ao isolarmos todos os múltiplos de 3, precisaremos de ao menos 33 grupos para alocá-los.

A seguir, temos um exemplo com 33 grupos:

$$\{2,3\}, \{5,6\}, \{8,9\}, \ldots, \{92,93\}, \{95,96,98\}, \{1,4,7,\ldots,97,99\}.$$

Observe que os grupos do 1° ao 31° possuem um número da forma $3k$ e outro da forma $3k+2$, satisfazendo assim as condições do problema. O 32° grupo também satisfaz ao problema, e o 33° grupo possui todos os números da forma $3k+1$ e o 99, e também satisfaz o problema, pois todas as possíveis somas de 2 elementos dele são da forma $3k+1+99 = 3k+100$, não múltiplo de 3, ou da forma $3k+1+3l+1 = 3(k+l)+2$, também não múltiplo de 3. O mínimo valor de n é, portanto, 33.

4. **Solução:**

(a) Analisando os algarismos de 2016, observamos que sua soma é 9. Para satisfazer o critério de que a soma dos algarismos seja 12, precisamos adicionar um total de 3 unidades. Incrementando 3 ao último algarismo de 2016, chegamos ao número 2019. Este número satisfaz todos os requisitos: contém dois algarismos pares, dois ímpares e a soma total dos algarismos é 12.

Entretanto, antes de afirmar que 2019 é a resposta, é essencial verificar se há um número na lista de Carlinhos menor que 2016 e que seja tão próximo quanto 2019. As únicas opções seriam 2015, 2014 e 2013. Porém, nenhum destes números cumpre as condições, visto que seus algarismos não somam 12.

Assim, confirmamos que o número mais próximo de 2016 que satisfaça os critérios de Carlinhos é, de fato, **2019**.

(b) Primeiramente, observemos que todos os números que estão na lista de Carlinhos e são menores do que 2016 iniciam com o algarismo 1, pois do contrário, a soma dos algarismos seria no máximo $2+0+0+9 = 11$. Portanto, buscamos todos os números da forma $1abc$, onde um dentre os algarismos distintos a, b e c é ímpar, dois deles são pares, e $a+b+c = 11$, com $a, b, c \in \{0, 2, 3, \ldots, 9\}$ (lembre-se de que o 1 já apareceu!). Isso nos leva às seguintes combinações para $\{a, b, c\}$, desconsiderando as possíveis permutações:

$$\{a, b, c\} \in \{\{0,2,9\}, \{0,3,8\}, \{0,4,7\}, \{0,5,6\}, \{2,3,6\}, \{2,4,5\}\}.$$

Dado cada conjunto, podemos formar 6 números distintos, através das permutações de a, b e c. Assim, temos um total de $6 \times 6 = 36$ números. Para calcular a soma desses números, consideramos quantas vezes cada algarismo aparece em cada posição (milhar, centena, dezena e unidade). Por exemplo, o algarismo 1 aparece 36 vezes na posição de milhar, contribuindo com $36 \times 1000 = 36000$ para a soma.

Agora, para calcular a soma de todos os números, devemos entender como cada algarismo contribui para essa soma em suas respectivas posições. Tomemos um algarismo l como exemplo. Se ele aparece em uma determinada posição (seja unidade, dezena ou centena) em k diferentes números, ele contribui para a soma total com uma certa quantia, que depende da posição em que ele está. Por exemplo, se o algarismo está na posição das unidades, ele contribui com l para cada número; se ele está na posição das dezenas, ele contribui com $10l$; e na posição das centenas, contribui com $100l$.

Assim, se um algarismo l aparece em todas as três posições (unidade, dezena e centena) para um conjunto específico de números, sua contribuição total para a soma, para aquele conjunto, é de $100l + 10l + l = 111l$. Como estamos considerando permutações de três algarismos, o total geral de contribuições para cada algarismo l em todos os conjuntos em que ele aparece é $222lk$, sendo k o número de conjuntos em que o algarismo l aparece. As contribuições individuais de cada algarismo não nulo, com base nos conjuntos listados, são:

- 2 aparece em 3 conjuntos, contribuindo com $222 \times 2 \times 3$.
- 3 aparece em 2 conjuntos, contribuindo com $222 \times 3 \times 2$.
- 4 aparece em 2 conjuntos, contribuindo com $222 \times 4 \times 2$.
- 5 aparece em 2 conjuntos, contribuindo com $222 \times 5 \times 2$.
- 6 aparece em 2 conjuntos, contribuindo com $222 \times 6 \times 2$.
- 7 aparece em 1 conjunto, contribuindo com $222 \times 7 \times 1$.
- 8 aparece em 1 conjunto, contribuindo com $222 \times 8 \times 1$.
- 9 aparece em 1 conjunto, contribuindo com $222 \times 9 \times 1$.

Logo, a soma total desses números é

$$36000 + 222(2 \times 3 + 3 \times 2 + 4 \times 2 + 5 \times 2 + 6 \times 2 + 7 \times 1 + 8 \times 1 + 9 \times 1) =$$

$$= 36000 + 222 \times 66 = 36000 + 14652 = 50652.$$

5. **Solução:**

(a) Vamos mostrar que para $N = 7$, o jogador A tem uma estratégia vencedora. De fato, uma vez que A recebe o número 7, ele deve esolher o número 6. Neste caso, como o jogador B recebe o número 6, a sua única opção é escolher o 5. Então A deve escolher o 3, forçando assim B escolher 2, o que dá a vitória a A, já que ele só pode escolher o 1.

(b) Vamos estabelecer uma estratégia geral para B ser o vencedor quando N for igual a 3 ou quando N for um número par maior ou igual a 6.

Começamos com os dois casos base:

- Para $N = 3$, A inevitavelmente escolhe 2, permitindo que B escolha 1 e vença.
- Para $N = 6$, A é compelido a pegar 5. Em resposta, B opta por 3, o que força A a selecionar 2 e, assim, B finaliza pegando 1.

Para uma forma geral com $N = 2k$ e $k \geq 2$, já que N é par, A deve inicialmente escolher um número ímpar que seja maior ou igual a k. Seja x_1 este número. Em resposta, B deverá pegar o menor número par que seja coprimo com x_1 e superior a $\frac{x_1}{2}$. Chamemos este número de x_2. Como x_2 é par, A novamente estará restrito a escolher um número ímpar. B, por sua vez, continuará a estratégia de selecionar o menor número par co-primo ao escolhido por A.

Este padrão persistirá até que B tenha a oportunidade de escolher 6. Sabemos que essa situação eventualmente ocorrerá pois os números estão decrescendo e há uma quantidade finita de escolhas. Uma vez que B escolhe 6, ele segue a estratégia delineada para $N = 6$, assegurando sua vitória.

Observação: A solução pode ser sensivelmente reduzida através do método de indução e da análise de posições vencedoras e perdedoras. De fato, pode-se mostrar que, para todo $N \geq 6$, N é posição vencedora se, e somente se, N é ímpar.

Soluções - 38ª - OBM 2016 - Nível 2 - 3ª Fase.

GABARITO PRIMEIRO DIA

1. **Solução de Caio Hermano Maia de Oliveira (Fortaleza-CE):**

Para calcularmos o valor da expressão em ambas situações vamos utilizar o fato que entre dois números consecutivos (com um sinal negativo entre eles) a única diferença é a permutação dos dois últimos algarismos, que possibilita a menor diferença possível (alterar as centenas, por exemplo, não seria a melhor opção se ainda podemos alterar apenas as dezenas e unidades, que possibilitam um menor acréscimo) requerida para a ordenação dos números. Defina S_n da mesma forma que S_4 e S_9 , sendo $n \leq 9$ inteiro positivo.

Analisando esse fato, veja que o valor total de S_n é justamente dado por essas diferenças, logo encontramos a resposta do problema ao contá-las. Vamos fixar os dígitos não permutados e analisar apenas os dois últimos dígitos: suponha que o menor seja a e o maior $a + j$. Então, ao trocarmos ambos de lugar, a única diferença entre os números será justamente a diferença resultante da permutação, pois o restante vai "se anular". Assim, basta calcularmos:

$$[10(a+j)+a]-[10a+(a+j)] = 10j - j = 9j$$

Se a diferença entre os dígitos permutados for j, então acrescentamos $9j$ ao valor total. Porém, veja que fixando os algarismos não permutados, a quantidade k de vezes que isso acontece é justamente $n-j$.De fato, as permutações dos dígitos cuja diferença é j são 1 e $j+1$, 2 e $j+2$, $\ldots$, k e $j+k$, mas n é o maior dígito possível, logo $j+k=n \Rightarrow k=n-j$, justamente o que queremos provar.

Por fim, basta "acrescentarmos"a quantidade de vezes que cada pequena diferença, resultante da permutação dos dois últimos dígitos, ocorre, que é $(n-2)!$. De fato, esse valor resulta da quantidade de maneiras existentes de permutar os $(n-2)$ primeiros dígitos, que durante nossos cálculos estavam fixos. Portanto:

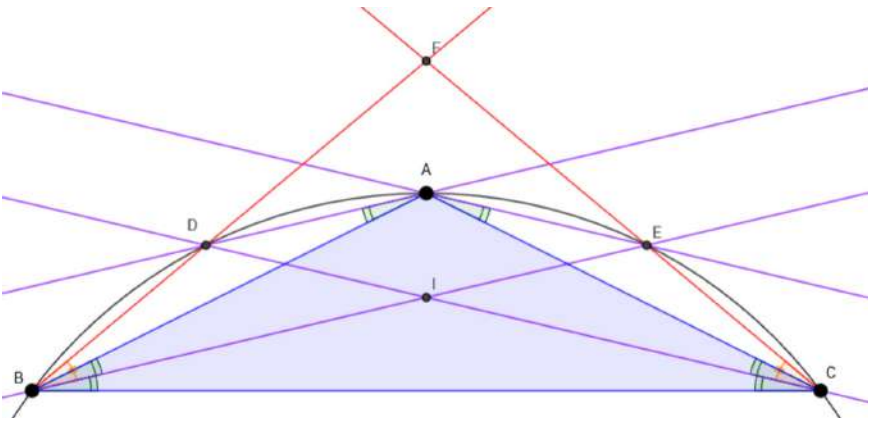
$$S_n = (n-2)! \cdot [(n-1)(9.1) + (n-2)(9.2) + \ldots + (n-(n-1))(9(n-1))].$$

Em particular, temos as respectivas respostas dos itens a) e b).

a)
$$S_4 = 2! \cdot [(4-1)(9.1) + (4-2)(9.2) + (4-3)(9.3)] = 2! \cdot 90 = 180.$$

b)
$$\begin{aligned} S_9 =& 7! \cdot [(9-1)(9.1) + (9-2)(9.2) + ... + (1)(9.8)] \\ =& 7! \cdot [72 + 126 + 162 + 180 + 180 + 162 + 126 + 72] \\ =& 7! \cdot 1080 = 5443200. \end{aligned}$$

2. **Solução de Caio Hermano Maia de Oliveira (Fortaleza-CE):**

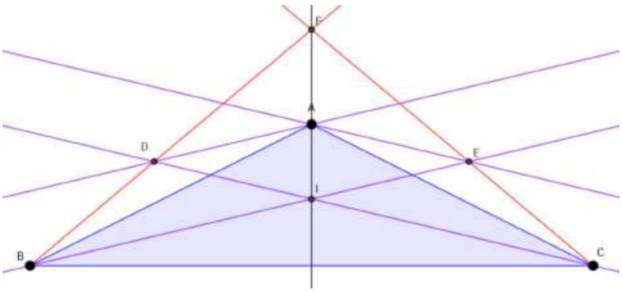


Se $AB = AC$, o triângulo ΔABC é isósceles de base BC. Por construção, BE e CD são as bissetrizes dos ângulos $\angle ABC$ e $\angle ACB$, respectivamente. Chame $\angle ABC = \angle ACB = 2\theta$. Como $AD \| BE$ e $\angle ABE = \theta$, segue que $\angle BAD = \theta$ (alternos internos), mas $\angle ACB = 2\theta$ e CD é bissetriz, assim $\angle BCD$ também é igual a θ e o quadrilátero $ADBC$ será inscritível ($\angle BAD = \angle BCD = 2\theta$). Da mesma forma, podemos afirmar que $\angle CAE = \angle CBE = \theta$, já que $AE \| CD$ e BE é bissetriz de $\angle ABC$, assim o quadrilátero $AECB$ também será inscritível e como três pontos formam uma circunferência única (neste caso a que passa pelos vértices A, B e C) temos que A, B, C, D e E são concíclicos. Por fim, pela última informação, $\angle DBE = \angle DCE$, mas $\angle EBC = \angle DCB = \theta$. Portanto,

$$\angle DBE = \angle DCE \Rightarrow \angle DBE + \angle EBC = \angle DCE + \angle DCB \Rightarrow$$
$$\angle DBC = \angle ECB \Rightarrow \angle FBC = \angle FCB.$$

Provamos que o triângulo ΔFBC é isósceles de base BC, donde F está na mediatriz de BC , que também é a bissetriz de do triângulo ΔABC, já que este triângulo também é isósceles. Portanto, F, A e I são colineares.

Agora resta mostrar que se F, A e I são colineares, então, $AB = AC$.



Observe o triângulo ΔFIC. Como $IC \| AE$, pelo Teorema de Tales,

$$\frac{FA}{AI} = \frac{FE}{EC}.$$

Agora observe o triângulo ΔFIB. Como $IB \| AD$, novamente pelo Teorema de Tales,

$$\frac{FA}{AI} = \frac{FD}{DB}.$$

Por fim, chame de N o ponto que AI corta BC. Utilizando o Teorema de Ceva no triângulo ΔFBC, temos

$$\frac{BN}{NC} \cdot \frac{EC}{FE} \cdot \frac{FD}{DB} = 1$$

Pelos resultados anteriormente encontrados:

$$\frac{BN}{NC}\cdot\frac{AI}{FA}\cdot\frac{FA}{AI}=1\Rightarrow\frac{BN}{NC}=1\Rightarrow BN=NC.$$

O ponto N será ponto médio de BC. Para finalizar o problema, basta aplicarmos o Teorema da Bissetriz Interna relativa ao lado BC:

$$\frac{AB}{AC}=\frac{BN}{NC}=1\Rightarrow AB=AC.$$

Como queríamos demonstrar!

3. **Solução de Caio Hermano Maia de Oliveira (Fortaleza-CE):**

Pelas Relações de Girard, obtemos que:

$$a=\frac{1}{r}+\frac{1}{s},\quad b=\frac{1}{r}\cdot\frac{1}{s},\quad r=a+b,\quad s=a\cdot b.$$

Portanto,

$$r=\frac{1}{r}+\frac{1}{s}+\frac{1}{rs}\Rightarrow r=\frac{r+s+1}{rs}\Rightarrow$$

$$r^2s=r+s+1\Rightarrow r^2s-r-(s+1)=0.$$

Calculando as raízes da equação,

$$r=\frac{1\pm\sqrt{1+4s(s+1)}}{2s}\Rightarrow r=\frac{1\pm\sqrt{4s^2+4s+1}}{2s}\Rightarrow$$

$$r=\frac{1\pm\sqrt{(2s+1)^2}}{2s}\Rightarrow r=\frac{1-2s-1}{2s}=-1\text{ ou }r=\frac{1+2s+1}{2s}=\frac{s+1}{s}.$$

Analisemos os dois casos:

- *1º caso:* $r=-1$. Temos:

$$a=-1+\frac{1}{s}>0\Rightarrow\frac{1}{s}>1>0.$$

Portanto, $\frac{1}{s}>0\Rightarrow s>0$, mas $s=a.b\Rightarrow b=\frac{s}{a}$. Como $a>0$ e $s>0$, segue que $b>0$. Como $a+b=r$, podemos escrever $b=\frac{1}{rs}\Rightarrow b=-\frac{1}{s}$. Diante do exposto, $b<0$, pois $s>0$, o que é um absurdo. Isso nos permite concluir que este caso não possui nenhuma solução.

- *2º caso:* $r = \dfrac{s+1}{s}$. Temos:

$$b = \frac{1}{r} \cdot \frac{1}{s} \Rightarrow b = \frac{s}{s+1} \cdot \frac{1}{s} \Rightarrow b = \frac{1}{s+1}.$$

Então,

$$s = a \cdot b \Rightarrow s = a \cdot \frac{1}{s+1} \Rightarrow s(s+1) = a.$$

Assim,

$$a = \frac{1}{r} + \frac{1}{s} \Rightarrow a = \frac{s}{s+1} + \frac{1}{s} \Rightarrow a = \frac{s^2+s+1}{s(s+1)} \Rightarrow a = \frac{s(s+1)+1}{s(s+1)}.$$

Por fim,

$$a = \frac{a+1}{a} \Rightarrow a^2 = a+1 \Rightarrow a^2 - a - 1 = 0$$

Esta equação muito conhecida nos dá como raízes:

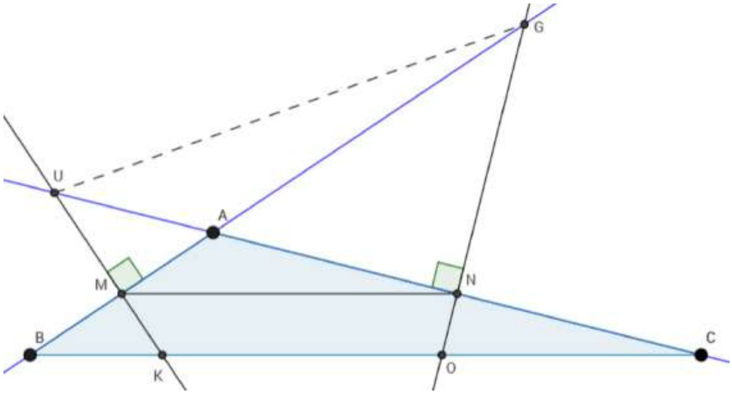
$$a = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Porém do enunciado $a > 0$. Logo, $a = \varphi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$, o número de ouro.

GABARITO SEGUNDO DIA

4. **Solução de Caio Hermano Maia de Oliveira (Fortaleza-CE):**

Chame de M o ponto médio de AB e N o ponto médio de AC . Por definição, MN é base média do triângulo ΔABC, e daí temos que $MN \| BC \Rightarrow MN \| OK$. Voltando ao problema, como MU é mediatriz de AB, segue que $\angle AMU$ é ângulo reto. Analogamente, como NG é mediatriz de AC, segue que $\angle ANG$ é ângulo reto. Pelo fato de que $\angle GMU = \angle GNU = 90°$, concluímos que o quadrilátero $GNMU$ é inscritível, como queríamos provar.



Para provarmos que o quadrilátero $GOKU$ é inscritível, basta mostramos que seus ângulos opostos somam 180^o, mas isso, de fato, acontece:

$$\angle UGO + \angle UKO = 180^o \Rightarrow \angle UGO + \angle UMN = 180^o$$

Veja que $\angle UKO = \angle UMN$, já que $MN||OK$. Como já tínhamos provado que o quadrilátero $GNMU$ é inscritível, então $\angle UGO + \angle UMN = 180^o$ e $GOKU$ também é inscritível.

5. **Solução de Caio Hermano Maia de Oliveira (Fortaleza-CE):**

Para resolvermos o problema vamos utilizar somente os restos dos números do conjunto na divisão por 3. Mostraremos que é possível determinar com base nesses resíduos a quantidade de permutações legais. No que segue, sempre trocaremos um número pelo seu resto por 3, ao qual chamaremos de dígito. Por exemplo, $(4, 6, 2, 5, 3, 1)$ será vista como 102201.

Agora, mostremos que se escolhermos dois dígitos iniciais, então os restantes estarão unicamente determinados. De fato, suponha que os dois primeiros dígitos da sequência sejam a e b, respectivamente. Então, o próximo dígito não pode ser $3 - b$ (que somado com b resulta num múltiplo de 3), nem a (que difere zero de a , ou seja, temos uma diferença divisível por 3). Como a e $3 - b$ são incongruentes módulo 3 (pois do contrário, a soma $a + b$ é múltiplo de 3, o que é um absurdo, uma vez que a e b são adjacentes), só existe uma possibilidade para o terceiro dígito. Como o segundo e o terceiro dígitos já foram escolhidos, então o quarto dígito fica unicamente determinado. Como o terceiro e o quarto dígitos já foram escolhidos, então o quinto dígito fica unicamente determinado. Continuando com esse raciocínio, concluímos que, escolhidos os dois primeiros dígitos, só existe uma forma fixa de termos uma permutação legal.

Como só estamos analisando os resíduos na divisão por 3 até agora, então existem seis formas de escolhermos os dois primeiros dígitos, uma vez que mão podemos escolhê-los somando um múltiplo de 3, o que elimina as escolhas 00, 12 e 21 como termos iniciais da permutação. Temos, assim, as seguintes possibilidades de sequências de 6 resíduos consecutivos (veja que há a mesma quantidade de restos de cada tipo):

$$011022, 110220, 102201, 022011, 220110, 201102.$$

Para determinar as permutações legais com base nos números do conjunto, basta analisarmos a permutação dos números com mesmo resíduo na divisão por 3. A nossa análise anterior garantiu por meio da marcação dos resíduos como determinar se uma permutação é legal. A partir disso, podemos determinar a quantidade total de permutações contando as possibilidades de trocarmos todos números com resíduo 1 de lugar, assim como os de resíduo 2 e 3. Supondo que a quantidade de números do conjunto seja $6k$, k inteiro positivo, a quantidade de permutações dentro das posições de um mesmo resíduo será $(2k)!$, logo determinada uma permutação legal com base nos resíduos há $(2k!)^3$ formas de preenchê-la com os números do conjunto.

Como há seis permutações legais possíveis dos resíduos, então um conjunto com $6k$ elementos tem um total de $6 \cdot (2k!)^3$ permutações legais. A partir disso, resolvemos os dois itens:

(a) $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ tem 6 elementos, logo o número de permutações legais é igual a $6 \cdot (2!)3 = 48$.

(b) $\{1, 2, 3, \ldots, 2016\}$ tem 2016 elementos, logo de permutações legais é igual a $6 \cdot (672!)^3$.

6. **Solução:**

Para resolvermos o problema, usaremos o seguinte lema, que é útil também em diversas outras situações.

Lema: Para quaisquer inteiros positivos a, b e x, com $x \geq 2$, é válido que $\text{mdc}(x^a - 1, x^b - 1) = x^{\text{mdc}(a,b)} - 1$. Em particular, se $a \mid b$, então é válido que $x^a - 1 \mid x^b - 1$.

Prova: Seja $d = \text{mdc}(a, b)$. Como $x^a \equiv (x^d)^{\frac{a}{d}} \equiv 1^{\frac{a}{d}} \equiv 1 \pmod{x^d - 1}$, concluímos que $x^d - 1 \mid x^a - 1$. Analogamente, $x^d - 1 \mid x^b - 1$, e assim $\text{mdc}(x^a - 1, x^b - 1) \geq x^{\text{mdc}(a,b)} - 1$, haja vista que $x^d - 1$ é um divisor comum de $x^a - 1$ e $x^b - 1$.

Por outro lado, sendo $\tilde{d} = \text{mdc}(x^a - 1, x^b - 1)$, temos $x^a \equiv x^b \equiv 1 \pmod{\tilde{d}}$. Pelo teorema de Bézout, existem inteiros u e v tais que $d = au + bv$, donde

$$x^d = x^{au+bv} = (x^a)^u (x^b)^v \equiv 1^u 1^v \equiv 1 \pmod{\tilde{d}}.$$

Com isso, $\tilde{d} \mid x^d - 1$, e assim $mdc(x^a - 1, x^b - 1) \leq x^{mdc(a,b)} - 1$. Combinando as duas desigualdades, o lema segue.

Voltando ao problema, suponha por absurdo que o conjunto dos divisores primos em questão seja finito. Sejam $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_k$ tais primos, onde p_k é o maior deles. Assim, existe um termo a_m da sequência tal que

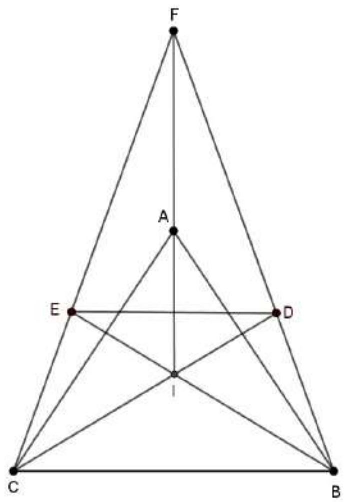
$$p_k \mid a_m \Rightarrow 2^{p_k} - 1 \mid 2^{a_m} - 1 = a_{m+1}.$$

Se q é um primo dividindo $2^{p_k} - 1$, então $ord_q(2) = p_k$, e consequentemente $p_k \mid \varphi(q) = q - 1 \Rightarrow q > p_k$, donde $q \mid a_{m+1}$, o que é um absurdo, visto que p_k é o maior divisor primo de algum termo da sequência. Portanto, o conjunto dos divisores primos dos termos da sequência a_n é infinito.

Soluções - 38ª - OBM 2016 - Nível 3 - 3ª Fase.

GABARITO PRIMEIRO DIA

1. **Solução de João Rafael Silva de Azeredo (Maceió-AL):**



Note que no ΔFIB, como $AD \| BI$, segue que $\frac{FD}{DB} = \frac{FA}{AI}$ e no ΔFIC, como $AE \| CI$, segue que $\frac{FE}{EC} = \frac{FA}{AI}$. Portanto,

$$\frac{FE}{EC} = \frac{FD}{DB} \Rightarrow DE \| BC.$$

Assim temos que $\angle DEB = \angle EBC = \angle EBA$. Por outro lado,

$$AD \| BE \Rightarrow \angle EBA = \angle DAB \Rightarrow \angle DEB = \angle DAB.$$

Temos, então, que o quadrilátero $ADBE$ é cíclico.

De forma análoga, $\angle EDC = \angle EAC$, o que revela que o quadrilátero $AECD$ é cíclico. Como o circuncirculo do ΔABC é único e os pontos A, B e C são comuns aos quadriláteros $ADBE$ e $AECD$, segue que $ABCDE$ é cíclico, o que nos permite concluir que $\angle DEB = \angle DCB$ e $\angle ADE = \angle ABE$. Por fim,

$$\angle ADE = \angle DEB \Rightarrow \angle ABE = \angle DCB \Rightarrow \frac{\angle ABC}{2} = \frac{\angle ACB}{2} \Rightarrow$$

$$\angle ABC = \angle ACB \Rightarrow AB = AC.$$

2. **Solução de Matheus Bezerra Luna (Bodocó-PE):**

Sabemos que a distância entre dois pontos (x_1, y_1) e (x_2, y_2) do plano é dada por $\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$. Sendo assim, para que esses dois pontos tenham o quadrado de sua distância um múltiplo de 2016, devemos ter $(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 \equiv 0 \pmod{2016}$. Enunciemos então um fato útil para nossa solução.

Lema: Seja p é um número primo da forma $4k + 3$. Então

$$p | a^2 + b^2 \Leftrightarrow p \mid a \text{ e } p \mid b.$$

Prova: Suponha, por absurdo, que $p \nmid a, b$. Se a ou b é múltiplo de p, então o outro terá que ser múltiplo de p também. Afinal, $a^2 + b^2 \equiv 0 \pmod{p}$. Portanto, podemos supor que ambos não são $0 \pmod{p}$ e agora, considerando a sequência de congruências no módulo p:

$$b^2 \equiv -a^2 \Rightarrow (b^2)^{\frac{p-1}{2}} \equiv (-a^2)^{\frac{p-1}{2}} \Rightarrow (b^{p-1}) \equiv (-1)^{\frac{p-1}{2}} \cdot (a^2)^{\frac{p-1}{2}}.$$

Lembrando que $\frac{p-1}{2}$ é ímpar, pois $p = 4k+3$, segue que $(-1)^{\frac{p-1}{2}} = -1$. Além disso, já que b não é múltiplo de p, pelo Pequeno Teorema de Fermat, $a^{p-1} \equiv b^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$. Logo:

$$1 \equiv (-1) \cdot 1 \equiv 1 \pmod{p}$$

Portanto, $p | 1 - (-1) = 2$, O que é um absurdo, uma vez que p é maior que 2. Portanto, segue o lema.

Como consequência, se $p = 4k + 3$ é um primo vale que

$$a^2 + b^2 \equiv 0 \ (\text{mod } p) \Leftrightarrow a^2 + b^2 \equiv 0 \ (\text{mod } p^2),$$

já que $p \mid a, b \implies p^2 \mid a^2, b^2 \implies p^2 \mid a^2 + b^2$. Perceba agora que a fatoração em primos é $2016 = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 7$. Logo, queremos encontrar quando dois pontos do plano satisfazem

$$(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 \equiv 0 \pmod{3^2,\ 7,\ 32}$$

Usando o resultado descrito acima, a congruência para o primeiro módulo 3^2 é satisfeita se, e somente se, $3 \mid (x_1 - x_2), (y_1 - y_2)$ e a congruência para o segundo módulo 7 é satisfeita se, e somente se, $7 \mid (x_1 - x_2), (y_1 - y_2)$. Agora, veremos quando tal congruência é satisfeita para o terceiro módulo 32.

Veja que se $a^2 + b^2 \equiv 0 \pmod{32}$, caso a seja ímpar, b também será e deveríamos ter $a^2 + b^2 \equiv 2 \pmod 4$ (já que todo quadrado de ímpar deixa resto 1 na divisão por 4). Porém, isso é um absurdo, pois estamos supondo que $a^2 + b^2 \equiv 0 \pmod 4$, implicando que $a^2 + b^2 \equiv 0 \pmod 4$. Concluímos então que ambos são pares, ou seja: $a = 2a'$ e $b = 2b'$, gerando $4(a')^2 + 4(b')^2 \equiv 0 \pmod{32} \Leftrightarrow (a')^2 + (b')^2 \equiv 0 \pmod 8$. Pelo mesmo argumento anterior temos $a' = 2a''$ e $b' = 2b''$, implicando agora em $(a'')^2 + (b'')^2 \equiv 0 \pmod 2$, o que nos diz que a'' e b'' possuem a mesma paridade. Se ambos são pares, então $a, b \equiv 0 \pmod 8$. Se forem ímpares, então $a, b \equiv 4 \pmod 8$. Como $a = (x_1 - x_2)$ e $b = (y_1 - y_2)$, temos que $8 \mid (x_1 - x_2), (y_1 - y_2)$ ou $8 \mid (x_1 - x_2) + 4, (y_1 - y_2) + 4$.

De posse desses resultados, pelo Teorema Chinês dos Restos, isso ocorre nos casos em que $(x_1 - x_2) \equiv (y_1 - y_2) \equiv 0 \pmod{168 = 3 \cdot 7 \cdot 8}$ ou $(x_1 - x_2) \equiv (y_1 - y_2) \equiv 3 \cdot 7 \cdot 4 = 84 \pmod{168}$. Portanto, a primeira condição nos permite pegar no máximo 168^2 pontos, com todas as possíveis combinações distintas de resíduos no módulo 168 para as abscissa e ordenada do ponto. Dentre esses, a segunda condição nos restringe a podermos pegar no máximo metade, visto que se tomarmos um ponto (x, y), não poderemos tomar os pontos $(x \pm 84, y \pm 84)$, que são equivalentes ao ponto único $(x + 84, y + 84)$ (com coordenadas módulo 168), já que $84 \equiv -84 \pmod{168}$. Portanto, conseguimos pegar no máximo metade de 168^2 pontos do plano tais que o quadrado da distância deles não seja múltiplo de 2016.

Aliás, agora mostra-se a importância de termos feitos todas as congruências em equivalências bilaterais, em vez de implicações. Tome o conjunto de pontos no plano: $S = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 83 \text{ e } 0 \leq y \leq 167\}$, e suponha que hajam pontos (a, b) e (c, d) cujo quadrado distância é múltiplo de 2016. Vimos que isso ocorre se e somente se: $a - c \equiv b - d \equiv 0 \pmod{168}$ ou $a - c \equiv b - d \equiv 84 \pmod{168}$. Note que a diferença entre quaisquer duas abscissas está entre -83 e 83. Logo, como $84 \mid a - c$ em ambos casos, $a = c$. Por outro lado, isso implica que estamos no caso em que $168 \mid b - d$ e isso nos dá que $b = d$. Logo, os pares são o mesmo par. Isso conclui que este exemplo com $84 \cdot 168$ pontos satisfaz não ter um par de pontos cujo quadrado da distância é 2016.

Concluímos então que o menor n tal que em quaisquer n pontos de coordenadas inteiras no plano, dois deles possuem quadrado da distância múltiplo de 2016 é, pelo Princípio das Casas dos Pombos,

$$\frac{168^2}{2} + 1 = 14113.$$

3. **Solução:**

Antes de começar a resolução do problema, provemos um lema útil.

Lema: Seja r um inteiro não negativo e sejam $b_0, b_1, \ldots, b_r \in \{0, 1\}$, não todos nulos. Então, é possível escolher um subconjunto não vazio S de $\{1, 2, \ldots, 2^r\}$ formado por elementos consecutivos, de modo que, para todo $i = 0, 1, \ldots, r$, temos $\#\{x \in S \mid \nu_2(x) = i\} \equiv b_i \pmod 2$.

Prova do Lema: Indução em r. Os casos base $r = 0$, $r = 1$ e $r = 2$ são imediatos. Suponha que o resultado vale para $r - 1$ e vejamos para $r \geq 3$.

Se $b_r = 0$, então o resultado segue por hipótese, pois basta escolher um subconjunto $S \subseteq \{1, 2, \ldots, 2^{r-1}\}$. Caso $b_r = 1$ e $b_{r-1} = 0$, por hipótese existe $S_0 \subseteq \{1, 2, \ldots, 2^{r-1}\}$ formado por elementos consecutivos, tal que $\#\{x \in S_0 \mid \nu_2(x) = i\} \equiv b_i \pmod 2$, para todo $i = 0, 1, \ldots, r-2$, e que $\#\{x \in S_0 \mid \nu_2(x) = r-1\} \equiv 1 \pmod 2$ (claramente $2^{r-1} \in S_0$). Agora, considere $S = \{x + 2^{r-1} \mid x \in S_0\}$ e note que S satisfaz o lema, pois $\nu_2(x+2^{r-1}) = \nu_2(x)$, se $\nu_2(x) \leq r-2$, e $\nu_2(x+2^{r-1}) = r$, se $x = 2^{r-1}$.

Finalmente, se $b_r = b_{r-1} = 1$, note que o conjunto $\{2^{r-1} + 1, \ldots, 2^r\}$ possui um número par de elementos x com $\nu_2(x) = i$, para todo $i = 0, 1, \ldots, r-3$, $r-1$, e possui um elemento x com $\nu_2(x) = i$, para $i = r-2, r$. Por hipótese, existe $S_0 \subseteq \{1, 2, \ldots, 2^{r-1}\}$ formado por elementos consecutivos, tal que $\#\{x \in S_0 \mid \nu_2(x) = i\} \equiv b_i \pmod 2$, para todo $i = 0, 1, \ldots, r-3, r-1$, e que $\#\{x \in S_0 \mid \nu_2(x) = r-1\} \equiv 1 - b_i \pmod 2$, para $i = r-2$. Portanto, o conjunto $S = S_0 \cup \{2^{r-1} + 1, \ldots, 2^r\}$ satisfaz o lema e o resultado segue.

De volta ao problema, sabemos que todo inteiro não negativo n possui uma única representação na base binária $n = \sum_{i=1}^{\infty} a_i \cdot 2^{i-1}$, com $a_i \in \{0, 1\}$ (note que existe i_0 tal que $a_i = 0$, para todo $i > i_0$). Dessa forma, para cada inteiro não negativo t, podemos definir o inteiro não negativo $s_t(n) = \sum_{\nu_2(i)=t} a_i$, isto é, a soma dos algarismos na base binária cuja posição é tal que 2^t é a maior potência de 2 que divide o número correspondente a ela. Note também que existe i_0 tal que $s_i(n) = 0$, para todo $i > i_0$.

Sendo $h = \lfloor \log_2 k \rfloor$, mostraremos que n é perdedor se, e somente se, as $h+1$ congruências a seguir são satisfeitas.

$$\begin{aligned}
s_0(n) &\equiv 0 \pmod 2 \;\; (0),\\
s_1(n) &\equiv 0 \pmod 2 \;\; (1),\\
&\vdots\\
s_{h-1}(n) &\equiv 0 \pmod 2 \;\; (h-1),\\
s_h(n) + s_{h+1}(n) + s_{h+2}(n) + \cdots &\equiv 0 \pmod 2 \;\; (h).
\end{aligned}$$

Se mostrarmos isso, o problema segue. De fato, se $N \geq k$, então há $2^{N-h-1} = 2^{N-\lfloor \log_2(\min\{k,N\}) \rfloor - 1}$ inteiros não negativos menores que 2^N satisfazendo (0), (1), $\dots$, $(h-1)$, (h). Isso se deve ao fato de que cada congruência dessas reduz pela metade a quantidade de tais inteiros, uma vez que todo n com N algarismos na base binária (ou menos) satisfazendo (i) pode ser associado a um $\tilde{n}$ com N algarismos na base binária (ou menos) não satisfazendo (i), ao trocar o algarismo a_{2^i} de n por $1-a_{2^i}$. Tal troca sempre pode ser feita, visto que $h \leq \lfloor \log_2 N \rfloor$. Por outro lado, se $N < k$, então há $2^{N-\lfloor \log_2 N \rfloor - 1} = 2^{N-\lfloor \log_2(\min\{k,N\}) \rfloor - 1}$ inteiros não negativos menores que 2^N satisfazendo (0), (1), $\dots$, $(h-1)$, (h), já que as congruências (i), com $i > \lfloor \log_2 N \rfloor$, vão ser obviamente satisfeitas, haja vista que todos os algarismos a_j, com $j > N$, de um número com N algarismos na base binária (ou menos) são todos iguais a 0. Daí, basta olhar as congruências de (0) a $(\lfloor \log_2 N \rfloor)$, sendo que cada uma delas reduz pela metade o número de inteiros não negativos que são perdedores.

A prova é por indução em n. O caso inicial $n = 0$ é verdadeiro, pois que não puder mais jogar, perde. Supondo que o resultado é verdade para todo inteiro não negativo menor que n, vejamos que o resultado vale também para n. Primeiro, mostremos que se as congruências (0), (1), $\dots$, (h) são satisfeitas, então n é perdedor. De fato, se alterarmos ℓ algarismos consecutivos de n, digamos $a_{i+1}, \dots, a_{i+\ell}$, então existe um único $j_0 \in \{1, \dots, \ell\}$ tal que $\nu_2(i+j_0) = t = \max_{1 \leq j \leq \ell}\{\nu_2(i+j)\}$. Além disso, se $t \geq h$, então como $\ell \leq k$, temos $\nu_2(i+j) < h$, para $j \neq j_0$. Assim, ao fazer tal alteração, o novo número m obtido é tal que $s_t(m) \equiv 1 \pmod 2$, se $t < h$, ou $s_h(m) + s_{h+1}(m) + s_{h+2}(m) + \cdots \equiv 1 \pmod 2$, se $t \geq h$. Portanto, m é vencedor por hipótese, donde n é perdedor.

Agora, mostremos que se ao menos uma das congruências (0), (1), ..., (h) não é satisfeita, então n é vencedor. Suponha que $b_0, b_1, \ldots, b_{h-1} \in \{0, 1\}$ são tais que $s_i(n) \equiv b_i \pmod 2$, para todo $i = 0, 1, \ldots, h-1$.

Se a congruência (h) é satisfeita, então um dentre $b_0, b_1, \ldots, b_{h-1}$ é igual a 1. Se $b_r = 1$ e r é máximo com essa propriedade, então existe um inteiro não negativo s tal que $a_{2^{r+1}s+2^r} = 1$. Pelo lema, existe um conjunto $S \subset \{1, 2, \ldots, 2^r\}$ de elementos consecutivos tal que, para todo $i = 0, 1, \ldots, r$, temos $\#\{x \in S \mid \nu_2(x) = i\} \equiv b_i \pmod 2$. Em particular, como $b_r = 1$, temos $2^r \in S$. Por fim, se alterarmos os algarismos $a_{2^{r+1}s+x}$, com $x \in S$, obtemos um número m tal que $m < n$ (pois $2^r \in S$ e $a_{2^{r+1}s+2^r} = 1$) e que todas as congruências de (0) a (h) são satisfeitas para m, ou seja, m é perdedor. Portanto, n é vencedor neste caso.

Se a congruência (h) não é satisfeita, defina $b_h = 1$ e note que existe um inteiro não negativo $r \geq h$ tal que $s_r(n) \equiv 1 \pmod 2$. Então, existe um inteiro não negativo s tal que $a_{2^h s+2^h} = 1$. Pelo lema, existe um conjunto $S \subset \{1, 2, \ldots, 2^h\}$ de elementos consecutivos tal que, para todo $i = 0, 1, \ldots, h$, temos $\#\{x \in S \mid \nu_2(x) = i\} \equiv b_i \pmod 2$. Em particular, como $b_h = 1$, temos $2^h \in S$. Por fim, se alterarmos os algarismos $a_{2^{r+1}s+x}$, com $x \in S$, obtemos um número m tal que $m < n$ (pois $2^h \in S$ e $a_{2^h s+2^h} = 1$) e que todas as congruências de (0) a (h) são satisfeitas para m, ou seja, m é perdedor. Portanto, n é vencedor também neste caso, e o resultado segue por indução.

GABARITO SEGUNDO DIA

4. **Solução de Matheus Bezerra Luna (Bodocó-PE):**

Em cada conjunto de 7 inteiros consecutivos conseguimos escolher no máximo dois deles. De fato, suponha por absurdo que consigamos tomar 3 inteiros e considere aquele que está entre os outros dois. A distância entre ele e cada um dos outros é pelo menos 3 , visto que, segundo o enunciado, não podemos selecionar dois números cuja distância seja 1 ou 2. Mas isso indica que os dois números das pontas devem ser o menor e o maior números dentre os 7 consecutivos, o que os faria ter distância 6 um do outro, uma contradição. Como há 288 grupos de 7 números consecutivos de 1 a 2016, têm-se que podemos escolher no máximo $2 \cdot 288 = 576$ números.

Um exemplo em que esse máximo acontece é obtido selecionando os 288 números que deixam resto 1 por 7, e os 288 números que deixam resto 4 na divisão por 7. A diferença entre quaisquer dois deles deixa restos $0, 3$ ou 4 na divisão por 7, assim tais diferenças não podem ser $1, 2$ ou 6. Assim, provamos que a resposta é 576.

5. **Solução de Caio Hermano Maia de Oliveira (Fortaleza-CE):**

(a) Queremos encontrar um real r para o qual $P_n(r) = \frac{P(P_{n-1}(r))}{2016}$ seja negativo para todos os inteiros positivos n. Em particular, desejamos que o valor do polinômio P, avaliado na variável $P_{n-1}(r)$, seja sempre relativamente pequeno (pois, senão, $P_n(r) = \frac{P(P_{n-1}(r))}{2016}$ seria positivo já que P é uma quadrática, que é sempre convexa).

Assim, faz sentido pensarmos no valor mínimo que o polinômio P pode assumir, ou seja, no seu vértice

$$V = \left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right) = \left(-\frac{12}{4}, -\frac{12^2 - 4 \cdot 4 \cdot (-3015)}{4 \cdot 4}\right) = \left(-\frac{3}{2}, -3024\right).$$

Veja que $P_1(-\frac{3}{2}) = \frac{P(-\frac{3}{2})}{2016} = -\frac{3024}{2016} = -\frac{3}{2}$. Assim,

$$P_k(-\frac{3}{2}) = -\frac{3}{2} \Rightarrow P_{k+1}(-\frac{3}{2}) = \frac{P(P_k(-\frac{3}{2}))}{2016} = \frac{P(-\frac{3}{2})}{2016} = -\frac{3024}{2016} = -\frac{3}{2}$$

Provando por indução que $P_n(-\frac{3}{2}) = -\frac{3}{2} < 0, \forall n \in \mathbb{Z}$. Logo, $-\frac{3}{2}$ é uma solução possível para o primeiro item deste problema.

(b) Defina $P_0(x) = x$. Analisando o polinômio $P(x)$, podemos observar que

$$\begin{aligned} \frac{P(x)}{2016} &= \frac{4x^2 + 12x - 3015}{2016} \\ &= \frac{(2x+3)^2 - 3024}{2016} \\ &= \frac{(2x+3)^2}{2016} - \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

Diante do exposto,

$$2 \cdot \frac{P(x)}{2016} + 3 = \frac{(2x+3)^2}{1008}.$$

Fazendo $x = P_k(x)$, temos que $2P_{k+1}(x) + 3 = \frac{(2P_k(x)+3)^2}{1008}$. Iterando essa equação diversas vezes, encontramos que:

$$\begin{aligned}
2P_n(x)+3 &= \frac{(2P_{n-1}(x)+3)^2}{1008} = \\
&= \frac{\left(\frac{(2P_{n-2}(x)+3)^2}{1008}\right)^2}{1008} = \frac{(2P_{n-2}(x)+3)^4}{1008^{1+2}} = \\
&= \frac{\left(\frac{(2P_{n-3}(x)+3)^2}{1008}\right)^4}{1008^{1+2}} = \frac{(2P_{n-3}(x)+3)^8}{1008^{1+2+4}} = \dots .
\end{aligned}$$

Daí, é fácil ver por indução que $2P_n(x)+3 = \frac{(2x+3)^{2^n}}{1008^{2^n-1}}$, donde

$$P_n(x) < 0 \Leftrightarrow 2P_n(x) = \frac{(2x+3)^{2^n}}{1008^{2^n-1}} - 3 < 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{(2x+3)^{2^n}}{1008^{2^n-1}} < 3 \Leftrightarrow \left(\frac{2x+3}{1008}\right)^{2^n} < \frac{3}{1008} = \frac{1}{336} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -\sqrt[2^n]{\frac{1}{336}} < \frac{2x+3}{1008} < \sqrt[2^n]{\frac{1}{336}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -1008 \cdot \sqrt[2^n]{\frac{1}{336}} < 2x+3 < 1008 \cdot \sqrt[2^n]{\frac{1}{336}} \quad (1)$$

Suponha que $m \in \mathbb{Z}$ é tal que $P_n(m) < 0$ para infinitos inteiros positivos n. Sabemos que, quando n cresce indeterminadamente, $\sqrt[2^n]{\frac{1}{336}}$ fica tão próximo de 1 quanto queiramos (esse conceito é formalmente conhecido por limite: $\lim_{n\to\infty} \sqrt[2^n]{\frac{1}{336}} = 1$). Como $x = m$ satisfaz (1) para infinitos inteiros positivos n e $1008 \cdot \sqrt[2^n]{\frac{1}{336}}$ fica tão próximo de 1008 quanto queiramos, devemos ter

$$-1008 < 2m+3 < 1008 \Leftrightarrow -505,5 < m < 502,5 \Leftrightarrow -505 \le m \le 502.$$

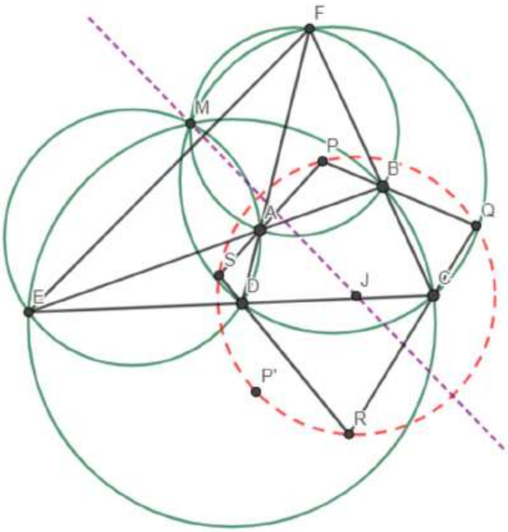
É fácil ver que todos os inteiros nesse intervalo satisfazem o enunciado. De fato, pela definição de limite, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $n \in \mathbb{Z}$, com $n > N$, temos que $\sqrt[2^n]{\frac{1}{336}} > \frac{1007}{1008}$, o que implica

$$1008 \cdot \sqrt[2^n]{\frac{1}{336}} > 1007 \ge 2m+3 \ge -1007 > -1008 \sqrt[2^n]{\frac{1}{336}}.$$

Portanto, existem $502+505+1 = 1008$ inteiros satisfazendo o segundo item do problema.

6. **Solução de Caio Hermano Maia de Oliveira (Fortaleza-CE):**

Seja F a interseção de AD e BC e P, Q, R, S as respectivas interseções das bissetrizes externas de $\angle A, \angle B$; $\angle B, \angle C$; $\angle C, \angle D$ e $\angle D, \angle A$. Provemos que J está na bissetriz do ângulo $\angle BMD$.



De fato, note primeiro que M é o ponto de Miquel do quadrilátero $ABCD$, já que $M \neq E$ é a interseção de (ADE) e (BCE). Isso implica que M também está em (FAB) e (FCD), e também que M é o centro da roto-homotetia que leva BC em AD, e da roto-homotetia que leva AB em DC. Assim, façamos uma inversão de centro M de raio $MB.MD$ seguida por uma reflexão pela bissetriz do ângulo $\angle BMD$ (Essa transformação também é conhecida com extraversão). Veja que nessa extraversão, $B \leftrightarrow D$ e $A \leftrightarrow C$, pois da roto-homotetia sabemos que

$$\frac{MB}{MC} = \frac{MA}{MD} \implies MA \cdot MC = MB \cdot MD \text{ e } \angle BMC = \angle AMD.$$

Isso implica que as bissetrizes de $\angle BMD$ e $\angle AMC$ são as mesmas, além de que $E \leftrightarrow F$, porque $(MAD) \leftrightarrow BC$ e $(MBC) \leftrightarrow AD$, donde

$$E = (MAD) \cap (MBC) \leftrightarrow F = BC \cap AD.$$

Sejam P', Q', R', S' as respectivas imagens de P, Q, R, S na extraversão e seja J' o centro de $(P'Q'R'S')$. Se provarmos que P' está na circunferência circunscrita de

$PQRS$, conseguiremos provar o resultado, pois poderemos analogamente provar que Q', R', S' estão na circunferência $(PQRS)$. Porém, a reta MJ vai para a reta MJ' , que tem que ser isogonal à reta MJ, e nesse caso obteríamos $J = J' \Rightarrow J$ está na bissetriz de $\angle BMD$, tendo em conta que a reta foi refletida e se manteve a mesma.

Veja que P' está na circunferência (CRD), pois

$$\begin{aligned}
\angle DP'C &= \angle MP'C - \angle MP'D \\
&\overset{(*)}{=} \angle MAP - \angle MBP \\
&= (\angle MAF + \angle FAP) - (\angle MBF - \angle PBF) \\
&= \angle FAP + \angle PBF + \underbrace{(\angle MAF - \angle MBF)}_{=0} \\
&= \frac{1}{2}(\angle FAB + \angle FBA) = 90^\circ - \frac{\angle AFB}{2} \\
&= 90^\circ - \frac{\angle CFD}{2} = \angle CRD.
\end{aligned}$$

Vejamos também que $P \in (ESD)$, pois

$$\begin{aligned}
\angle DP'E &= \angle MP'D + \angle MP'E \\
&\overset{(*)}{=} \angle MBP + \angle MFP \\
&= (\angle PBA - \angle MBA) + (\angle MFA + \angle PFA) \\
&= \angle PFA + \angle PBA + \underbrace{(\angle MFA - \angle MBA)}_{=0} \\
&= \frac{1}{2}(\angle BFA + \angle FBA) = 90^\circ - \frac{\angle FAB}{2} \\
&= 90^\circ - \frac{\angle DAE}{2} = 180^\circ - \angle DSE.
\end{aligned}$$

Assim, P' tem que ser o ponto de Miquel do quadrilátero $SDCQ$ (a reta SQ passa por E, já que S e Q estão na bissetriz de $\angle AED$). Assim, finalmente, $P' \in (SRQ) = (PQRS)$, provando assim nossa afirmação. Portanto, J está na bissetriz de $\angle BMD$ e, analogamente, I também estará, donde M, J e I são colineares, como queríamos demonstrar!

Observação: $(*)$ se deve à igualdade $\angle MX'Y' = \angle MYX$ em inversões.

38^a OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA - 2016

Problemas da 1^a fase - Nível Universitário - 38^a - OBM 2016.

1. Encontre, com justificativa, todas as funções $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e constantes reais a, b, c tais que
$$f(ax + b) + c \leq x \leq f(x + c) + b$$
para todo $x \in \mathbb{R}$.

2. Seja $\alpha \geq 1$ um número real. No plano cartesiano, onde convencionamos que a distância unitária é igual a 1 metro, considere os pontos $A = (1, 0), B = (1, 1)$ e a reta $\ell = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x = 0\}$. Sonic, o porco-espinho, está no ponto A e quer correr até o ponto B tocando na parede ℓ . Antes de tocar na parede, Sonic tem velocidade de 1 metro por segundo e após tocar na parede ele ganha um impulso e passa a ter velocidade de α metros por segundo. Sonic quer minimizar o tempo gasto em seu trajeto.

   (i) Prove que há exatamente um ponto $(0, y(\alpha)) \in \ell$ no qual Sonic deve tocar a parede para realizar seu trajeto no tempo mínimo.

   (ii) Encontre o valor de α para o qual $y(\alpha) = \frac{1}{4}$.

   (iii) Determine o valor de $\theta \in \mathbb{R}$ para o qual o limite
   $$\lim_{\alpha \to \infty} \alpha^{\theta} \cdot y(\alpha)$$
   existe e é não nulo. Calcule o valor do limite neste caso.

3. Encontre todas as matrizes 2×2 com entradas reais A tais que:
$$A^3 - 3A + 2I = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix},$$
onde I denota a matriz identidade 2×2.

4. Seja $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ uma sequência de números reais não-negativos tal que
$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x_n^2 = 1.$$

   (i) Encontre o máximo valor de
   $$S = \sum_{n=1}^{\infty} x_n^2 + 2\left(\sum_{n=1}^{\infty} x_n\right)^2.$$

(ii) Determine todas as sequências $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ para as quais este máximo é atingido.

5. Seja $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ dada por $A(x, y, z) = (x + y + z, x + y)$. Prove que existe um único $s \geq 0$ tal que o limite

$$c = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{vol\{v \in \mathbb{R}^3; |v| \leq 1 \text{ e } |Av| < \epsilon\}}{\epsilon^s}$$

existe e é positivo, e determine s e c.

6. No plano cartesiano, seja S o conjunto das circunferências com centros de coordenadas racionais e com raios de comprimentos racionais. Mostre que existe um polígono regular de 2016 lados, cujos vértices não pertencem a S.

Problemas e soluções da Primeira fase - Nível universitário

Soluções - 38ª - OBM 2016 - Nível U - 1ª Fase.

1. **Solução:** Se $a = 0$, teríamos $f(b) + c \le x$ para todo $x \in \mathbb{R}$, o que é um absurdo. Assim, $a \ne 0$. Fazendo $y = ax + b$ na primeira desigualdade do enunciado, obtemos $f(y) + c \le \frac{y-b}{a}$, que equivale a $f(y) \le \frac{y-b}{a} - c$, para todo $y \in \mathbb{R}$. Por outro lado, fazendo $y = x + c$ na segunda desigualdade do enunciado, obtemos $f(y) \ge y - (b + c)$, para todo $y \in \mathbb{R}$. Portanto, para todo $y \in \mathbb{R}$ temos

$$\frac{y-b}{a} - c \ge f(y) \ge y - (b + c). \qquad (1)$$

Isso implica que

$$\frac{y-b}{a} - c \ge y - (b + c)$$

e daí $(y - b)(\frac{1}{a} - 1) \ge 0$, pra todo $y \in \mathbb{R}$. Então a única possibilidade é que $\frac{1}{a} - 1 = 0$, de modo que $a = 1$. Por fim segue de (1) que $f(y) = y - (b + c)$ para todo $y \in \mathbb{R}$.

2. **Solução:** Se Sonic toca a parede no ponto $(0, y)$, o tempo gasto em seu percurso é:

$$f(y) = \sqrt{1 + y^2} + \frac{1}{\alpha}\sqrt{1 + (1 - y)^2}.$$

Devemos minimizar esta função sobre $y \in \mathbb{R}$. Sua derivada é:

$$f'(y) = \frac{\alpha y\sqrt{2 - 2y + y^2} + \sqrt{1 + y^2}(-1 + y)}{\alpha\sqrt{1 + y^2}\sqrt{2 - 2y + y^2}}.$$

Claramante, se $y \le 0$ temos $f'(y) < 0$ e se $y > 1$ temos $f'(y) > 0$.

(i) Devemos mostrar que há exatamente um ponto $0 < y < 1$ tal que $f'(y) = 0$. Isso implica resolver

$$\alpha^2 y^2(2 - 2y + y^2) = (1 + y^2)(1 - y)^2,$$

que é equivalente a

$$(\alpha^2 - 1)(2y^2 - 2y^3 + y^4) = 1 - 2y. \qquad (2)$$

Note que a função $h(y) = 2y^2 - 2y^3 + y^4$ é crescente em $(0, 1)$ pois $h'(y) = 2y(2-3y+2y^2) > 0$ em $(0, 1)$. Como $1-2y$ é decrescente em $(0, 1)$ concluímos que há apenas um valor de $y \in (0, 1)$ que verifica (2). Isso prova (i).

(ii) De (1) podemos tirar o valor de α quando $y = \frac{1}{4}$. Temos:

$$\alpha^2 - 1 = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{2}{16} - \frac{2}{64} + \frac{1}{256}} = \frac{128}{25}$$

e portanto

$$\alpha = \frac{3\sqrt{17}}{5}.$$

(iii) Ainda de (2) vemos que quando $\alpha \to \infty$ devemos ter $y(\alpha) \to 0$ e

$$\lim_{\alpha\to\infty} \alpha^2 \cdot 2y(\alpha)^2 = 1$$

Portanto $\theta = 1$ e

$$\lim_{\alpha\to\infty} \alpha \cdot y(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

3. **Solução:** Seja $B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. O polinômio minimal de B (usando por exemplo o Teorema de Cayley-Hamilton) é $P(x) = x^2 - 4x$. Como $A^3 - 3A + 2I = B$, temos

$$(A^3 - 3A + 2I)^2 - 4(A^3 - 3A + 2I) = B^2 - 4B = 0,$$

e segue que

$$(A^3 - 3A + 2I)(A^3 - 3A - 2I) = 0.$$

O polinômio minimal de A deve portanto dividir

$$Q(x) = (x^3 - 3x + 2)(x^3 - 3x - 2) = (x-1)^2(x+2)(x+1)^2(x-2).$$

Seja $R(x)$ o polinômio minimal de A. Temos então que analisar as diversas possibilidades para $R(x)$, que pelo Teorema de Cayley-Hamilton tem grau no máximo 2. Vejamos primeiro os casos sem soluções.

Caso A. $R(x)$ tem grau 1. Nesse caso, A seria um múltiplo da identidade e portanto $A^3 - 3A + 2I$ também seria um múltiplo da identidade, o que impossibilita ser igual a B.

Caso B. $R(x) = (x-1)^2$ ou $R(x) = (x-1)(x+2)$. Nesse caso, $R(x) \mid x^3 - 3x + 2$ e teríamos $A^3 - 3A + 2I = 0 \neq B$.

Caso C. $R(x) = (x+1)^2$ ou $R(x) = (x+1)(x-2)$. Nesse caso, $R(x) \mid x^3 - 3x + 2$ e teríamos $A^3 - 3A + 2I = 0$, o que implica que $A^3 - 3A + 2I = 4I \neq B$. Logo não há soluções neste caso também.

Os demais casos produzem soluções válidas:

Caso 1. $R(x) = (x-1)(x+1)$. Nesse caso $A^2 = I \Rightarrow A^3 = A \Rightarrow A^3 - 3A + 2I = -2A + 2I$, e portanto

$$A = -\frac{1}{2}B + I = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

Caso 2. $R(x) = (x-1)(x-2)$. Nesse caso $A^2 = 3A - 2I \Rightarrow A^3 = 3A^2 - 2A = 7A - 6I$, e portanto $A^3 - 3A + 2I = 4A - 4I$. Daí temos:

$$A = \frac{1}{4}B + I = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 1 \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}.$$

Caso 3. $R(x) = (x+2)(x+1)$. Nesse caso $A^2 = -3A - 2I \Rightarrow A^3 = -3A^2 - 2A = 7A + 6I$, e portanto $A^3 - 3A + 2I = 4A + 8I$. Daí temos:

$$A = \frac{1}{4}B - 2I = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} & 1 \\ \frac{1}{4} & -\frac{3}{2} \end{pmatrix}.$$

Caso 4. $R(x) = (x+2)(x-2)$. Nesse caso $A^2 = 4I \Rightarrow A^3 = 4A$, e portanto $A^3 - 3A + 2I = A + 2I$. Daí temos:

$$A = B - 2I = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Conclusão: Há 4 soluções:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 1 \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} & 1 \\ \frac{1}{4} & -\frac{3}{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

4. **Solução:** Sejam $A = (\sum_{n=1}^{\infty} x_n)^2$ e $B = \sum_{n=1}^{\infty} x_n^2$. Queremos maximizar $A + 2B$.

   (i) Do fato que $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x_n^2 = 1$ temos:

$$(4 - B) = \sum_{n=1}^{\infty} (4n^2 - 1)x_n^2, \tag{3}$$

   Observe que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2 - 1} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right) = \frac{1}{2}, \tag{4}$$

   e usando a desigualdade de Cauchy-Schwarz, temos

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} (4n^2 - 1)x_n^2 \right) \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(4n^2 - 1)} \right) \geq \left(\sum_{n=1}^{\infty} x_n \right)^2 = A.$$

Portanto,

$$\sum_{n=1}^{\infty}(4n^2-1)x_n^2 \geq 2A. \tag{5}$$

De (4) e (5) segue que

$$4 \geq 2A + B.$$

A igualdade na desigualdade de Cauchy-Schwarz ocorre quando $x_n = \frac{c}{4n^2-1}$ para uma constante $c > 0$. O máximo valor de $S = 2A + B$ é, portanto, 4.

(ii) Calculemos o valor da constante c. Devemos ter

$$\begin{aligned}
4 = &\sum_{n=1}^{\infty} 4n^2 x_n^2 \\
=&c^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n^2}{(4n^2-1)^2} \\
=&\frac{c^2}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{(2n+1)^2} + \frac{1}{(2n-1)^2} + \frac{2}{(2n+1)(2n-1)}\right) \\
=&\frac{c^2}{4}\left(\left(\frac{\pi^2}{8} - 1\right) + \frac{\pi^2}{8} + 1\right) \\
=&\frac{\pi^2 c^2}{16},
\end{aligned}$$

onde usamos (4) e o fato que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$, fato esse que pode ser deduzido a partir de $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$. Segue, portanto, que $c^2 = \frac{64}{\pi^2}$ e a única sequência que verifica a igualdade é

$$x_n = \frac{8}{\pi} \frac{1}{(4n^2-1)}.$$

5. **Solução:** Observe que A tem posto 2.
Seja R uma rotação de $\mathbb{R}^3$ tal que a imagem por R do eixo z é o núcleo de A. Trocando A por $\bar{A} := A \circ R$, o limite em questão não muda, pois temos $\mathrm{vol}\left(\{v \in \mathbb{R}^3; |v| \leq 1 \text{ e } |\bar{A}v| < \epsilon\}\right)$. Além disso, $\bar{A}(x, y, z) = B(x, y)$ para uma certa transformação linear $B : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$.

Temos $|\bar{A}(x, y, z)| < \epsilon \Leftrightarrow |B(x, y)| < \epsilon$ e o volume do conjunto

$$\{v \in \mathbb{R}^3; |v| \leq 1 \text{ e } |\bar{A}v| < \epsilon\}$$

é assintoticamente $2(|\det B|)^{-1} \cdot \pi\epsilon^2$.

Para calcular $|\det B|$ note que $(\det B)^2 = \det(B \circ B^t)$ e $B \circ B^t = \bar{A} \circ \bar{A}^t = (A\circ R)\circ(A\circ R)^t = A\circ R\circ R^t\circ A^t = A\circ A\circ A^t$. Como $A\circ A^t(x,y) = (3x+2y, 2x+2y)$, cujo determinante é 2, temos $|\det B| = \sqrt{2}$. Portanto $s = 2$ e $c = \pi\sqrt{2}$.

6. Seja $\alpha \in \mathbb{R}$ e, para $1 \le k \le 2016$, seja A_k o ponto do plano cartesiano cujas coordenadas são as partes real e imaginária de $(\alpha+i\alpha^2)\omega^{k-1}$, onde $\omega = \cos\frac{2\pi}{2016} + i \operatorname{sen}\frac{2\pi}{2016}$. É sabido que $A_1A_2\dots A_{2016}$ é um polígono regular de 2016 lados, e basta mostrarmos que é possível escolher α de modo que $A_k \notin S$, para todo k.

Seja Γ uma das circunferências de S, com centro $O = (a, b)$ e raio r, de sorte que $a, b, r \in \mathbb{Q}$. Fazendo $\cos\frac{2(k-1)\pi}{2016} = c$ e $\operatorname{sen}\frac{2(k-1)\pi}{2016} = s$, temos

$$(\alpha + \alpha^2 i)(c + si) = (c\alpha - s\alpha^2) + (s\alpha + c\alpha^2)i.$$

Então, $A_k \in \Gamma \Leftrightarrow \overline{A_kO} = r$ ou, o que é o mesmo, se, e só se,

$$\big((c\alpha - s\alpha^2) - a\big)^2 + \big((s\alpha + c\alpha^2) - b\big)^2 - r^2 = 0.$$

Essa última igualdade, por sua vez, equivale a

$$\alpha^4 + (1 - 2bc + 2as)\alpha^2 + (2ac - 2bs)\alpha + (a^2 + b^2 - r) = 0,$$

de modo que α deveria ser algébrico sobre $\mathbb{Q}(c, s)$. Mas, como c e s são algébricos sobre $\mathbb{Q}$, concluímos que α deveria ser algébrico sobre $\mathbb{Q}$. Logo, escolhendo $\alpha \in \mathbb{R}$ transcendente ($\alpha = \pi$, por exemplo), concluímos que $A_k \notin S$, para todo k.

Solução alternativa. Sendo de medida nula uma união enumerável de conjuntos de medida nula, o conjunto S tem medida de Lebesgue nula em $\mathbb{R}^2$. Seja χ_S a função característica de S (i.e. $\chi_S(x) = 1$ se $x \in S$ e $\chi_S(x) = 0$ se $x \notin S$). Daí,

$$0 = \int_{\mathbb{R}^2} \chi_s(x)dx.$$

Suponha que a conclusão do enunciado não seja verdadeira. Chegaremos a uma contradição. Seja $\alpha = \frac{2\pi}{2016}$. Usando coordenadas polares e o teorema de Fubini (jé que todas as funções envolvidas são não-negativas).

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^2} \chi_s(x)dx =& \int_0^\infty \left(\int_0^{2\pi} \chi_S(r\theta)d\theta \right) rdr \\
=& \int_0^\infty \left(\sum_{j=0}^{2015} \int_{[j\alpha,(j+1)\alpha]} \chi_S(r\theta)d\theta \right) rdr \\
=& \int_0^\infty \left(\sum_{j=0}^{2015} \int_{[0,\alpha]} \chi_S(r(\theta + j\alpha))d\theta \right) rdr \\
=& \int_0^\infty \left(\int_{[0,\alpha]} \sum_{j=0}^{2015} \chi_S(r(\theta + j\alpha))d\theta \right) rdr \\
\geq& \int_0^\infty \left(\int_{[0,\alpha]} 1d\theta \right) rdr \\
=& \int_0^\infty \alpha rdr \\
=& \infty,
\end{aligned}$$

uma contradição. Acima utilizamos o fato de que $\sum_{j=0}^{2015} \chi_S(r(\theta + j\alpha)) \geq 1$ pois os pontos $r(\theta + j\alpha), j = 0, 1, \ldots, 2015$ são vértices de um polígono regular de 2016 lados, e estamos assumindo que pelo menos um deles está em S.

38^a OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA - 2016

Problemas - Nível Universitário 2^a fase - PRIMEIRO DIA

1. Seja $(a_n)_{n\geq 1}$ uma sucessão de números reais tal que $\sum_{n\geq 1} \frac{a_n}{n}$ converge. Prove que
$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k = 0.$$

2. Encontre todas as funções $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tais que
$$f(x^2 + y^2 f(x)) = xf(y)^2 - f(x)^2$$
para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$.

3. Seja $k \geq 1$ um inteiro. Definimos a sequência $(a_n)_{n\geq 0}$ por $a_0 = 0, a_1 = 1$ e
$$a_{n+1} = ka_n + a_{n-1}$$
para $n = 1, 2, \ldots$ Seja p um número primo ímpar. Denote por $m(p)$ o menor inteiro positivo i tal que $p \mid a_i$. Denote por $T(p)$ o menor inteiro positivo tal que para qualquer natural j temos $p \mid a_{j+T(p)} - a_j$.

   (i) Mostre que $T(p) \leq m(p)(p-1)$.

   (ii) Se $T(p) = m(p)(p-1)$, mostre que
$$\prod_{\substack{1\leq j\leq T(p)-1 \\ j\not\equiv 0 \pmod{m(p)}}} a_j \equiv (-1)^{m(p)-1} (\mathrm{mod}\ p).$$

Problemas - Nível Universitário 2^a fase - SEGUNDO DIA

4. Seja
$$A = \begin{pmatrix} 4 & -\sqrt{5} \\ 2\sqrt{5} & -3 \end{pmatrix}.$$
Encontre todos os pares de números $(n.m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z}$ com $|m| \leq n$ tais que a matriz
$$A^n - (n^2 + m)A$$
tenha todas as entradas inteiras.

5. Uma bola de futebol é usualmente obtida a partir de uma figura poliédrica que possui faces de dois tipos, hexágonos e pentágonos, e em cada vértice incidem três faces, sendo dois hexágonos e um pentágono. Diremos que um poliedro é futebolístico, se é semelhante à bola de futebol no seguinte sentido: possui as faces sendo m-ágonos ou n-ágonos (com $m \neq n$) e em cada vértice incidem três faces, sendo dois m-ágonos e um n-ágono.

   (i) Prove que m deve ser par.

   (ii) Encontre todos os poliedros futebolísticos convexos.

6. Sejam $C, D > 0$. Dizemos que uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é bonita se f é de classe $\mathcal{C}^2, |x^3 f(x)| \leq C$ e $|xf''(x)| \leq D$ para todo x com $|x| \geq 1$.

   (i) Prove que se f é uma função bonita então, dado $\epsilon > 0$, existe $x_0 > 0$ tal que, para $|x| \geq x_0, |x^2 f'(x)| < \sqrt{2CD} + \epsilon$.

   (ii) Se $0 < E < \sqrt{2CD}$, prove que existe uma função bonita $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que, para todo $x_0 > 0$, existe $x > x_0$ com $|x^2 f'(x)| > E$.

Problemas e soluções da Primeira fase - Nível universitário

Soluções - 38ª - OBM 2016 - Nível U - 2ª Fase.

GABARITO PRIMEIRO DIA.

1. Defina $s_0 = 0$ e para $n \geq 1$, $s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{k}$. Então,

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} a_k &= \sum_{k=1}^{n} k(s_k - s_{k-1}) \\ &= \sum_{k=1}^{n} ks_k - \sum_{k=1}^{n} ks_{k-1} \\ &= \sum_{k=1}^{n} ks_k - \sum_{k=0}^{n-1} (k+1)s_k \\ &= ns_n - \sum_{k=1}^{n-1} s_k.\end{aligned}$$

Assim,

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k = s_n - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} s_k = \frac{1}{n}s_n - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}(s_k - s_n).$$

Como estamos assumindo que s_n converge para um limite, digamos s, segue que (s_n) é limitada, e portanto $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}s_n = 0$. Além disso, dado $\varepsilon > 0$, existe um inteiro positivo n_0 tal que, para $m \geq n_0$, $|s_m - s| < \varepsilon/4$. Assim, se $n > k \geq n_0$, $|s_k - s_n| \leq |s_k - s| + |s - s_n| < \varepsilon/4 + \varepsilon/4 = \varepsilon/2$. Se $|s_m| \leq M, \forall m \in \mathbb{N}$, temos $|\sum_{k=1}^{n_0-1}(s_k - s_n)| \leq 2M(n_0 - 1)$, e portanto, para $n > \max\{n_0, 4Mn_0/\varepsilon\}$, temos

$$\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}(s_k - s_n)\right| \leq \frac{2M(n_0-1)}{n} + \frac{1}{n}\sum_{k=n_0}^{n-1}|s_k - s_n| < \frac{2M(n_0-1)}{n} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

Portanto,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k = 0.$$

2. Substituindo $(0,0)$ na equação original, temos $f(0) = -f(0)^2$, donde $f(0) = 0$ ou $f(0) = -1$. Se $f(0) = -1$, então substituindo $(0, y)$ na equação original, vem $f(-y^2) = -1$, o que implica $f(x) = -1$, para todo $x \leq 0$. Porém, ao substituir

$(-1,-2)$ na equação original, obtemos $f(-3) = -2$, uma contradição. Portanto, $f(0) = 0$.

Claramente $f(x) = 0$ é a única solução constante de $f(x^2 + y^2 f(x)) = xf(y)^2 - f(x)^2$. Determinemos agora as soluções não constantes.

Para $y = 0$, tem-se que $f(x^2) = -f(x)^2$. Tomando $-x$ no lugar de x, segue que $f(x^2) = -f(-x)^2$. Então, $f(x)^2 = f(-x)^2$, para todo x real. Se $f(x) = f(-x)$, para algum $x \neq 0$, substituindo (x, y) e $(-x, y)$ na equação original e comparando, teríamos $xf(y)^2 = -xf(y)^2$, resultando novamente em $f(y) = 0$ para todo y. Logo, $f(x) = -f(-x)$, para todo x real.

Pondo $x = 1$ em $f(x^2) = -f(x)^2$, segue que $f(1) = 0$ ou $f(1) = -1$. Se $f(1) = 0$, tomando $x = 1$ na equação original, segue que $f(y) = 0$ para todo y real. Como já encontramos a solução constante, temos agora $f(1) = -1$ e $f(-1) = 1$.

Tomando $x = -1$, segue que $f(1 + y^2) = -f(y)^2 - 1 = f(y^2) - 1$. Tomando $x = 1$, segue que $f(1 - y^2) = f(y)^2 - 1 = -f(y^2) - 1 = f(-y^2) - 1$. Logo, como y^2 e $-y^2$ variam sobre todos os números reais, segue que $f(x + 1) = f(x) - 1$, para todo x real. Uma indução simples nos permite mostrar que $f(x + n) = f(x) - n$, para todo x real e todo n inteiro.

Pondo $x = 1$ em $f(x + 1) = f(x) - 1$ temos $f(2) = -2$ e $f(-2) = 2$. Pondo $x = -2$, segue que

$$f(4 + 2y^2) = -2f(y)^2 - 4 = 2f(y^2) - 4 \Longrightarrow f(2y^2) = 2f(y^2).$$

Mostremos agora que $f(x) = 0$ se, e só se, $x = 0$. Se $x_0 \in \mathbb{R}$ é tal que $f(x_0) = 0$, então substituindo $(x_0, 1)$ na equação original, vem $f(x_0)^2 = x_0$. Como $f(x_0^2) = -f(x_0)^2 = 0$, temos $x_0 = 0$, provando a afirmação. Por fim, pondo $-x$ no lugar de x na equação original e adicionando o resultado com ela mesma, segue que

$$f(x^2 + y^2 f(x)) + f(x^2 - y^2 f(x)) = -2f(x)^2 = 2f(x^2) = f(2x^2).$$

Sendo $u = x^2 + y^2 f(x)$ e $v = x^2 - y^2 f(x)$, temos $u + v = 2x^2$. Caso $x \neq 0$, como os termos $y^2 f(x)$ e $-y^2 f(x)$ variam sobre todos os reais, segue que $f(u) + f(v) = f(u+v)$, para todos os u, v reais cuja soma é positiva. Devido ao fato de f ser ímpar, tal relação também é válida para u, v reais cuja soma é 0 ou negativa. Assim, f satisfaz a equação funcional de Cauchy: $f(u) + f(v) = f(u+v)$, para todos os u, v reais.

Agora, dado $u > 0$, temos $f(u) = f(\sqrt{u}^2) = -f(\sqrt{u})^2 < 0$, e assim $f(u + v) = f(u) + f(v) < f(v)$, para todo v real. Isso significa que f é estritamente decrescente, e como f satisfaz a funcional de Cauchy, concluímos que $f(x) = cx$, para alguma constante $c \neq 0$. Checando na equação original, é fácil ver que $f(x) = -x$ é a única solução não constante.

3. Observe que a_n, módulo p, é uma sequência periódica a partir de certo ponto. De fato, pelo princípio das casas dos pombos, existem 2 dentre os $p^2 + 1$ pares $(a_0, a_1), (a_1, a_2) \ldots, (a_{p^2}, a_{p^2+1})$ que são iguais módulo p, digamos (a_i, a_{i+1}) e (a_j, a_{j+1}), com $i < j$. Como $a_{n+1} = ka_n + a_{n-1}$, segue que

$$a_{i+2} = ka_{i+1} + a_i \equiv ka_{j+1} + a_j = a_{j+2} \pmod p,$$

$$a_{i+3} = ka_{i+2} + a_{i+1} \equiv ka_{j+2} + a_{j+1} = a_{j+3} \pmod p,$$

e seguindo assim, temos indutivamente que $a_{i+n} \equiv a_{j+n} \pmod p$, para todo $n \geq 0$ inteiro. Como $a_{n-1} = -ka_n + a_{n+1}$, segue de modo análogo que $a_{i-n} \equiv a_{j-n} \pmod p$, para todo $n \geq 0$ inteiro. Portanto, a sequência é periódica (com os índices podendo ser negativos!), ou seja, $T(p)$ e $m(p)$ de fato estão bem definidos. Além disso, não temos dois valores consecutivos da sequência iguais a $0 \pmod p$, pois caso contrário, toda a sequência pode ser reconstruída, módulo p, como $0, 0, 0, \ldots$, uma contradição com o fato de que $a_1 = 1$.

Agora, para cada inteiro não negativo t, defina

$$A_t = \{a_{t \cdot m(p)}, a_{t \cdot m(p)+1}, \ldots, a_{(t+1) \cdot m(p)-1}\}.$$

Da recursão e por uma indução direta, segue que $A_{t+1} = a_{t \cdot m(p)+1} \cdot A_0 \pmod p$ e que $a_{t \cdot m(p)} \equiv 0 \pmod p$ (aqui, $a \cdot A = ax \mid x \in A$). Além disso, pela minimalidade de $m(p)$, temos que $a_{t \cdot m(p)}$ é o único elemento de A_k que é zero, módulo p. Também vale a pena notar como consequência direta do que foi exposto aqui que $m(p) \mid T(p)$.

(i) Consideramos os termos $a_1, a_{m(p)+1}, \ldots, a_{T(p)-m(p)+1}$ módulo p, todos os quais devem ser distintos e nenhum deles pode ser zero, uma vez que $a_0 \equiv a_{m(p)} \equiv a_{T(p)-m(p)} \equiv 0 \pmod p$. Como existem apenas $p - 1$ resíduos distintos diferentes de zero, concluímos que $T(p) \leq (p-1) \cdot m(p)$.

(ii) Para cada inteiro não negativo t, defina

$$\alpha_t = \prod_{\substack{a_i \in A_t \\ a_i \neq 0}} a_i.$$

Nosso objetivo é calcular $\alpha_0 \alpha_1 \cdots \alpha_{m(p)}$. Como $A_{t+1} = a_{t \cdot m(p)+1} \cdot A_0 \pmod p$ e, pela condição de igualdade, $a_1, a_{m(p)+1}, \ldots, a_{T(p)-m(p)+1}$ são todos os $(p-1)$ restos não nulos módulo p, segue que

$$\begin{aligned}\alpha_0\alpha_1\cdots\alpha_{m(p)} &\equiv (\alpha_0 \cdot a_1^{m(p)-1})(\alpha_0 \cdot a_{m(p)+1}^{m(p)-1})\ldots(\alpha_0 \cdot a_{T(p)-m(p)+1}^{m(p)-1})\\ &\equiv \alpha_0^{p-1}\cdot(a_1 a_{m(p)+1}\ldots a_{T(p)-m(p)+1})^{m(p)-1}\\ &\equiv \alpha_0^{p-1}\cdot((p-1)!)^{m(p)-1}\\ &\equiv (-1)^{m(p)-1} \pmod p,\end{aligned}$$

onde na última passagem usamos os teoremas de Fermat e Wilson.

GABARITO SEGUNDO DIA

4. O polinômio característico de A é

$$\begin{aligned}p_A(x) &= \det(xI - A)\\ &= x^2 - \mathrm{tr}(A)x + \det(A)\\ &= x^2 - x - 2\end{aligned}$$

Os autovalores de A são as raízes do polinômio $p_A(x)$, ou seja 2 e -1. Os autovetores associados são

$$\lambda_1 = -1 \mapsto v_1 = (1, \sqrt{5})$$

$$\lambda_1 = 2 \mapsto v_2 = (\sqrt{5}, 2)$$

o que nos permite construir a matriz de mudança de base $P = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{5} \\ \sqrt{5} & 2 \end{pmatrix}$, cuja inversa é $P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{-2}{3} & \frac{\sqrt{5}}{3} \\ \frac{\sqrt{5}}{3} & \frac{-1}{3} \end{pmatrix}$. Diante do exposto,

$$A = P \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot P^{-1} \Rightarrow A^n = P \cdot \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix} \cdot P^{-1}.$$

Portanto,

$$A^n = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} (-1)^{n+1}.2 + 5 \times 2^n & -(2^n - (-1)^n)\sqrt{5} \\ 2.(2^n - (-1)^n)\sqrt{5} & 5(-1)^n - 2^{n+1} \end{pmatrix},$$

o que nos permite escrever

$$A^n - (m + n^2)A =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{(-1)^{n+1}.2+5.2^n}{3} - 4(m+n^2) & \left(\frac{(-1)^n}{3} - \frac{2^n}{3} + (m+n^2)\right)\sqrt{5} \\ \left(\frac{(-1)^{n+1}.2}{3} + \frac{2^{n+1}}{3} - 2(m+n^2)\right)\sqrt{5} & \frac{(-1)^n.5-2^{n+1}}{3} + 3(m+n^2) \end{pmatrix}.$$

Como $\sqrt{5}$ é irracional, para que as entradas da segunda linha e primeira coluna (e também dá primeira linha e segunda coluna), devemos ter

$$m = \frac{2^n - (-1)^n}{3} - n^2.$$

Se $n \geq 8$, então $2^n > 3(n^2 + n)$ (isso pode ser provado por uma indução simples), ou seja, $m > n$. Assim, basta analisar os casos em que $n \leq 7$ e verificar quando $|m| \leq n$.

n	m	É solução?
0	0	Sim
1	0	Sim
2	-3	Não
3	-6	Não
4	-11	Não
5	-14	Não
6	-15	Não
7	-6	Sim

Finalmente, note que $(-1)^{n+1}.2 + 5.2^n \equiv (-1)^n.5 - 2^{n+1} \equiv 0 \pmod 3$, o que implica que todos os valores obtidos são de fato soluções. Portanto, $(m, n) = (0, 0), (1, 0), (7, -6)$ são todas as soluções.

5. Neste problema, denote por V, F e A os respectivos números de vértices, arestas e faces do poliedro convexo em questão. Denote ainda por F_m e F_n o número de m—ágonos e n—ágonos, respectivamente.

   A primeira parte do problema não requer o uso da fórmula de Euler, nem mesmo de outras fórmulas envolvendo contagens duplas entre vértices, arestas e faces. Basta observar que os m—ágonos e n—ágonos alternam em torno de qualquer m—ágono, o que implica imediatamente que m é par (caso contrário, haveria uma figura de vértice que não tinha a forma dada, uma vez que teríamos três m-ágonos intersectando-se num mesmo vértice).

   Já para a segunda parte do problema, vamos usar várias equações envolvendo os elementos definidos antes. Como cada aresta está em exatamente duas faces, cada uma das F_m faces m-gonais possui m arestas e cada uma das F_n faces n-gonais possui n arestas, ao fazer tal contagem dupla nas arestas, vem $2A = mF_m + nF_n$. Ademais, temos $2A = 3V$, uma vez que cada vértice possui 3 arestas incidentes e cada aresta possui 2 vértices. Finalmente, da relação de Euler e de $F = F_m + F_n$, obtemos

$$\begin{aligned} 12 &= 6(V - A + F) \\ &= 2(3V) - 6A + 6F \\ &= -2A + 6F \\ &= -(mF_m + nF_n) + 6(F_m + F_n) \\ &= (6-m)F_m + (6-n)F_n. \end{aligned}$$

Por outro lado, se A' é o número de arestas conectando um n-ágono com um m-ágono, temos que $nF_n = A'$ (cada aresta de um n-ágono conecta-o a um m-ágono) e $\frac{m}{2}F_m = A'$ (metade das arestas de cada m-ágono conecta-o a um n-ágono). Portanto, $\frac{F_m}{F_n} = \frac{2n}{m}$ e substituindo na igualdade obtida acima, vem

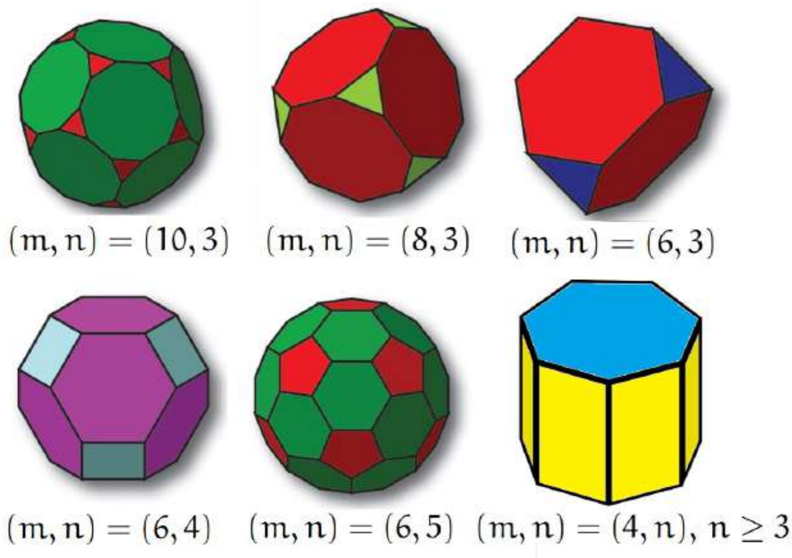
$$12 = (6-m)F_m + (6-n)F_n = \left(\frac{2n(6-m) + m(6-n)}{m}\right) F_n$$

$$\therefore F_n = \frac{12m}{2n(6-m) + m(6-n)} = \frac{4m}{8-(m-4)(n-2)}.$$

Caso $m \geq 12$, temos $(m-4)(n-2) \geq 8.1 = 8$, donde $F_n \leq 0$, o que é uma contradição. Resta então analisar os casos $m = 10$, 8, 6 e 4.

- Se $m = 10$, então $F_n = \frac{40}{8-6(n-2)}$ é inteiro positivo, o que implica $n = 3$ (para $n \geq 4$, temos $F_n < 0$). Portanto, $(m, n) = (10, 3)$, que corresponde a um dodecaedro truncado.
- Se $m = 8$, então $F_n = \frac{32}{8-4(n-2)} = \frac{8}{4-n}$ é inteiro positivo, o que implica $n = 3$. Portanto, $(m, n) = (8, 3)$, que corresponde a um cubo truncado.
- Se $m = 6$, então $F_n = \frac{24}{8-2(n-2)} = \frac{12}{6-n}$ é um inteiro positivo, o que implica $n = 3$, 4 ou 5. Portanto, $(m, n) = (6, 3)$, que corresponde a um tetraedro truncado, ou $(m, n) = (6, 4)$, que corresponde a um octaedro truncado, ou $(m, n) = (6, 5)$, que corresponde a um icosaedro truncado (que é a bola de futebol usual).
- Se $m = 4$, então $F_n = 2$, ou seja, todo $(m, n) = (4, n)$, para $n \geq 3$, é solução, que corresponde a um prisma de base sendo um n-ágono.

As figuras a seguir ilustram os poliedros obtidos, mostrando que cada par obtido é possível de ser realizado geometricamente, encerrando assim o problema.



6. i) Para a primeira parte, a ideia é comparar $|f'(x)|$ com $|f(x)|$ por meio do teorema do valor médio e também comparar $|f'(x)|$ com $|f''(x)|$ por meio de integração. A fim de realizar tais comparações, tome $x_0 > 1$ suficientemente grande de modo que, para cada $x > x_0$, tomando $h = \sqrt{\frac{2C}{D} \cdot \frac{1}{x}}$ teremos $x - h > 1$. A importância de tais condições técnicas ficará evidente ao longo da solução, mas por ora a ideia é ver como f, f' e f'' variam ao longo do intervalo $[x-h, x+h]$. A análise do caso $x < -1$ é análoga, bastando considerar $f(-x)$ (note que, se f é bonita, então $g(x) = f(-x)$ também é bonita), de modo que focaremos apenas no caso $x > 0$ aqui.

   Considerando x e h como acima, existem duas possibilidades, a saber: $f(x)$ tem o mesmo sinal de um dentre $f(x-h), f(x+h)$ (Caso 1), ou $f(x)$ tem sinal diferente de ambos $f(x-h), f(x+h)$ (Caso 2).

   Caso 1: Como $|f(x)| \leq C/x^3$ e $x \in [x-h, x+h]$, dessa forma podemos concluir que $|f(x+h) - f(x)| \leq C/x^3 + o(x^{-3})$ (caso $f(x)$ tenha o mesmo sinal de $f(x+h)$) ou $|f(x-h) - f(x)| \leq C/x^3 + o(x^{-3})$ (caso $f(x)$ tenha o mesmo sinal de $f(x-h)$). Suponhamos que a segunda hipótese seja válida (a análise da primeira hipótese é análoga). Pelo teorema do valor médio, existe $\xi \in (x-h, x)$ tal que $f'(\xi) = \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$. Daí,

$$|f'(\xi)| \leq \frac{C}{x^3 h} + o(x^{-3})/h.$$

Além disso, temos

$$f'(x) = f'(\xi) + \int_{\xi}^{x} f''(t)\,dt.$$

Já que $f'(\xi)$ é o valor médio de $f'(t)$ no intervalo $[x, x+h]$, podemos concluir que

$$\left|\int_{\xi}^{x} f''(t)\,dt\right| = \frac{1}{2}\left|\int_{x}^{x+h} f''(t)\,dt\right| \leq \frac{1}{2}\int_{x}^{x+h} |f''(t)|\,dt \leq \frac{Dh}{2x} + o(1/x)\cdot h.$$

Portanto,

$$|f'(x)| \leq |f'(\xi)| + \left|\int_{\xi}^{x} f''(t)\,dt\right| \leq \frac{C}{x^3 h} + \frac{Dh}{2x} + o(x^{-3})/h + o(1/x)\cdot h.$$

Para minimizar o valor de $\frac{C}{x^3h} + \frac{Dh}{2x}$, devemos escolher $h = \frac{\beta}{x}$, onde $\beta > 0$ é tal que $C/\beta = D\beta/2$, ou seja, $\beta = \sqrt{2C/D}$ (isso vem da condição de igualdade da desigualdade $MA \geq MG$). Nesse caso, obtemos que

$$|f'(x)| \leq \sqrt{2CD}/x^2 + o(x^{-2}) < (\sqrt{2CD} + \varepsilon)/x^2$$

vale para $x > x_0$, onde x_0 é suficientemente grande de modo que $o(x^{-2}) < \varepsilon/x^2$. O resultado segue neste caso.

Caso 2: Neste caso existe $\xi \in (x-h, x+h)$ com $f'(\xi) = 0$. Suponha sem perda de generalidade que $\xi \in (x, x+h)$. Analogamente ao caso anterior, obtemos

$$|f'(x)| \leq |f'(\xi)| + \left|\int_{\xi}^{x} f''(t)\,dt\right| \leq \frac{Dh}{x}.$$

Como $h = \sqrt{2C/D}\cdot\frac{1}{x}$, obtemos $|f'(x)| \leq \sqrt{2CD}/x^2$, concluindo assim este caso.

ii) Para construir uma função bonita f que atenda aos requisitos da segunda parte, a ideia é construir uma função cuja derivada segunda seja constante e positiva ao longo de intervalos $[x, x+h]$ (isso deve-se ao fato de que estamos buscando algo próximo das condições de igualdade vistas antes). No entanto, como queremos $f''(x) < Dx^{-1}$, devemos fazê-lo de maneira local, ou seja, em alguns intervalos do tipo $[x, x+h]$ teremos f'' constante e de valor absoluto cada vez menor, e fora desses intervalos, f'' vai se anular rapidamente.

Dados $\alpha > 0$ e $h \in (0, \frac{1}{9})$, defina $\tilde{f}_{\alpha,h} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ como

$$\tilde{f}_{\alpha,h}(x) = \begin{cases} 0\,; & x \in (-\infty, -4h] \\ \frac{\alpha(x+4h)^2}{4}\,; & x \in [-4h, -3h] \\ \frac{\alpha h^2}{2} - \frac{\alpha(x+2h)^2}{4}\,; & x \in [-3h, -2h] \\ \frac{\alpha h^2}{2} - \frac{\alpha(x+2h)^2}{2}\,; & x \in [-2h, -h] \\ -\frac{\alpha h^2}{2} + \frac{\alpha x^2}{2}\,; & x \in [-h, h] \\ \frac{\alpha h^2}{2} - \frac{\alpha(x-2h)^2}{2}\,; & x \in [h, 2h] \\ \frac{\alpha h^2}{2} - \frac{\alpha(x-2h)^2}{4}\,; & x \in [2h, 3h] \\ \frac{\alpha(x-4h)^2}{4}\,; & x \in [3h, 4h] \\ 0\,; & x \in [4h, +\infty] \end{cases} \quad ; \quad \max|\tilde{f}_{\alpha,h}(x)| = \frac{\alpha h^2}{2}.$$

Um cálculo direto mostra que

$$\tilde{f}'_{\alpha,h}(x) = \begin{cases} 0\,; & x \in (\infty, -4h] \\ \frac{\alpha(x+4h)}{2}\,; & x \in [-4h, -3h] \\ -\frac{\alpha(x+2h)}{2}\,; & x \in [-3h, -2h] \\ -\alpha(x+2h)\,; & x \in [-2h, -h] \\ \alpha x\,; & x \in [-h, h] \\ -\alpha(x-2h)\,; & x \in [h, 2h] \\ -\frac{\alpha(x-2h)}{2}\,; & x \in [2h, 3h] \\ \frac{\alpha(x-4h)}{2}\,; & x \in [3h, 4h] \\ 0\,; & x \in [4h, +\infty] \end{cases} \quad ; \quad \max|\tilde{f}'_{\alpha,h}(x)| = \alpha h,$$

$$\tilde{f}''_{\alpha,h}(x) = \begin{cases} 0\,; & |x| > 4h \\ \frac{\alpha}{2}\,; & 3h < |x| < 4h \\ -\frac{\alpha}{2}\,; & 2h < |x| < 3h \\ -\alpha\,; & h < |x| < 2h \\ \alpha\,; & |x| < h \end{cases} \quad ; \quad \max|\tilde{f}''_{\alpha,h}(x)| = \alpha.$$

Infelizmente, $\tilde{f}_{\alpha,h}$ não é de classe C^2, mas podemos aproximá-la por uma função $f_{\alpha,h}$ de classe C^2 fazendo $f_{\alpha,h}(1) = f'_{\alpha,h}(1) = 0$ e

$$f''_{\alpha,h}(x) = \begin{cases} 0\,; & |x| \geq 4h + h^{2016} \\ \frac{\alpha}{2}\,; & 3h + h^{2016} \leq |x| \leq 4h - h^{2016} \\ -\frac{\alpha}{2}\,; & 2h + h^{2016}/3 \leq |x| \leq 3h - h^{2016} \\ -\alpha\,; & h + h^{2016} \leq |x| \leq 2h - h^{2016}/3 \\ \alpha\,; & |x| \leq h - h^{2016} \end{cases}.$$

Nos demais intervalos (de comprimento $2h^{2016}$ ou $2h^{2016}/3$), $f''_{\alpha,h}$ é definida como sendo afim por partes de modo que $f''_{\alpha,h}$ seja contínua, e assim teremos $f_{\alpha,h}$ de classe C^2. Ademais, caso $h = \beta/n$, temos que $\max|f''_{\alpha,h}(x)| = \alpha$ e que

$$\max|f'_{\alpha,h}(x)| = \alpha h + O(n^{-2016})\,;\ \max|f_{\alpha,h}(x)| = \frac{\alpha h^2}{2} + O(n^{-2016}).$$

Note ainda que

$$\int_{-(4h+h^{2016})}^{4h+h^{2016}} f''_{\alpha,h}(x)dx = \int_{-(4h+h^{2016})}^{0} f''_{\alpha,h}(x)dx = 0,$$

e portanto $f'_{\alpha,h}(1) = f'_{\alpha,h}(0) = 0$ e, como $f''_{\alpha,h}$ é uma função par, $f'_{\alpha,h}$ é uma função ímpar. Portanto $f_{\alpha,h}$ é uma função par, e em particular $f_{\alpha,h}(1) = f_{\alpha,h}(1/2) = f_{\alpha,h}(-1/2) = f_{\alpha,h}(-1) = 0$.

Finalmente, seja $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{\sqrt{2C/D}}{n_0} < \frac{1}{9}$, $\alpha(n) = \frac{D}{n+1}$, $h(n) = \frac{\sqrt{2C/D}}{n+1}$. Vamos construir f colocando as funções "salto"$f_{\alpha(n),h(n)}$, pois elas satisfazem localmente o que queremos. De modo mais preciso, defina $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ como

$$f(x) = \begin{cases} 0\,; & x \le n_0 + \frac{1}{2} \\ f_{\alpha(n),h(n)}(x-n)\,; & n - \frac{1}{2} \le x \le n + \frac{1}{2} \quad (n > n_0)\,. \\ f(-x)\,; & x < 0 \end{cases}$$

Por construção, f é de classe C^2. Note que, para cada $n > n_0$ e cada $x \in (n - \frac{1}{2}, n + \frac{1}{2})$, temos

$$|f(x)| \le \frac{\alpha(n)h(n)^2}{2} + O(n^{-2016}) = C(n+1)^{-3} + O(n^{-2016}) < C \cdot x^{-3},$$

$$|f''(x)| \le \alpha(n) = D(n+1)^{-1} < D \cdot x^{-1},$$

mostrando que f é de fato uma função bonita. Ademais, para cada $n > n_0$, existe $x \in (n - \frac{1}{2}, n + \frac{1}{2})$ tal que

$$|f'(x)| = \alpha(n)h(n) + O(n^{-2016}) = \sqrt{2CD} \cdot (n+1)^{-2} + O(n^{-2016}) > E \cdot x^{-2}$$

para todo n suficientemente grande, visto que $E < \sqrt{2CD}$. Isso mostra que f satisfaz o pedido para todo $0 < E < \sqrt{2CD}$, encerrando assim o problema.

Premiados - 38^a - OBM 2016

Medalha de Ouro - Nível 1

Nome	Cidade - Estado	Pontos
Rodrigo Salgado Domingos Porto	Rio de Janeiro RJ	294
Gustavo Neves da Cruz	Belo Horizonte MG	292
Marcelo Machado Lage	Belo Horizonte MG	275
Marlon Fagundes Pereira Junior	Rio de Janeiro RJ	273
Afonso Yu	Curitiba PR	251
Rui Andrade Carvalho Nunes	Goiânia GO	251

Medalha de Prata - Nível 1

Nome	Cidade - Estado	Pontos
Luis Augusto de Oliveira	Fortaleza CE	250
Lucio Cardoso Dias Figueiredo Filho	São Raimundo Nonato PI	249
Luis Felipe de Almeida Marques	Fortaleza CE	245
Antonio Eduardo Rossano	Santa Fe do Sul SP	242
Luckas Hiroki Kawahara	Cuiaba MT	240
Breno Valente Manhães	Rio de Janeiro RJ	238
Vitor Augusto Franck	Cascavel PR	237
Bernardo Henkel Estivalet	Porto Alegre RS	235
Davi Carvalho Mota	Fortaleza CE	234
João Pedro Ramos Viana Costa	Fortaleza CE	231
Giovanni Carrilho Malta	Recife PE	231

Medalha de Bronze - Nível 1

Nome	Cidade - Estado	Pontos
Marcelo Torres Ramos de Andrade	Rio de Janeiro RJ	227
Tiago Ribeiro Paiva	Fortaleza CE	225
Ramyro Corrêa Aquines	Porto Alegre RS	225
João Guilherme Ferreira	Recife PE	223

Nome	Cidade - Estado	Pontos
Marcelo Torres Ramos de Andrade	Rio de Janeiro RJ	227
Tiago Ribeiro Paiva	Fortaleza CE	225
Ramyro Corrêa Aquines	Porto Alegre RS	225
João Guilherme Ferreira	Recife PE	223
Mariah Figueiredo Braga	Belo Horizonte MG	222
Diogo Back Sartoretto	Chapecó SC	221
Eric Viana Kievel	Curitiba PR	221
Davi Gabriel Bandeira Coutinho	Recife PE	220
Pedro Henrique Mendes Sawntzy	Manaus AM	220
Yuri Barros Mendes	Fortaleza CE	219
Pedro Henrique Andrade Guimarães	Salvador BA	217
Davi Moura Micoski	S.J. dos Campos SP	217
Níkolas Fernandes de Moraes	Porto Alegre RS	215
Caue Fornielles da Costa	Curitiba PR	215
Naomi Kubatamaia	São Paulo SP	214
Francyélio de Jesus Campos Lima	Teresina PI	213
João Pedro Guimarães Guilherme	Campinas SP	213

Menção Honrosa - Nível 1

Nome	Cidade - Estado	Pontos
Bruno Rezende dos Santos	Belo Horizonte MG	212
Eric Tetsuolo Ebmann Hishinuma	Fortaleza CE	211
Leonardo de Andrade Paes	Porto Alegre RS	210
Guilherme Azeredo Malacarne	Vitória ES	209
Felipe Reis Maccari	Porto Alegre RS	208
Victor Manuel Fernández Pérez	Santa Maria RS	208
Yvens Ian Prado Porto	Fortaleza CE	208
Luca Twardowski Prá Scherer	Porto Alegre RS	206
Maria Luisa Cardoso Elias	Valinhos SP	206
Henrique Brunoro Krohling	Marechal Floriano ES	205
Yan Raimundo Nascimento Furtado	Rio de Janeiro RJ	203
Luiz Felipe Salgado Silva	Londrina PR	201
Giovani Servergnini Vargas	Porto Alegre RS	201
Nícolas Goulart de Moura	São Paulo SP	200
Raissa Alves Donato	Fortaleza CE	200
Henrique Alberto Padilha Mendes	Curitiba PR	199

Nome	Cidade - Estado	Pontos
João Pedro Fernandes	Araraquara SP	199
Carolina Franck Abdu	Rio de Janeiro RJ	198
Pedro Henrique Simão Achete	Rio de Janeiro RJ	198
Gustavo Mallmann	Porto Alegre RS	197
Ygor Falcão Gomes Mendes	Recife PE	197
Francisco Gabriel de Lima Brasil	Recife PE	195
Natalia Bigolin Groff	Frederico Westphalen RS	194
Lara Dantas de Oliveira Moises	Fortaleza CE	193
Luis Eduardo Masasuke Mashima	Cuiaba MT	193
Gabriel Nobiaki Nojima	Recife PE	193
Marcos Miguel Freire Azevedo	Rio de Janeiro RJ	190
Fernando Yang	São Paulo SP	190
Lucas Rafael Braga Nascimento	Manaus AM	189
Diego Teixeira Ribeiro	Ipatinga MG	188
Camille Simões Castro	Rio de Janeiro RJ	187
Levi Ferreira Santos Neto	Salvador BA	187
João Pedro Sena da Silva	Salvador BA	187
Martina Neivas Fortes	Teresina PI	186
Soa Canan Chas Montana	Curitiba PR	186
Beatriz Alves Figueiredo Lima	Recife PE	186
Sophia Chin Momanus	São Paulo SP	185
Felipe Heusi Kossmann	Florianópolis SC	184
Felipe Leite Toledo	Londrina PR	183
Pedro Miguel Pereira Gonzaga Vianna	Rio de Janeiro RJ	182
Caio Hermano Maia de Oliveira	Fortaleza CE	181
Tiago Mamede Diógenes	Fortaleza CE	181
Glauco César Prado Soares	Brasília DF	181
Walter de Crasto Monteiro	Recife PE	181

Medalha de Ouro - Nível 2

Nome	Cidade - Estado	Pontos
Bernardo Peruzzo Trevizan	Canoas RS	352
Enzo Pontes Saraiva e Moraes	Fortaleza CE	291
Gabriel Ribeiro Paiva	Fortaleza CE	282
Antonio Luis Alves Azevedo	Rio de Janeiro RJ	267
Luciano Rodrigues de Oliveira Junior	Fortaleza CE	258
Jamile Falcão Rebouças	Fortaleza CE	255

Medalha de Prata - Nível 2

Nome	Cidade - Estado	Pontos
Ana Beatriz Cavalcante P. Castro Studart	Fortaleza CE	254
Andre Diogo Firmino dos Santos	Fortaleza CE	252
Pedro Gomes Cabral	Recife PE	235
Luiza Clara de Albuquerque Pacheco	Fortaleza CE	224
Vinicius Jose Menezes Pereira	Recife PE	223
Eduardo Quirino de Oliveira	Brasília DF	218
Gabriel Capelo Domingues	Fortaleza CE	215
João Victor Teixeira Degelo	Valinhos SP	213
Mattias Anders Silva Larsson	Valinhos SP	211
João Lucas Foltran Consoni	Maringá PR	209
Luiz Henrique Yuji Delgado Oda	São Paulo SP	208
Vitor Antunes Alcalde	São Paulo SP	208

Medalha de Bronze - Nível 2

Nome	Cidade - Estado	Pontos
Caio Cesar Barros Matos	Fortaleza CE	207
Júlia Barbate Pintão	Valinhos SP	206
Maria Clara Werneck	Rio de Janeiro RJ	204
Stelios Athanassios M. C. B. Karvanis	Teresina PI	198
Filipe Franco Ferreira	Belo Horizonte MG	196
Igor Brito Andrade	Fortaleza CE	194
Icaro Andrade Souza Bacelar	Ipatinga MG	194
Ricardo Tamay Honda	São Paulo SP	193
Gabriel Oda de Paiva	Guarulhos SP	191
Maria Carolina Paraíso Lopes	Salvador BA	191
Daniel Yamamoto Damico	Valinhos SP	191
Debora Tami Yamato	São Paulo SP	188
Andre Hiroshi Koga	Guarulhos SP	184
Francisco Weslley Teixeira Coimbra	Teresina PI	184
Maria Eduarda Ticianelli Lopes	São Paulo SP	183
Kaio Kumagai	Belo Horizonte MG	182

Menção Honrosa - Nível 2

Nome	Cidade - Estado	Pontos
Francisco Moreira Machado Neto	Fortaleza CE	178
João Lucas Duim	Mar de Espanha MG	177
Bruno Berganholi Dias	Belo Horizonte MG	177
Vinícius de Alcantara Névoa	Goiânia GO	176
Gustavo Goulart Saliba	Belo Horizonte MG	175
Mateus Menezes Moreira	Rio de Janeiro RJ	175
Samuel Moeller Rayzel	Curitiba PR	174
Ygor de Santana Moura	Fortaleza CE	171
Laís Nuto Rossman	Fortaleza CE	170
Carlos Eduardo Filhagosa Junior	Rio de Janeiro RJ	169
Luís Carlos Ho	Brasília DF	168
Wilson Oliveira Guimarães Neto	Brasília DF	168
Caetano da Motta Lima Souza Ramos	Rio de Janeiro RJ	167
Davi Maciel Dias	Fortaleza CE	163
Diogo Eloia Limao	Fortaleza CE	161
Luis Henrique Chiba	São Paulo SP	161
Tiago Sussumu Tutida	São Paulo SP	161
Solano Omar Oliveira do Nascimento	Belo Horizonte MG	159
Gabriel Ferreira Candido	Fortaleza CE	158
Henrique Lopes de Assunção	Contagem MG	156
Alberto Quintão Oliveira	Ipatinga MG	156
Eduarda Vitória da Costa Silva	Vitória ES	155
Ailton José da Silva Júnior	Recife PE	152
Magno Ariel Alves Balbino	Mossoro RN	150
Matheus Kwon	São Paulo SP	150
Pedro Nunes Pereira	Rio de Janeiro RJ	149
Lucas Costa Pereira	Rio das Ostras RJ	146
Caio Espinosa dos Santos	Rio de Janeiro RJ	145
Daniel Henrique Barbosa Santos	Curitiba PR	145
Paulo Davi Ramos Albuquerque	Fortaleza CE	142
Wendrik de Oliveira Santana	Sete Lagoas MG	141
Alan Esquenazi	Rio de Janeiro RJ	138
Thomas Haofu Yang	São Paulo SP	137
Rodrigo Amaro Fonseca	Porto Alegre RS	136
Victor Dias Girão Rocha	Fortaleza CE	134
Felipe Toshiyuki Miamoto	São Paulo SP	133
Pedro Pimentel Teixeira	Brasília DF	131
Enzo Jardim Vendramin	Florianópolis SC	131

Medalha de Ouro - Nível 3

Nome	Cidade - Estado	Pontos
Pedro Henrique Sacramento de Oliveira	São Paulo SP	329
George Lucas Diniz Alencar	Fortaleza CE	299
João César Campos Vargas	São Paulo SP	295
André Yuji Hisatsuga	São Paulo SP	292
Mateus Siqueira Thimoteo	São Paulo SP	292
Guilherme Goulart Kowalczuk	São Paulo SP	290
Andrey Jhen Shan Chen	Valinhos SP	288

Medalha de Prata - Nível 3

Nome	Cidade - Estado	Pontos
Lucas Hiroshi Hanke Harada	São Paulo SP	282
Davi Cavalcanti Sena	Fortaleza CE	278
Bruno Brasil Meinhart	Fortaleza CE	269
Mark Helman	Rio de Janeiro RJ	253
Bryan Diniz Borck	Fortaleza CE	250
Tarcisio Soares Teixeira Neto	Fortaleza CE	249
Vitor Augusto Carneiro Porto	Fortaleza CE	247
Bruno Uchôa Cirne	Natal RN	242
Gabriel Dante Cawamura Seppelfelt	São Paulo SP	242
Gabriel Tostes Messias Pereira	Brasília DF	237

Medalha de Bronze - Nível 3

Nome	Cidade - Estado	Pontos
Lorenzo Andreaus	Blumenau SC	235
Mariana Bigolin Groff	Porto Alegre RS	229
Diemison Vargas de Cerqueira	Belo Horizonte MG	228
Pedro Lucas Lanaro Sponchiado	São Paulo SP	220
Brendon Diniz Borck	Fortaleza CE	211
Lucas Soares Rodrigues	Fortaleza CE	210
Daniel Quintão de Moraes	Rio de Janeiro RJ	210
Julia Perdigão Saltiel	Rio de Janeiro RJ	208
Bruno Visnadi da Luz	Florianópolis SC	202

Nome	Cidade - Estado	Pontos
Danilo Marinho Fernandes	Brasília DF	201
Gabriel Ribeiro Barbosa	Fortaleza CE	195
Gabriel Vinícius de Souza Silva	Rio de Janeiro RJ	194
Bruno Barros de Sousa	Fortaleza CE	182
Alan Gualberto de Souza de F. de Pinho	Salvador BA	180
Matheus Leite Queiroz Nunes	Recife PE	178
Nathan Luiz Bezerra Martins	Fortaleza CE	177
Samuel Prieto Lima	Goiânia GO	177

Menção Honrosa - Nível 3

Nome	Cidade - Estado	Pontos
Felipe Bezerra de Menezes Benicio de Sousa	Fortaleza CE	176
Ítalo Rennan Lima Silva	Fortaleza CE	174
Eduardo Celso Viscovini	Maringá PR	174
Renan Felipe Bergamaschi de Morais	Bariri SP	173
Catulo Axel Teixeira Vasconcelos Alves	Fortaleza CE	171
Bruno Costa Alves Freire	Rio de Janeiro RJ	168
Carlos Roberto Bastos Lacerda	Rio de Janeiro RJ	168
Bernardo Sobral Werneck	Rio de Janeiro RJ	166
Rafael Tchen Yin Hang Wei	Rio de Janeiro RJ	163
Gustavo Marin Goulart	Rio de Janeiro RJ	162
Rafael Gomes Portacio de Souza	Fortaleza CE	161
Lucas Melo de Oliveira	São Paulo SP	160
João Pedro Mello de Carvalho	Rio de Janeiro RJ	159
Nathan Jardim Teixeira	Rio de Janeiro RJ	156
Matheus Rodrigues Varela	Rio de Janeiro RJ	156
Francisco Amauri Santos Nascimento	Fortaleza CE	154
Vilmar Ribeiro Machado Junior	Fortaleza CE	154
Alicia Fortes Machado	Teresina PI	153
Luan Arjuna Fraga Ramires	Andarai BA	153
Victória Moreira Reis Cogo	Teresina PI	152
Evandro de Oliveira Siersi Manso	Rio de Janeiro RJ	152
Luan Francisco Alves do N. Pereira	Rio de Janeiro RJ	152
Lara Franciulli Teodoro de Souza	São Paulo SP	151
Davi Xie	Curitiba PR	148
Geraldo Rayan Alves Messmore Coelho	Aracaju SE	145

Medalha de Ouro - Nível Universitário

Nome	Cidade - Estado	Pontos
Lucas Souza Mota de Aragão	São Cristovão SE	250
Igor Albuquerque Araujo	Rio de Janeiro RJ	247
Andre Macieira Braga Costa	Belo Horizonte MG	228
Rafael Filipe dos Santos	Rio de Janeiro RJ	219

Medalha de Prata - Nível Universitário

Nome	Cidade - Estado	Pontos
Rafael Kazuhiro Miyazaki	Rio de Janeiro RJ	215
Victor Tadeu Tetsuo Suzuki	S.J. dos Campos SP	214
Gabriel Fazoli Domingos	S.J. do Rio Preto SP	201
Daniel Eiti Nishida Kawai	São Paulo SP	201
Arthur Ferreira do Nascimento	São Paulo SP	201
Valentino Amadeus Sichinel	Rio de Janeiro RJ	194
Wagner Fonseca Rodrigues	S.J. dos Campos SP	191
Felipe Magalhães de Matos Gabriel	Rio de Janeiro RJ	191

Medalha de Bronze - Nível Universitário

Nome	Cidade - Estado	Pontos
Pedro Henrique Alencar Costa	Rio de Janeiro RJ	185
Carlos Alexandre Silva dos Santos	S.J. dos Campos SP	184
Ana Karoline Borges Carneiro	Rio de Janeiro RJ	181
Davi Coelho Amorim	Rio de Janeiro RJ	181
Glauber de Lima Guarinello	S.J. dos Campos SP	177
Caio Cesar Saldanha Maia O. Kinelski	S.J. dos Campos SP	175
Luize DUrso	Rio de Janeiro RJ	171
Thiago Ribeiro Tergolino	Rio de Janeiro RJ	170
Erik Gabriel Araujo de Medeiros	S.J. dos Campos SP	170
Lucas Garcia Gomes	Campinas SP	164
Raphael Mendes de Oliveira	Rio de Janeiro RJ	158
Thiago Filipe de Medeiros	S.J. dos Campos SP	157

Menção Honrosa - Nível Universitário

Nome	Cidade - Estado	Pontos
Victor Seixas Souza	Campinas SP	151
Rafael Rodrigues Rocha de Melo	Rio de Janeiro RJ	151
Marina Pessoa Mota	Rio de Janeiro RJ	135
Hudson William Braga Vieira	S.J. dos Campos SP	131
Marcos Gabriel de Santana	São Cristovão SE	130
Yure Carneiro de Oliveira	Salvador BA	121
João Baptista de Paula e Silva	Rio de Janeiro RJ	121
Victor Hugo Vianna Silva	S.J. dos Campos SP	116
Raoní Cabral Ponciano	João Pessoa PB	112
Felipe de Mattos Chak Hindi	São Carlos SP	108
Arthur Andrades Covatti	S.J. dos Campos SP	106
Matheus Douglas de Matos Marcondes	S.J. dos Campos SP	106
Cauim de Souza Lima	S.J. dos Campos SP	105
Tafnes Silva Barbosa	S.J. dos Campos SP	103
Thiago Tarraf Varella	São Paulo SP	103
Thiago Poeiras Silva	Belo Horizonte MG	98
Lucas Mioranci	São Carlos SP	95
Thiago Estrela Montenegro	São Paulo SP	91
Lucas Antônio Silva	S.J. dos Campos SP	90

Coordenadores regionais

ALAGOAS

Cristiane França Nunes Moreira	-	PIRANHAS
Krerley Irraciel Martins Oliveira	UFAL	MACEIÓ

AMAPÁ

Arthur william Matias Gonçalves	IFAP	LARANJAL DO JARI
André Luiz Dos Santos Ferreira	IFAP	MACAPÁ
Lucicleuma Lobato do Amaral	-	PORTO GRANDE
Márleson Rôndiner dos Santos Ferreira	-	SANTANA
Tobias de Cabral Braga	-	PORTO GRANDE

AMAZONAS

Disney Douglas de Lima Oliveira	UFAM	MANAUS

BAHIA

Gabriel Farias Silva	-	XIQUE-XIQUE
Marcos Grilo Rosas	UEFS	FEIRA DE SANTANA
Nestor Felipe Castañeda Centurión	-	ILHÉUS
Samuel Barbosa Feitosa	UFBA	SALVADOR

CEARÁ

Antônio Caminha Muniz Neto	UFC	FORTALEZA
Edvalter da Silva Sena Filho	-	SOBRAL
Flávio França Cruz	URCA	JUAZEIRO DO NORTE
Francisco Odécio Sales	IFCE	ITAPIPOCA
Romildo José da Silva	UFC	FORTALEZA
Sâmara Costa Lima	URCA	JUAZEIRO DO NORTE

DISTRITO FEDERAL

Diego Marques	UNB	BRASÍLIA

ESPÍRITO SANTO

Florêncio Ferreira Guimarães Filho	UFES	VITÓRIA
Valdinei Cezar Cardoso	UFES	SÃO MATEUS

GOIÁS

Ana Paula de Araújo Chaves	UFG	GOIÂNIA
Márcio AntÔnio Ferreira Belo Filho	-	RIO VERDE
Otávio Marçal Leandro Gomide	UFG	GOIÂNIA

MARANHÃO

Arlane Manoel Silva Vieira	UFMA	CODÓ
Cleber Araújo Cavalcanti	-	SÃO LUIZ
Francisco Pessoa de Paiva Júnior	-	SANTA INÊS

MATO GROSSO

Diego Piasson	UNEMAT	BARRA DO BUGRES
Fernanda Palhares Maringolo Sekimura	UFMT	CUIABÁ

MATO GROSSO DO SUL

Edgard José Dos Santos Arinos	COLÉGIO MILITAR	CAMPO GRANDE

MINAS GERAIS

Aldo Peres Campos e Lopes	-	ITABIRA
Antônio Carlos Nogueira	UFU	UBERLÂNDIA
Beatriz Casulari da Motta Ribeiro	UFJF	JUIZ DE FORA
Carlos Eustáquio Pinto	-	BETIM
Ceile Cristina Ferreira Nunes	-	PIUMHI
Daniele Cristina Gonçalves	UEMG	JOÃO MONLEVADE
Joelson Dayvison Veloso Hermes	IFSULDEMINAS	INCONFIDENTES
José Jozelmo Grangeiro Vieira	CEFET-MG	TIMÓTEO
LÚcio Paccori Lima	UFV	FLORESTAL
Luccas Cassimiro Campos	UFMG	BELO HORIZONTE
Márcio Fialho Chaves	UFLA	LAVRAS
Renato Machado Pereira	IFSULDEMINAS	POÇOS DE CALDAS
Rosivaldo Antônio Gonçalves	UNIMONTES	MONTES CLAROS
Sávio Ribas	UFOP	OURO PRETO

PARÁ

Adenilson Pereira Bonfim	ETRB	BELÉM
Claudionei Pereira de Oliveira	-	MARABÁ
Jocimar Albernaz Xavier	IFPA	PARAGOMINAS
Mário Tanaka Filho	UFOPA	SANTARÉM
Valdelírio da Silva e Silva	-	CASTANHAL

PARAÍBA

Felipe Wallison Chaves Silva	UFPB	JOÃO PESSOA
Marcelo Carvalho Fereira	-	CAMPINA GRANDE

PARANÁ

Bruno Leonardo Macedo Ferreira	UTFPR	GUARAPUAVA
Eduardo de Amorim Neves	UEM	MARINGA
Elisângela Dos Santos Meza	UEPG	PONTA GROSSA
José Carlos Corrêa Eidam	UFPR	CURITIBA
Magna Natália Marin Pires	-	LONDRINA
Marciano Pereira	UEPG	PONTA GROSSA

PERNAMBUCO

Daniel dos Santos Rocha	-	ARCOVERDE
Jonas José Cruz dos Santos	IFPE	GARANHUNS
Luiz Paulo Freire Moreira	UFPE	RECIFE
Thiago Dias Oliveira Silva	UFRPE	RECIFE

PIAUÍ

Antônio Cardoso do Amaral	UFPI	TEREZINA
Carlos Augusto David Ribeiro	UFPI	PARNAÍBA
Francimar de Brito Vieira	-	CORRENTE
Hilquias Santos de Oliveira	-	FLORIANO

RIO DE JANEIRO

Alex Cabral Barbosa	IFF	CAMPO DOS GOYTACAZES
Jones Colombo	-	NITERÓI
Leonardo Augusto Zão	IME	RIO DE JANEIRO
Luis Humberto Guillermo Felipe	-	CAMPO DOS GOYTACAZES
Nara Bobko	-	RIO DE JANEIRO
Rafael Filipe dos Santos	COLÉGIO PENSI	RIO DE JANEIRO
Renata Martins da Rosa	-	RIO DE JANEIRO

RIO GRANDE DO NORTE

Carlos Alexandre Gomes da Silva	UFRN	NATAL

RIO GRANDE DO SUL

Álvaro Krüger Ramos	UFRGS	PORTO ALEGRE
Malcus Cassiano Kuhn	-	LAJEADO
Márcio Luís Miotto	UFSM	SANTA MARIA
Paulo Marcus Hollweg Corrêa	-	SAPUCAIA DO SUL

RONDÔNIA

Vlademir Fernandes de Oliveira Júnior	UFRO	PORTO VELHO

RORAIMA

Gilson de Souza Costa	UFRR	BOA VISTA

SANTA CATARINA

Felipe Vieira	-	BLUMENAL
Milton Kist	-	CHAPECÓ

SÃO PAULO

Américo López Gálvez	USP	RIBEIRÃO PRETO
Armando Ramos Gouveia	ITA	SÃO JOSÉ DOS CAMPOS
Edson Roberto Abe	-	CAMPINAS
Débora Bezerra Linhares Libório	FSA	SANTO ANDRÉ
Emiliano Chagas	IFSP	SÃO PAULO
Giuliano Zugliani		CAMPINAS
João Carlos Ferreira Costa	UNESP	SÃO JOSÉ DO RIO PRETO
Lucas Colucci	IME-USP	SÃO PAULO
Maurício Richartz	UFABC	SANTO ANDRÉ
Marina Mariano de Oliveira	-	SÃO JOSÉ DOS CAMPOS
Ronaldo Penna Saraiav	UNISANTOS	SANTOS
Samuel Liló Abdalla	-	SOROCABA
Parham Salehyan	UNESP	SÃO JOSÉ DO RIO PRETO
Pedro Tavares Paes Lopes	ICMC	SÃO CARLOS
Plamen Kochloukov	UNICAMP	CAMPINAS
Thaís Fernanda Mendes Monis	-	SANTO ANDRÉ

SERGIPE

Antônio Márcio de Lima Soares	-	PAULO AFONSO
Valdenberg Araújo da Silva	UFSE	ARACAJÚ

TOCANTINS

Jaime do Espírito Santo Vieira Júnior	-	PALMAS
Sâmara Leandro Matos	-	ARAGUAÍNA