OBM - Olimpíada Brasileira de Matemática.
28^a **Semana Olímpica - Salvador - BA.**
27 a 31 de janeiro de 2025.

Prof. Carlos Gomes - DMAT UFRN.
`cgomesmat@gmail.com`

Onde estão os autovalores dessa matriz?

(Nível Uiniversitário - Estudantes de graduação).

Teorema. 1 (Hadamard)**.** *Seja* $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ *tal que, para todo* $1 \leq i \leq n$, $|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{ij}|$. *Então,* A *é inversível.*

Definição. 0.1 (Discos de Gerschgorin)**.** *Seja* $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ *e* $1 \leq i \leq n$. *O i-ésimo disco de Gerschgorin de* A *é o disco (fechado) de centro* a_{ii} *e de raio* $r_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{i,j}|$.

O Teorema de Hadamard se traduz então em: se 0 *não pertence aos discos de Gerschgorin de* A*, então* A *é inversível. Uma variante deste resultado é o seguinte teorema:*

Teorema. 2 (Gerschgorin)**.** *Os autovalores de uma matriz* $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ *pertencem a união dos seus discos de Gerschgorin.*

Uma matriz e sua transposta tendo os mesmos autovalores, pode-se dizer que os autovalores de $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ pertencem também à união dos discos de centro a_{jj} e raio $\sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|$, com $i \neq j$ e $1 \leq j \leq n$.

Teorema. 3. *Seja* $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ *tal que* r *discos de Gerschgorin não intersectam os* $n - r$ *outros. Então, a união desses* r *discos contém exatamente* r *valores próprios (contados com suas multiplicidades).*

Corolário. 1. *Um desses discos de Gerschgorin que não intersecta os outros contém um único autovalor, então este autovalor é simples.*

Definição. 0.2 (Raio espectral)**.** *Seja* $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. *O raio espectral de* A *é definido como sendo o número real* $\rho(A) \geq 0$ *que corresponde ao máximo dos módulos dos autovalores de* A.

Por outro lado, todos os autovalores de uma matriz A pertencem ao disco fechado de centro 0 e raio $\rho(A)$. Há alguns resultados bem iteressantes nessa direção, como por exemplo,

- O raio espectral da matriz de permutação associada a uma permutação circular de ordem n é 1 e todos os autovalores são raízes n-ésimas da unidade. Assim, todos os autovalores pertencem ao círculo de centro 0 e raio 1.
- O raio espectral da matriz cujos coeficientes são todos iguais a 1 é n e nenhuma outra raiz n-ésima pertence ao círculo de centro 0 e raio n.

Mencionamos a seguir algumas propriedades elementares do raio espectral.

Teorema. 4. *Seja* $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ *e* $||A||$ *norma canônica da matriz* A*, então* $\rho(A) \leq ||A||$. *Além disso,*

$$\rho(A) = \lim_{k \to \infty} ||A^k||^{\frac{1}{k}}.$$

Teorema. 5. *A aplicação* $\varphi : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \to \mathbb{R}_+$*, definida por* $\varphi(A) = \rho(A)$ *é contínua.*

Exemplos

1. No $\mathbb{R}^2$, esboce os discos de Gerschgorin da matriz $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & i & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$,.

2. Seja $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ tal que $|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^n |a_{ij}|$.. Mostre que

$$|\det(A)| \geq \prod_{i=1}^n \left| a_{ii} - \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^n |a_{ij}| \right|.$$

3. Seja $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. As **Ovais de Cassini** da A são os conjuntos

$$\mathcal{O}_{ij} := \{z \in \mathbb{C} \ ; \ |z - a_{ii}| \cdot |z - a_{jj}| \leq r_i \cdot r_j\},$$

   onde $r_i = \sum_{\substack{k=1 \\ k\neq i}}^n |a_{ik}|$.

   Mostre que um autovalor λ de A pertence a pelo menos uma Oval de Cassini.

4. Seja A uma matriz irredutível. Demonstrar que os autovalores de A que pertencem à fronteira da união dos discos de Gerschgorin pertencem de fato à interseção de todos os discos de Gerschgorin.

5. Sejam $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ e $B = (b_{ij})$ estritamente positiva tais que

$$|a_{ij}| \leq b_{ij}, \ \forall \ i, j.$$

   Mostre que os autovalores de A pertencem a reunião dos discos fechados de centros a_{ii} e raios $\rho(B) - b_{ii}$.