



**25^a Vingança Olímpica
29^a Semana Olímpica – Vitória, ES
28 de janeiro de 2026**

-
- Não escreva mais de uma questão por página.
 - Use apenas um dos lados de cada folha.
 - Para cada problema, numere as páginas de sua solução.
 - Escreva seu nome em cada folha que usar.
-

Problema 1. Determine todas as funções $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ tais que, para quaisquer inteiros a e b , temos:

$$f(f(a) + b) + af(b) = f(ab) + f(a) + f(f(b)).$$

Problema 2. Sejam m e n inteiros não negativos. β etinha tem uma lousa em que, inicialmente, estão escritos os números 2^n e -2^n . Uma operação válida é apagar dois números x e y da lousa e escrever os seguintes quatro no lugar:

$$\frac{x+y}{2}, \frac{x+y}{2}, \frac{x-y}{2}, \frac{y-x}{2}.$$

Quantas operações, no mínimo, β etinha precisa fazer para deixar todos os números da lousa no intervalo $[-1, 2^m]$?

Problema 3. Defina as funções $\alpha : \mathbb{C}[x] \rightarrow \mathbb{Z}_{\geq 0}$ e $\beta : \mathbb{C}[x] \rightarrow \mathbb{Z}_{\geq 0}$ como a quantidade de raízes complexas distintas de um polinômio e a maior multiplicidade dentre suas raízes, respectivamente. Prove que, para quaisquer polinômios $P(x), Q(x) \in \mathbb{C}[x]$ satisfazendo $\deg P \geq \deg Q$, $\deg P > 0$ e $\text{mdc}(P, Q) = 1$, temos que:

$$\alpha(P^2 + PQ) \geq \frac{\deg P}{\deg P - \beta(Q) + 1} + 1.$$

Problema 4. Encontre todos os inteiros positivos n para os quais existem $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{Q}^*$ tais que:

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n + \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n} = n.$$

Problema 5. Dado um triângulo ABC com circuncírculo Ω e incentro I . Sejam D e E os pés das bissetrizes $\angle ABC$ e $\angle BCA$, respectivamente. Considere R e S os pontos de intersecção de Ω com \overline{DE} , de modo que os pontos S, E, D e R estão nessa ordem. Defina P e Q como os pontos de intersecção das circunferências (SBD) e (CRE) . Sendo I_a o A -exincentro de ABC , prove que o quadrilátero $APQI_a$ é cíclico.

Idioma: エネルギッシュな風味

Tempo: 5 horas.

Cada problema vale 7 pontos.

Aviso 1: temos um troféu, nos surpreenda!

Aviso 2: a quantidade de problemas em aberto nessa prova é o que sobra para o β etinha.

Aviso 3: se você for o Armando, menção você não receberá.

Aviso 4: pare de ler os avisos e sofra com os problemas.