

XXIX Semana Olímpica - Vitória - ES

Geometria - Nível 1

Prof. Gabriel Oliveira

28 de janeiro de 2026

Análise Combinatória — Material Olímpico

Princípios Fundamentais e Problemas Clássicos

1. Princípios Fundamentais

Princípio Aditivo

Se uma tarefa pode ser realizada de m maneiras ou de n maneiras, e essas possibilidades são disjuntas, então o total de maneiras é $m + n$.

Princípio Multiplicativo

Se uma tarefa é realizada em duas etapas, com m escolhas na primeira e n na segunda, então o total de possibilidades é $m \cdot n$.

Observação. Grande parte dos problemas olímpicos é resolvida por decomposição correta em etapas.

2. Permutações

Permutações Simples

O número de permutações de n elementos distintos é:

$$n!$$

Permutações com Repetição

Se entre os n elementos há repetições de tipos $n_1, n_2, \dots, n_k$, então o número de permutações distintas é:

$$\frac{n!}{n_1!n_2! \cdots n_k!}.$$

Permutações Circulares

O número de maneiras distintas de dispor n elementos em círculo é:

$$(n - 1)!.$$

3. Arranjos e Combinações

Arranjos

O número de arranjos de k elementos escolhidos entre n é:

$$A(n, k) = \frac{n!}{(n - k)!}.$$

Combinações

O número de combinações de k elementos escolhidos entre n é:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n - k)!}.$$

Observação. Sempre questione: **a ordem importa?** Se sim, use arranjos ou permutações; se não, combinações.

4. Identidades Combinatórias Importantes

Teorema 1 (Identidade de Pascal).

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}.$$

Teorema 2 (Teorema Binomial).

$$(x + y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n-k} y^k.$$

Lista de Exercícios — Análise Combinatória

Parte A — Princípios Fundamentais

Problema 1. De quantas maneiras é possível formar uma senha de 6 caracteres usando letras maiúsculas e dígitos, sabendo que a senha deve conter ao menos um dígito?

Problema 2. Quantos números naturais de 5 algarismos podem ser formados sem repetir algarismos e sem começar por zero?

Problema 3. Em um campeonato com 8 equipes, cada equipe enfrenta todas as outras exatamente uma vez. Quantas partidas são realizadas?

Problema 4. Em um jogo cada participante deve escolher uma senha formada por dígitos distintos, escolhidos dentre os algarismos de 0 a 9, de forma a cumprir a seguinte condição: $a.b.(c + d + e) = 55$ Qual é o número máximo de senhas que podem ser formadas?

Problema 5. Oito alunos foram organizados lado a lado e cada um deles possui uma placa. Cada placa possui de um dos lados a escrita SIM e do outro lado NAO. Determine de quantas maneiras podemos sequenciar as placas de modo que a quantidade de placas SIM seja ímpar.

Problema 6. (Tailândia/2021-adaptada) No anfiteatro de uma Universidade, há 8^2 assentos arranjados num formato 8×8 . cada assento é ocupado por exatamente uma pessoa e cada pessoa tem uma placa verde e uma placa amarela. determine o número de maneiras de cada pessoa levantar uma placa, de modo que cada linha e cada coluna tenha um número ímpar de pessoas levantando uma placa amarela.

Parte B — Permutações

Problema 7. *De quantas maneiras distintas podem ser ordenadas as letras da palavra*

COMBINATÓRIA?

Problema 8. *Quantas permutações da palavra OLIMPÍADA começam e terminam com vogal?*

Problema 9. *De quantas maneiras 7 pessoas podem sentar-se em uma fila de modo que duas pessoas específicas não fiquem lado a lado?*

Problema 10. *De quantas maneiras 6 homens e 6 mulheres podem sentar-se alternadamente em uma fila?*

Parte C — Permutações Circulares

Problema 11. *De quantas maneiras distintas 8 pessoas podem sentar-se em uma mesa circular se duas delas não podem sentar-se lado a lado?*

Problema 12. *Quantas disposições circulares distintas existem para as letras da palavra*

MATEMÁTICA?

Parte D — Arranjos e Combinações

Problema 13. *De quantas maneiras é possível escolher um presidente, um vice-presidente e um secretário dentre 10 pessoas?*

Problema 14. *Quantos subconjuntos não vazios podem ser formados a partir de um conjunto com 12 elementos?*

Problema 15. *Quantas diagonais possui um polígono convexo de n lados?*

Parte E — Técnicas de Complementar e Restrições

Problema 16. *Quantos números de 6 algarismos distintos podem ser formados com os dígitos 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 que sejam divisíveis por 5?*

Problema 17. *De quantas maneiras é possível distribuir 10 bolas idênticas em 4 caixas distintas, admitindo-se caixas vazias?*

Problema 18. *Quantas palavras de 8 letras podem ser formadas usando apenas as letras A, B e C, de modo que nenhuma letra apareça três vezes consecutivas?*

Parte F — Contagem Dupla e Argumentos Combinatórios

Problema 19. *Mostre que*

$$\binom{n}{2} + \binom{n}{3} = \binom{n+1}{3}.$$

Problema 20. *Em um grupo de n pessoas, cada pessoa tem exatamente k amigos. Mostre que nk é um número par.*

Parte G — Problemas de Nível Olímpico (OBM / IMO)

Problema 21. *Quantos subconjuntos de $\{1, 2, \dots, n\}$ não contêm dois números consecutivos?*

Problema 22. *Determine o número de soluções inteiras não negativas da equação*

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 20.$$

Problema 23. *Em uma sala com n pessoas, prove que existem duas pessoas que conhecem exatamente o mesmo número de pessoas na sala.*

Problema 24. *Quantas sequências binárias de comprimento n não contêm o bloco 111?*

Parte H — Desafios

Problema 25. *De quantas maneiras é possível colorir os vértices de um hexágono regular com 3 cores, considerando duas colorações iguais se uma pode ser obtida da outra por uma rotação?*

Problema 26. *Seja n um inteiro positivo. Determine o número de soluções inteiras não negativas da equação*

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = n.$$

Problema 27. *Quantas funções sobrejetoras existem de um conjunto com n elementos em um conjunto com k elementos, onde $n \geq k$?*

Problema 28. *(Cone Sul /2023) Uma lista de n inteiros positivos é dita boa se satisfaz simultaneamente:*

$$a_1 < a_2 < a_3 < \dots < a_n$$

$$a_1 + a_2^2 + a_3^3 + \dots + a_n^n \leq 2023$$

Para cada n , determine quantas listas boas de n números existem.

7. Dicas Finais de Olimpíada

- Evite fórmulas prontas sem entender o processo;
- Desenhe ou organize casos pequenos;
- Use simetria sempre que possível;
- Prefira argumentos combinatórios a cálculos extensos.

Referências

- [1] Titu Andreescu e Razvan Gelca. *Mathematical Olympiad Challenges*. Birkhäuser Boston, 2009.
- [2] Rishabh Kumar. *Olympiad Combinatorics: Problem-Solving Strategies for Math Competitions*. Independently Published, 2025. ISBN 9798263477400.
- [3] Rushil Mathur. *An Exploration of Olympiad Combinatorics*. Bhaskaracharya Pratishthana (edição Amazon).
- [4] Alexey A. Zaslavsky et al. *Mathematics via Problems: Part 3: Combinatorics*. Mathematical Circles Library, AMS/SLMath, 2023. ISBN 978-1-4704-6010-5.
- [5] Sociedade Brasileira de Matemática. *Bibliografia recomendada para Olimpíadas Brasileiras de Matemática*. Disponível em: OBM (site oficial).
- [6] Augusto Morgado. *Análise Combinatória e Probabilidade*. (noic.com.br listagem de livros recomendados). :contentReference