Ceva e Menelaus

Na geometria olímpica, poucos resultados são tão recorrentes e poderosos quanto os Teoremas de Ceva e de Menelaus. Eles permitem analisar, de forma precisa, situações de concorrência de retas e colinearidade de pontos em triângulos, transformando configurações geométricas complexas em relações simples de razões.

Neste material, exploraremos Ceva e Menelaus como ferramentas estratégicas na resolução de problemas olímpicos. As questões propostas exigem leitura cuidadosa da figura, organização do raciocínio e escolha adequada do teorema — indo além da aplicação mecânica das fórmulas.

O objetivo é desenvolver visão geométrica e rigor lógico, habilidades essenciais em competições como OBM, Lusofonia e Conesul, e fundamentais para o treinamento avançado da Semana Olímpica.

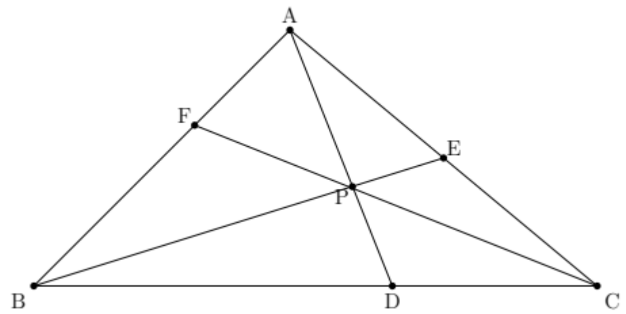
Os teoremas de Menelaus e Ceva são muito úteis para se provar que três pontos são colineares (No caso, o teorema de Menelaus), ou três retas são concorrentes (O teorema de Ceva é melhor nesse caso).

Teorema de Ceva

Teorema 1. (Ceva) Tome ABC um triângulo e sejam D, E e F pontos sobre os lados BC, AC e AB, respectivamente. Então os segmentos AD, BE e CF concorrem em um ponto se, e somente se,

$$\frac{BD}{CD}\cdot\frac{CE}{AE}\cdot\frac{AF}{FB}=1$$

Prova.



Lema. se XYZ é um triângulo e W é ponto sobre YZ, então,

$$\frac{YW}{XZ}=\frac{[XYW]}{[XZW\,]}$$

Pelo lema,

$$\frac{BD}{DC}=\frac{[ABD]}{[ADC]}=\frac{[PBD]}{[PDC]}=\frac{[ABD]-[PBD]}{[ADC]-\ [PDC]}=\frac{[PBD]}{[PDC]}$$

Agora fa¸ca isso para os demais lados, e olhe para o produto, perceba que ser´a 1. Para fazer a volta, veja que basta fazer um ponto fantasma D’, perceba que provamos que

$$\frac{BD'}{D'B}=\frac{BD}{DB}$$

Logo $D=D'$.

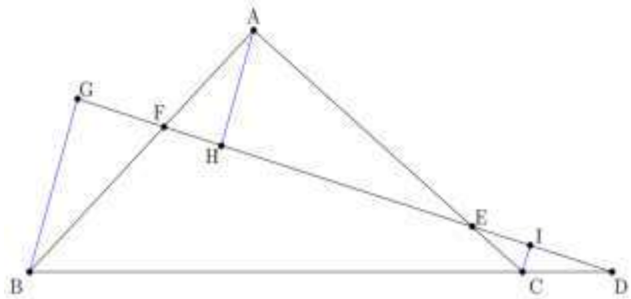
Teorema de Menelaus

Teorema 2. (Menelaus) Seja ABC um triângulo, considere uma reta r intersectando os lados AB, AC e BC nos pontos F, E, D respectivamente. Então,

$$\frac{BD}{CD}\cdot\frac{CE}{AE}\cdot\frac{AF}{FB}=1$$

Prova.

E do mesmo modo, se temos ponto nessa razão com pelo menos um ponto fora do triângulo, então eles são colineares.



Considere G, H e I os pés das perpendiculares de B, A e c à reta r. Agora note que temos algumas semelhanças de triângulos. Como mostrado abaixo.

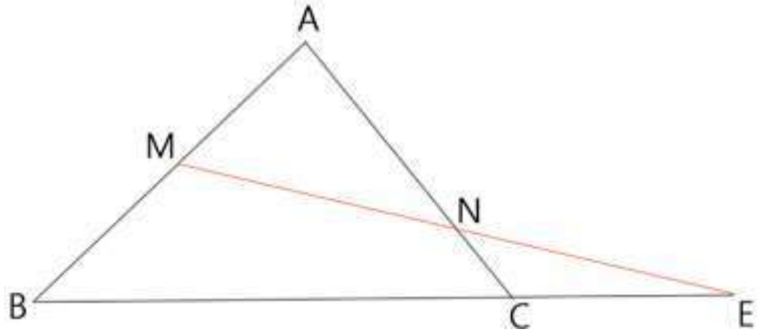
$$\begin{cases}\Delta BFG\sim\Delta AFH\rightarrow\dfrac{AF}{FB}=\dfrac{AH}{BG}\\ \Delta HEA\sim\Delta IEC\rightarrow\dfrac{CE}{AE}=\dfrac{CI}{AH}\\ \Delta DIC\sim\Delta DGB\ \rightarrow\dfrac{BD}{CD}=\dfrac{GB}{CI}\end{cases}$$

Multiplicando tudo, obtemos justamente o que procurávamos.

Agora para a volta, veja que o processo ´e semelhante ao da volta de Ceva, basta fazer um ponto fantasma.

Problemas Iniciais

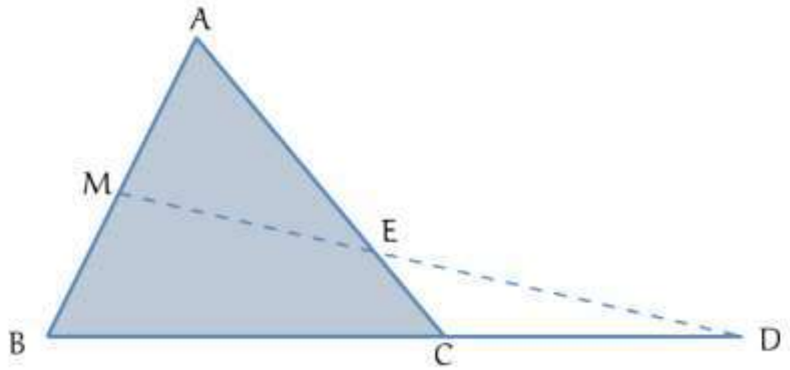
Problema 01. Sendo o Triângulo ABC equilátero e seu perímetro sendo 72 cm. M ponto médio de AB e CE= 16. Qual o valor de CN ?



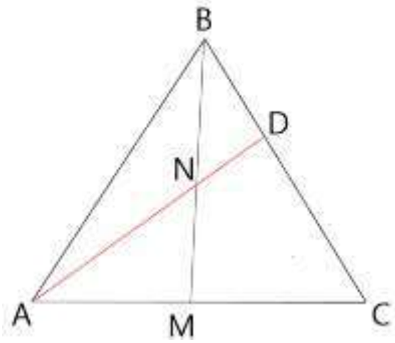
Problema 02. (Escola Naval) O triângulo da figura abaixo é equilátero, *AM = MB = 5 e CD = 6.*

A área do triângulo MAE vale:

a) $\frac{200\sqrt{3}}{11}$
b) $\frac{100\sqrt{3}}{11}$
c) $\frac{100\sqrt{2}}{2}$
d) $\frac{200\sqrt{2}}{11}$
e) $\frac{200\sqrt{2}}{2}$



Problema 03. Sendo M o ponto médio de AC e N ponto médio de BM. Se AN = 12, qual o valor de ND?



Problemas de Treinamento

Problema 04. Mostre que as bissetrizes concorrem em um único ponto.

Problema 05. Prove que as medianas concorrem.

Problema 06. Tome ABC um triângulo e sejam E e F pontos sobre os lados AC e AB, respectivamente. Além disso, tome P o ponto de intersecção de BE e CF. Mostre que EF//AB ⟸⟹ AP é mediana de ABC.

Problema 07. Mostre que os pés das bissetrizes externas são colineares.

Problema 08. Considere um triângulo ABC, mostre que o pé da bissetriz interna de B, o pé da bissetriz interna de C e o pé da bissetriz externa de A são pontos colineares i.e. eles estão sob uma mesma reta.

Problema 09. (OBM 2016). As bissetrizes internas dos ângulos ∠ABC e ∠ACB do triangulo ABC se encontram no ponto I . A reta paralela a BI que passa pelo ponto A encontra a reta CI no ponto D. A reta paralela a CI por A encontra a reta BI no ponto E. As retas BD e CE se encontram no ponto F . Mostre que F , A e I são colineares se, e somente se, AB = AC .

Problema 10. (OBM 2005 N2) A medida do ângulo B de um triângulo ABC é 120°. Sejam M um ponto sobre o lado AC e K um ponto sobre o prolongamento do lado AB, tais que BM é a bissetriz interna do ângulo ∠ABC e CK é a bissetriz externa correspondente ao ângulo ∠ACB. O segmento MK intersecta BC no ponto P. Prove que ∠APM = 30°.

Problema 11. ***(Rioplatense/1997):*** Seja *ABCD* um quadrado de lado 1. Sejam E e F os pontos médios dos lados AB e BC. G é um ponto sobre CD tal que GD = 3.GC. As retas EG e AF se intersectam em O. Calcula a área do triângulo FGO.

Sessão de Desafios

Problema 12. Mostre que a versão trigonométrica do teorema de Ceva vale. Sendo P o ponto que concorrem e ABC o triângulo.

$$\frac{sin\angle \mathrm{PAB}}{sin\angle \mathrm{PBC}} \cdot \frac{sin\angle \mathrm{PCA}}{sin\angle \mathrm{PCB}} \cdot \frac{sin\angle \mathrm{PBC}}{sin\angle \mathrm{PBA}} = 1$$

Problema 13. (Bielorússia 1995) Seja H o ponto de interseção das alturas BB_1 e CC_1 do triângulo acutângulo ABC. Seja l uma reta passando por A, tal que $l \perp$ AC. Prove que as retas BC, B_1C_1 e l possuem um ponto em comum se e somente se H for o ponto médio de BB_1.

Problema 14. (OBM 2018) Seja ABC um triangulo acutângulo de circuncentro O e ortocentro H. A circunferência de centro X_A passa pelos pontos A e H e tangencia o circuncírculo do triangulo ABC. Defina de maneira análoga os pontos X_B e X_C. Sejam O_A, O_B e O_C os simétricos de O em relação aos lados BC, CA e AB, respectivamente. Prove que as retas O_AX_A, O_BX_B e O_CX_C são concorrentes.

Problema 15. (Teste IMO 2007) *Seja ABCDE um pentágono convexo tal que* $\angle BAC = \angle CAD = \angle DAE$ *e* $\angle ABC = \angle ACD = \angle ADE$. *As retas BD e CE se intersectam em P. Prove que AP passa pelo ponto médio de CD.*