

Introdução à Combinatória

Semana Olímpica 2026 - Prof. Bruno Holanda

Problema 1. Existem três bolas em um campo de futebol. Uma garota está brincando com essas bolas e toda vez que chuta uma delas, a bola cruza a linha do meio-campo. Ela faz isso 25 vezes, chutando as bolas sem nenhuma ordem específica. É possível que todas as três bolas acabem em seus respectivos pontos de partida?

Problema 2. (Lengrado 1984) Sobre uma reta que contém o segmento AB , existem 45 pontos marcados, nenhum dos quais está sobre segmento AB . Prove que a soma das distâncias desses 45 pontos até A não é igual à soma de suas distâncias até B .

Problema 3. (OBMEP 2018) Uma máquina maluca transforma duas frutas em uma fruta, da seguinte maneira:

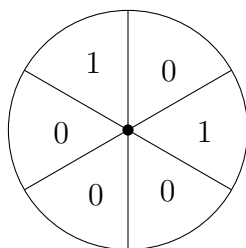
- Transforma duas maçãs em uma laranja;
- Transforma duas laranjas em uma laranja;
- Transforma uma maçã e uma laranja em uma maçã.

- (a) Quantas vezes a máquina deve ser usada para transformar três maçãs em uma maçã?
- (b) Explique como usar essa máquina algumas vezes para transformar três maçãs e quatro laranjas em uma maçã.
- (c) Começando com 2018 laranjas e 517 maçãs, a máquina foi usada repetidamente até sobrar apenas uma fruta. Explique por que essa fruta só pode ser uma maçã.

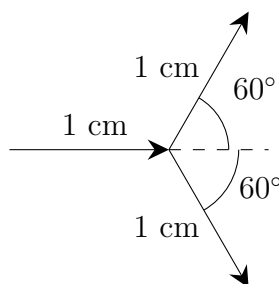
Problema 4. Ana e Bianca jogam um jogo com os números de 1 a 100 escritos em ordem crescente em uma linha reta. Ana começa e, em seguida, os turnos se alteram. Em cada jogada, um jogador coloca um dos sinais de operação, $+$, $-$ e $\times$, entre dois números que ainda não têm um sinal de operação entre eles. Após 99 sinais de operação terem sido colocados, o valor da expressão é calculado. Ana vence se esse valor for ímpar, e Bianca vence se for par. Prove que Ana tem uma estratégia vencedora.

Problema 5. Três gafanhotos estão alinhados, brincando de pular. Em cada turno, um dos gafanhotos pula sobre outro, mas nunca sobre os outros dois ao mesmo tempo. É possível que, após 2021 turnos, os gafanhotos tenham voltado às suas posições originais?

Problema 6. Um jogo de solitário começa com um círculo dividido em 6 setores, cada um contendo um número, conforme mostrado na figura a seguir. Em cada jogada, pode-se adicionar 1 aos números em dois setores adjacentes. Prove que é impossível fazer com que todos os seis números sejam iguais.



Problema 7. (OBM 2009) Uma formiga caminha no plano da seguinte maneira: inicialmente, ela anda 1 cm em qualquer direção. Após, em cada passo, ela muda a direção da trajetória em 60° para a esquerda ou direita e anda 1 cm nessa direção.



É possível que ela retorne ao ponto de onde partiu em

- (a) 2008 passos?
- (b) 2009 passos?

Problema 8. É possível que, em um tabuleiro 8×8 , um cavalo se desloque do canto inferior esquerdo ao canto superior direito passando por cada casa exatamente uma vez?

Problema 9. (OBM 2001) As 42 crianças de uma escola infantil deram as mãos formando uma fila e cada uma delas recebeu um número da seguinte maneira: a primeira delas ficou com o número 1, a segunda ficou com o número 2 e, assim sucessivamente, até a última, que ficou com o número 42. Continuando de mãos dadas, foram para um pátio, onde cada uma delas ficou sobre uma lajota quadrada; duas crianças com números consecutivos ficaram em lajotas vizinhas com um lado comum (ou seja, do lado esquerdo, do lado direito, na frente ou atrás, mas nunca em diagonal).

	11	20				
	31					

Desenho de Maria

	11	20				
	31					

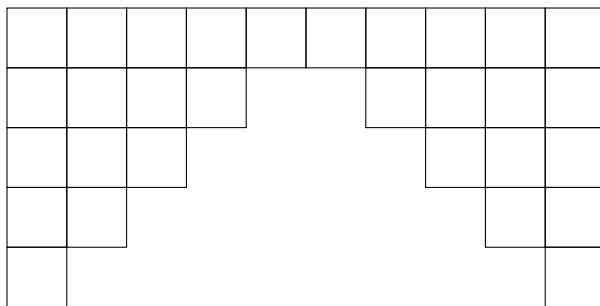
Desenho de Célia

Ao relatar esse fato para a diretora, a inspetora Maria fez o desenho à esquerda, mostrando a posição de três crianças sobre o retângulo formado pelas 42 lajotas, sobre as quais estavam as

crianças. Num outro comunicado, a inspetora Célia fez outro desenho, mostrado à direita, com a posição das mesmas crianças sobre o mesmo retângulo. Ao receber os dois desenhos a diretora disse a uma das inspetoras: "O seu desenho está errado".

- (a) Com qual das duas inspetoras a diretora falou? Qual foi o raciocínio da diretora?
- (b) Complete o desenho correto satisfazendo as condições do enunciado.

Problema 10. É possível cobrir o tabuleiro a seguir usando apenas dominós?

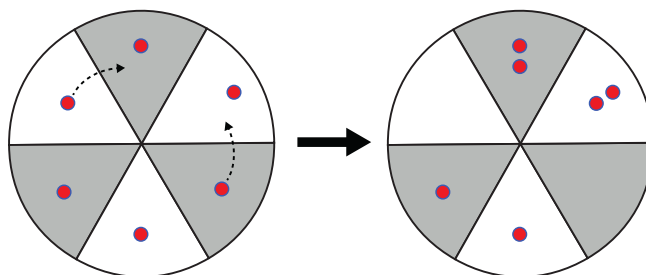


Problema 11. Um tabuleiro 6×6 é coberto inteiramente por 18 dominós que são peças 2×1 ou 1×2 . Mostre que pode-se traçar uma reta que passa pelo interior do tabuleiro e não corta nenhum dos dominós.

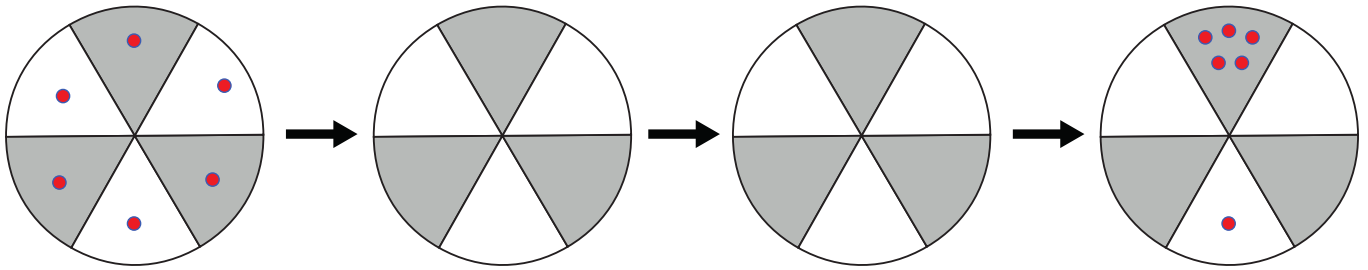
Problema 12. As casas de um tabuleiro 7×7 estão pintadas inicialmente de preto e branco como no xadrez, sendo as quatro casas do canto pintadas de preto. A cada minuto pode-se escolher duas casas vizinhas (que compartilham um lado) e trocar a cor de ambas. É possível que o tabuleiro torne-se inteiramente branco após uma sequência de operações?

Problema 13. (OBMEP 2023) Um tabuleiro circular é dividido em seis setores iguais pintados alternadamente de cinza e branco. Inicialmente há uma bolinha em cada setor. As bolinhas são movimentadas em etapas obedecendo as seguintes regras:

- escolhemos duas bolinhas quaisquer;
- em seguida deslocamos uma dessas bolinhas para o setor vizinho no sentido horário e, simultaneamente, deslocamos a outra bolinha para o setor vizinho no sentido anti-horário.



(a) Indique na figura a seguir como chegar ao tabuleiro final em três etapas.



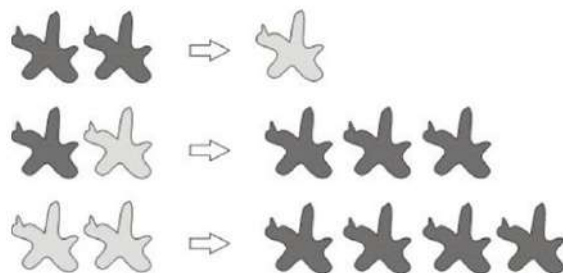
(b) Explique por que, partindo do tabuleiro inicial e após qualquer número de etapas, a quantidade total de bolinhas em todos os setores brancos é sempre ímpar.

(c) Explique por que é impossível, partindo do tabuleiro inicial, colocar todas as bolinhas em um mesmo setor.

Problema 14. Uma regra estranha em um clube permite que as crianças troquem apenas duas bolinhas por outras três, ou três bolinhas por outras duas. É possível começar com 100 bolinhas vermelhas e acabar com 100 bolinhas verdes, tendo trocado exatamente 1991 bolinhas no processo?

Problema 15. Em um quadro estão escritos os números $1, 2, \dots, 50$. A cada minuto, pode-se escolher dois números a e b que estão escritos no quadro, apagá-los e escrever $a + b - 1$ no lugar. Após algum tempo restará apenas um único número no quadro. Que número será esse? Prove o número é o mesmo, independente da escolha das operações realizadas.

Problema 16. (OBM) Quando duas amebas vermelhas se juntam, elas se transformam em uma única ameba azul; quando uma ameba vermelha se junta com uma ameba azul, as duas se transformam em três amebas vermelhas e quando duas amebas azuis se juntam, elas se transformam em quatro amebas vermelhas. Fernando observa um tubo de ensaio que contém inicialmente 19 amebas azuis e 95 amebas vermelhas.



(a) Ele observa que todas as amebas se juntam em pares, originando as amebas da geração seguinte. Esta geração tem no máximo quantas amebas?

(b) A partir da situação inicial, se em algum instante houver 100 amebas, quantas serão as azuis?

Problema 17. (OBMEP 2022) A calculadora de Joana possui duas teclas especiais:

- A tecla [A] acrescenta o algarismo 3 à direita do número que está no visor.
- A tecla [S] troca o número no visor pela soma de seus algarismos.



- (a) Partindo do número 99, se Joana apertar as teclas [A][S][A][S], nessa ordem, qual número aparecerá?
- (b) Mostre como Joana pode obter o número 2022 a partir do 99 usando apenas as teclas [A] e [S].
- (c) Explique por que Joana nunca vai obter o número 22 a partir do 99 usando apenas as teclas [A] e [S].

Problema 18. Escrevemos os números de 1 a 10 numa lousa. A cada passo, trocamos dois números da lousa a e b pelo número $\sqrt{a^2 + b^2}$. Qual é o número que ficará no final, independentemente das operações?

Problema 19. Temos os números 2048 e 1024, nesta ordem, numa lousa. A cada passo, se trocamos os dois números a e b da lousa por $\frac{3a+b}{4}$ e $\frac{a+3b}{4}$. É possível obter os números:

- (a) 1540 e 1532?
- (b) 1546 e 1526?

Problema 20. Inicialmente, temos os números $\frac{49}{1}, \frac{49}{2}, \dots, \frac{49}{97}$ em um quadro. Uma jogada consiste em substituir dois números a e b , por $2ab - a - b + 1$. Após uma série de jogadas, resta apenas um número no quadro. Que número será esse? Explique por que o número sempre será o mesmo, independente da escolha das operações realizadas.