# Equações e Sistemas

Neste material, nosso foco será equações e sistemas de equações — temas centrais não apenas na formação algébrica, mas também em grande parte dos problemas de matemática olímpica. As equações são expressões que traduzem relações quantitativas e lógicas entre grandezas; elas nos dizem o que se sabe, o que buscamos e como conectar essas duas esferas por meio de argumentos rigorosos. Quando variáveis distintas aparecem em conjunto, formando um sistema, somos chamados a analisar como múltiplas condições interagem simultaneamente, exigindo raciocínio refinado, estratégias criativas e visão global do problema.

Estudar equações e sistemas no contexto olímpico é mais do que aprender métodos de resolução: é desenvolver uma mentalidade flexível, aprender a interpretar a estrutura de um problema, construir estratégias eficazes e reconhecer padrões — competências que acompanham o estudante em competições e na própria jornada matemática. Ao longo deste material, exploraremos não só técnicas poderosas, mas também ideias que conectam essas técnicas ao pensamento lógico mais amplo, preparando você para enfrentar desafios cada vez mais complexos.

Ao longo deste material, o estudante encontrará questões selecionadas e elaboradas envolvendo:

- Equações do 1º grau, com ênfase em interpretação e construção de estratégias;
- Equações do 2º grau, explorando análise algébrica, fatorações e propriedades;
- Sistemas de Equações, incluindo abordagens algébricas e raciocínios não convencionais.

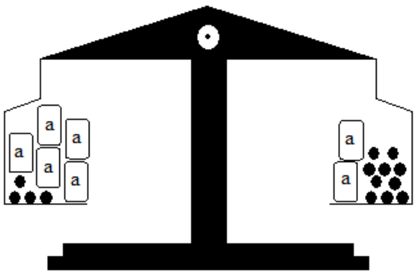
O objetivo não é apenas resolver equações, mas compreender sua estrutura, identificar padrões e desenvolver um pensamento matemático sólido e flexível — habilidades essenciais para o sucesso em competições e para a formação matemática de alto nível.

## Problemas Iniciais

**Problema 01. (OBM – Nível 1 – 1ª Fase)** João quer desfazer-se de sua coleção de 1.000 bolinhas. Para tanto escolhe dez garotos da rua onde mora. Dá ao primeiro garoto $x$ bolinhas, ao segundo $x + 1$ bolinhas. Assim faz até chegar ao décimo garoto. Sempre dá uma bolinha a mais para o próximo garoto. No final, João ainda fica com um resto de bolinhas. Sendo $x$ o número que deixa João com o menor resto possível, $x$ é igual a:
A) 94
B) 95
C) 96
D) 97
E) 98

**Problema 02. (OBM– Nível 1 – 1ª Fase)** No planeta Z todos os habitantes possuem 3 pernas e cada carro possui 5 rodas. Em uma pequena cidade desse planeta, existem ao todo 97 pernas e rodas. Então podemos afirmar:
A) É possível que existam 19 carros nessa cidade
B) Existem no máximo 16 carros nessa cidade
C) Essa cidade tem 9 habitantes e 14 carros
D) Essa cidade possui no máximo 17 carros
E) Nessa cidade existem mais carros do que pessoas

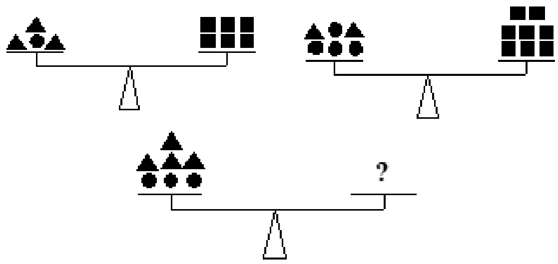
**Problema 03. (OBM – Nível 1 – 1ª Fase)** Na balança a seguir temos pesadas bolas de chumbo, todas iguais, e leves saquinhos de plástico, todos com a mesma quantidade de bolinhas, iguais às que estão fora dos mesmos. Quantas bolinhas há em cada saquinho?




A) 1
B) 2
C) 3
D) 5
E) 6

**Problema 04. (OBM – Nível 1 – 1ª Fase)** Um time de futebol ganhou 8 jogos mais do que perdeu e empatou 3 jogos menos do que ganhou, em 31 partidas jogadas. Quantas partidas o time venceu?
A) 11
B) 14
C) 15
D) 17
E) 23

**Problema 05. (OBM – Nível 1 – 1ª Fase)** Figuras com mesma forma representam objetos de mesma massa. Quantos quadrados são necessários para que a última balança fique em equilíbrio?




A) 7
B) 8
C) 9
D) 10
E) 12

# Problemas de Treinamento

**Problema 06. (OBM)** As letras O, B, M representam números inteiros. Se O × B × M = 240, O × B + M = 46 e O + B × M = 64, quanto vale O + B + M?

**Problema 07. (OBM)** Resolva, em números reais, o sistema

$$x + \frac{1}{y} = y + \frac{1}{z} = z + \frac{1}{x}$$

$xyz = 1.$

**Problema 08. (OBM)** Sejam *a*, *b* e *c* reais tais que $a \neq b$ e $a^2(b + c) = b^2(c + a) = 2010$.
Calcule $c^2(a + b)$.

**Problema 09. (OBM)** Considere os números reais $a$ e $b$ tais que $(a + b)(a + 1)(b + 1) = 2$ e $a^3 + b^3 = 1$.
Encontre o valor de $a + b$.

**Problema 10. (COLOMBIA)** Ache todas as raízes da equação: $x^2 - 4x + \dfrac{10}{x^2 - 4x + 5} = 2$.

**Problema 11. (CANADÁ)** Prove que o produto das soluções reais da equação $\left(x^2-7x+11\right)^{x^2-11x+30}=1$ é 720.

**Problema 12. (ARGENTINA)** Determine o número de soluções positivas de:

$$\left(x^2+10\cdot x+30\right)^2=11\cdot x^2+110\cdot x+300\,.$$

**Problema 13. (OCM)** Determine o valor de *p*, para que as raízes $x_1$ e $x_2$ da equação $2x^2-px-1=0$ satisfaçam $x_1^2+x_2^2=1$.

**Problema 14. (OBM)** Determine todas as soluções reais de : $x^2+x+1=\dfrac{156}{x^2+x}$.

**Problema 15. (OBM)** Sendo $a \neq b$ e $b \neq 0$, sabe-se que as raízes da equação $x^2+ax+b=0$ são exatamente $a$ e $b$. Então, $a-b$ é igual a:

**Problema 16. (EUA)** Determine o número de soluções inteiras da equação $2^{2x}-3^{2y}=55$

**Problema 17. (Croácia)** Encontre todas as soluções inteiras da equação

$$4x+y+4\sqrt{xy}-28\sqrt{x}-14\sqrt{y}+48=0$$

**Problema 18. (OCM)** Determine o número de raízes reais da equação:

$$(x^2+x+4)^2+8x(x^2+x+4)+15x^2=0\,.$$

**Problema 19. (OCM)** Determine a soma e o produto das raízes reais da equação:

$$x^2+18\cdot x+30=2\cdot\sqrt{x^2+18\cdot x+45}$$

**Problema 20. (MOLDÁVIA)** Seja $x \geq 127$ um real .Determine todas as soluções reais de:

$$\sqrt[7]{(x+127)^6}-8\cdot\sqrt[7]{(x-127)^6}=7\cdot\sqrt[7]{(x^2-127^2)^3}\,.$$

**Problema 21. (OBM)** Quantos pares ordenados (x, y) de números reais satisfazem a equação

$$(x-y^2)^2+(x-y-2)^2=0.$$

**Problema 22. (OBM)** Sejam a, b e c números reais não nulos tais que a + b + c = 0

Calcule os possíveis valores de $\dfrac{(a^3+b^3+c^3)^2(a^4+b^4+c^4)}{(a^5+b^5+c^5)^2}$.

# Sessão de Desafios

**Problema 23. (Lista Cone Sul)** Os números reais *a, b* e *c* são distintos dois a dois e tais que:

$$a + \frac{1}{b} = b + \frac{1}{c} = c + \frac{1}{a}$$

Encontre todos os valores de abc.

**Problema 24. (Testes Cone Sul)** Ache todos os pares (x,y) tais que:

$$\boldsymbol{x + y^2 = y^3}$$
$$\boldsymbol{y + x^2 = x^3}$$

**Problema 25. (URSS)** Encontre todas as soluções inteiras (x, y, z, t) do sistema

$$\begin{cases} xz - 2yt = 3 \\ xt + yz = 1 \end{cases}$$

**Problema 26. (LISTA CONESUL/LUSOFONIA)** Se *x, y, z* são números reais tais que $x \neq 1, y \neq 1, z \neq 1$ e:

$$\frac{yz - x^2}{1 - x} = \frac{xz - y^2}{1 - y}$$

Mostre que ambas as frações são iguais a x + y + z.

**Problema 27. (LISTA CONESUL/LUSOFONIA)** Determine todas as triplas (x, y, z) de números reais tais que:

$$xyz = 8$$
$$x^2y + y^2z + z^2x = 73$$
$$x(y - z)^2 + y(z - x)^2 + z(x - y)^2 = 98$$

**Problema 28. (LUSOFONIA)** Encontre todos os números reais a e b que satisfazem a relação:

$$2(a^2 + 1)(b^2 + 1) = (a + 1)(b + 1)(ab + 1).$$

**Problema 29. (LISTA CONESUL/LUSOFONIA)** Sejam a, b e c números reais tais que $a \neq b$ e

$$a^2(b + c) = b^2(a + c) = 2.$$

Determine o valor de $c^2(a + b)$.

**Problema 30. (Lista Cone Sul)** Seja *A* um inteiro não nulo. Encontre, em função de *A*, as soluções do sistema abaixo. Qual a condição é necessária e suficiente sobre *A* para que o sistema abaixo possua, pelo menos, uma solução inteira?

$$x + y^2 + z^3 = A$$
$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^3} = \frac{1}{A}$$
$$x \cdot y^2 \cdot z^3 = A^2$$