

XXIX Semana Olímpica - Vitória - ES

Geometria - Nível 1

Prof. Gabriel Oliveira

28 de janeiro de 2026

Geometria Plana - Relações métricas

Algumas relações e problemas legais

Teorema Fundamental da Bissetriz

Seja $\angle ABC$ um ângulo dado e P um ponto em seu interior. Então, a distância de P a AB é igual à distância de P a BC se, e somente se, o ponto P pertence à bissetriz.

O Incentro do Triângulo

As três bissetrizes internas de um triângulo se intersectam em um único ponto, chamado **incentro**, que é equidistante dos lados do triângulo.

As três bissetrizes internas de um triângulo ABC se intersectam em um ponto I , chamado incentro, que é o centro da circunferência inscrita no triângulo.

Comprimentos dos Segmentos Tangentes

Seja ABC um triângulo com $BC = a$, $CA = b$ e $AB = c$. Sejam M_1 , N_1 e P_1 os pontos de tangência da circunferência inscrita com os lados BC , CA e AB , respectivamente. Então:

$$AN_1 = AP_1 = p - a, \quad BM_1 = BP_1 = p - b, \quad CM_1 = CN_1 = p - c,$$

onde

$$p = \frac{a + b + c}{2}.$$

Teorema da Bissetriz Interna

[Bissetriz Interna] A bissetriz interna AL do ângulo $\angle A$ de um triângulo ABC divide o lado oposto BC na razão

$$\frac{BL}{LC} = \frac{AB}{AC}.$$

Área do Triângulo e o Raio da Incircunferência

Sejam a , b e c os lados do triângulo ABC e r o raio da circunferência inscrita. Então:

$$[ABC] = p \cdot r, \quad \text{onde } p = \frac{a + b + c}{2}.$$

Ceva, Menelaus e Stewart

[Ceva] Seja ABC um triângulo e sejam pontos

$$D \in BC, \quad E \in CA, \quad F \in AB.$$

As cevianas AD , BE e CF são concorrentes se, e somente se,

$$\frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} \cdot \frac{AF}{FB} = 1.$$

Este teorema fornece uma condição necessária e suficiente para a concorrência de três cevianas.

Forma orientada

Quando os pontos D, E, F pertencem aos prolongamentos dos lados do triângulo, vale a forma orientada:

$$\frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} \cdot \frac{AF}{FB} = -1.$$

A forma orientada é essencial em problemas olímpicos envolvendo prolongamentos de lados.

Ceva trigonométrico

[Ceva Trigonométrico] As cevianas AD , BE e CF são concorrentes se, e somente se,

$$\frac{\sin \angle BAD}{\sin \angle DAC} \cdot \frac{\sin \angle CBE}{\sin \angle EBA} \cdot \frac{\sin \angle ACF}{\sin \angle FCB} = 1.$$

Esta versão é particularmente útil quando o problema envolve apenas ângulos.

Teorema de Menelaus

[Menelaus] Seja ABC um triângulo e seja uma reta que intersecta os lados (ou seus prolongamentos) em

$$D \in BC, \quad E \in CA, \quad F \in AB.$$

Os pontos D , E e F são colineares se, e somente se,

$$\frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} \cdot \frac{AF}{FB} = -1.$$

O Teorema de Menelaus é o dual do Teorema de Ceva:

- Ceva trata de **concorrência**;
- Menelaus trata de **colinearidade**.

O uso correto dos sinais é crucial, especialmente quando a reta intersecta prolongamentos.

Relação de Stewart

[Relação de Stewart] No triângulo ABC , seja $D \in BC$ tal que

$$BD = m, \quad DC = n, \quad BC = a = m + n.$$

Se $AD = d$, então vale a relação

$$b^2m + c^2n = a(d^2 + mn),$$

onde $b = CA$ e $c = AB$.

Forma equivalente

$$d^2 = \frac{b^2m + c^2n}{a} - mn.$$

A Relação de Stewart é uma ferramenta poderosa para o cálculo de comprimentos de cevianas.

Problemas

[OBM] O triângulo ABC é retângulo em B . Seja I o incentro e O o ponto médio de AC . Se $\angle AOI = 45^\circ$, determine $\angle ACB$.

Seja ABC um triângulo com $BC = a$, $CA = b$ e $AB = c$. Se AM é a bissetriz relativa ao ângulo $\angle A$, demonstre que:

$$BM = \frac{a \cdot c}{b + c}.$$

Seja ABC um triângulo acutângulo e I seu incentro. As bissetrizes internas interceptam os lados BC , CA e AB nos pontos D , E e F , respectivamente. Prove que

$$ID^2 + IE^2 + IF^2 \geq r^2,$$

onde r é o raio da circunferência inscrita.

Seja ABC um triângulo com $BC = a$, $CA = b$ e $AB = c$. Se AM é a bissetriz relativa ao ângulo $\angle A$. Seja I o incentro do triângulo ABC . Demonstre que a relação é válida

$$\frac{AI}{IM} = \frac{b + c}{a}.$$

No triângulo ABC , o incentro I satisfaz

$$\angle BIC = 120^\circ.$$

Determine os possíveis valores dos ângulos internos do triângulo ABC .

(Teste Cone Sul) Sejam ABC um triângulo tal e P um ponto que sobre a mediana do lado BC , Sejam também D a interseção de AC e BP e E a interseção de AB e CP . Se os inraios dos triângulos BEP e CDP são iguais, prove que $AB = AC$, No triângulo ABC , seja I o incentro e O o circuncentro. Suponha que

$$\angle AOI = 90^\circ.$$

Determine a natureza do triângulo ABC .

No triângulo ABC , sejam $D \in BC$, $E \in CA$ e $F \in AB$ tais que

$$\frac{BD}{DC} = 2, \quad \frac{CE}{EA} = 3.$$

Determine a razão $\frac{AF}{FB}$ para que as cevianas AD , BE e CF sejam concorrentes.
 No triângulo ABC , as cevianas AD , BE e CF satisfazem

$$\angle BAD = 30^\circ, \quad \angle DAC = 60^\circ,$$

$$\angle CBE = 45^\circ, \quad \angle EBA = 45^\circ.$$

Determine os ângulos $\angle ACF$ e $\angle FCB$ para que as três cevianas sejam concorrentes.

Uma reta corta os lados AB , BC e CA do triângulo ABC (ou seus prolongamentos) nos pontos F , D e E , respectivamente. Sabendo que

$$\frac{AF}{FB} = 2, \quad \frac{BD}{DC} = \frac{1}{3},$$

determine a razão $\frac{CE}{EA}$. No triângulo ABC , seja M o ponto médio de BC . Sabendo que

$$AB = 5, \quad AC = 7, \quad BC = 6,$$

determine o comprimento da mediana AM . No triângulo ABC , a bissetriz interna AD encontra BC em D . Sabendo que

$$AB = 6, \quad AC = 4, \quad BC = 8,$$

determine o comprimento da bissetriz AD .

Referências

- [1] A. Engel, *Problem-Solving Strategies*, Springer, 1998.
- [2] H. S. M. Coxeter, S. L. Greitzer, *Geometry Revisited*, Mathematical Association of America, 1967.
- [3] V. Prasolov, *Problems in Geometry*, Mir Publishers, 1986.
- [4] L. Bartholdi, *Ceva, Menelaus and Mass Points*, IMO Training Handouts.
- [5] C. Thiago, *Geometria — Polos Olímpicos de Treinamento*, Material interno POTI, OBM.
- [6] IMO Compendium, *Geometric Inequalities and Theorems*, IMO Shortlist.
- [7] Bruno Holanda, Carlos Augusto, Samuel Barbosa Yuri Lima, *Treinamento Cone Sul 2007*.