

Indução finita

Vitória Aparecida Santos Ferreira - vitoriaaparecida94@gmail.com

29a Semana Olímpica - Janeiro 2026 - Nível 1

1 Definições iniciais [4]

A indução matemática é uma ferramenta muito usada na demonstração de propriedades que envolvam os números inteiros.

Formalmente, o princípio indutivo afirma que

Seja $P(n)$ uma propriedade dos inteiros. Se

(Caso base) $P(n)$ é verdadeira para o primeiro inteiro de interesse a (como $a = 1$) e se

(Hipótese de indução e passo indutivo) $P(k)$ verdadeira implica $P(k + 1)$ verdadeira,

(Conclusão) então $P(n)$ se verifica para qualquer inteiro $n \geq a$.

Pode ocorrer que o conjunto de inteiros de interesse possua uma dependência de mais de um termo anterior. Se isso ocorrer, utiliza-se outra formulação do princípio indutivo, chamada de *indução forte*, onde a hipótese de indução (HI) supõe que

(HI) $P(n)$ se concretiza para todo $k = 2, 3, \dots, k$.

Em seguida, mostra-se, no passo indutivo, que $P(k + 1)$ é verdadeira e se termina.

1.1 Analogia

A indução matemática se parece com um dominó enfileirado, cujas peças são os números inteiros. O caso base equivaleria a empurrar a primeira; a hipótese de indução seria supor empurrada a k -ésima peça (ou, na indução forte, todas as anteriores até a k -ésima); o passo indutivo seria a garantia de que, feito isso, a $(k+1)$ -ésima peça cairia.



Passo indutivo demonstrado.



Passo indutivo não demonstrado.

OBS: o princípio de indução pode querer ser demonstrado para um subconjunto dos números naturais, como, por exemplo, dos números pares. Com isso, o caso base se iniciaria em $a = 2$; o passo indutivo teria como hipótese de indução a suposição da validade para certo k (ou para os pares menores ou iguais a k) e se mostraria para $k + 2$.

OBS: exemplos sucessivos não demonstram a validade de uma afirmação. Considere, por exemplo, $n^2 + n + 41$, com n natural. Todos os números gerados desta forma são primos? Não, mas muitas substituições de n produzem respostas positivas.

1.2 Exemplos na Teoria dos números

1. Mostre que a soma de três cubos consecutivos é múltiplo de 9.

Solução:

(Caso base) $1^3 + 2^3 + 3^3 = 1 + 8 + 27 = 36 = 4 \cdot 9$.

(Hipótese de indução) Admita que $k^3 + (k + 1)^3 + (k + 2)^3$ seja múltiplo de 9.

(Passo indutivo) Considere, agora, a soma $(k + 1)^3 + (k + 2)^3 + (k + 3)^3$. Pode-se escrever que

$$\begin{aligned}(k + 1)^3 + (k + 2)^3 + (k + 3)^3 &= (k + 1)^3 + (k + 2)^3 + [(k + 1) + 2]^3 = \\ &= \underbrace{(k + 1)^3 + (k + 2)^3 + [k^3 + 3 \cdot k^2 \cdot 3 + 3 \cdot k \cdot 3^2 + 3^3]}_{\text{uso da HI.}} = 9q + 9(k^2 + 3k + 3),\end{aligned}$$

que é um múltiplo de 9.

Pelo princípio indutivo, está provado o resultado.

2. Prove, por indução matemática, que todo inteiro maior do que 1 é primo ou o produto de primos. Este é o *teorema fundamental da Aritmética*.

Solução:

(Caso base) Como o primeiro inteiro de interesse é 2 e este é primo, então o caso base está feito.

(Hipótese de indução) Suponha que a propriedade do enunciado seja verdadeira para qualquer inteiro $2, 3, \dots, k$.

(Passo indutivo) Considere, agora, o próximo inteiro, $k + 1$. Pode ocorrer que

(i) $k + 1$ é primo. Se for esta a realidade, então o passo indutivo está mostrado.

ou

(ii) $k + 1$ não é primo. Desse modo, $k + 1$ pode ser escrito como o produto de dois números diferentes de 1, $k + 1 = dq$. Como ambos são menores que $k + 1$, então, pela hipótese de indução, d, q são produtos de primos ou eles próprios primos. Portanto, $k + 1$ é o produto de primos e está terminado o passo indutivo.

Tendo sido cumpridas as etapas do caso base e do passo indutivo usando a hipótese de indução, a propriedade "ser primo ou produto de primos" se aplica a qualquer inteiro maior ou igual a 2.

1.3 Exemplos na Análise combinatória [2]

1. Se há n gaiolas e m pombos, $m > n$, então pelo menos dois pombos estão na mesma gaiola. Este é o *princípio da casa dos pombos ou princípio das gavetas de Dirichlet*.

Solução: Provemos esta afirmação por indução no número de gaiolas.

(Caso base) Se há apenas uma gaiola e $n > 1$ pombos, então todos os n ocuparão a mesma gaiola e segue o resultado.

(Hipótese de indução) Suponha verdadeiro para n gaiolas.

(Passo indutivo) Dadas $n + 1$ gaiolas e $m > n + 1$ pombos, considere a alocação de todos eles. Fixada determinada gaiola, se esta contiver nenhum pombo, então

todos os m estarão em n gaiolas e $m > n + 1 > n$. Pela hipótese de indução, haverá alguma dessas com pelo menos dois pombos e está demonstrado o enunciado.

Se a gaiola fixada contiver exatamente um pombo, ocorre que as demais n possuem $m - 1$ pombos, onde $m > n + 1 \Rightarrow m - 1 > n$. Portanto, pela hipótese de indução, serão no mínimo dois pombos em alguma das gaiolas.

Pelo princípio de indução, está mostrado.

Este resultado, que parece trivial, produz provas poderosas.

1.4 Exemplos na Geometria [1]

1. Em quantas regiões n retas dividem um plano se duas delas nunca são paralelas e três delas nunca se encontram no mesmo ponto?

Solução: Em alguns problemas, precisamos formular uma *conjectura*, isto é, um palpite que exiba a resposta generalizada para qualquer inteiro. Para embasar o palpite, pode-se calcular casos particulares, ou seja, atribuir valores para n .

- Se $n = 1$: uma reta divide o plano em exatamente 2 regiões.

- Se $n = 2$: duas retas não paralelas dividem o plano em exatamente 4 regiões.

- Se $n = 3$: se as três retas não são duas a duas paralelas e não se cruzam em um mesmo ponto, então há 7 regiões formadas.

Observa-se que

(*) Ao adicionar a n -ésima reta, o número de regiões aumentou em n unidades.

Estes exemplos quando $n = 2, 3$ garantem apenas intuição, mas não provam a questão. Para isso, usemos a indução, tentando mostrar, no passo indutivo, que, indo da divisão do plano em n retas para $n + 1$ retas, ocorre a formação de exatamente mais $n + 1$ regiões.

(Passo indutivo) A $(n + 1)$ -ésima reta intersecta as outras n em n pontos diferentes. Isso faz com que tal reta adicionada seja repartida em $n + 1$ segmentos. Assim, $n + 1$ regiões anteriores são duplicadas, gerando outras $n + 1$ regiões (são caracterizadas por estarem "acima" ou "abaixo" da reta nova).

Isto demonstra (*).

Com este procedimento, pode-se escrever que o número de regiões delimitadas por n retas, denotado por $P(n)$, é $P(n - 1) + n$. Como

$$P(1) = 2, P(2) = 4 = P(1) + 2, P(3) = P(2) + 3, \dots$$

então $P(n) = 2 + 2 + 3 + 4 + \dots + n = 1 + (1 + 2 + 3 + \dots + n)$.

2. Diversas retas dividem o plano. Prove que é possível colorir as regiões com duas cores de modo que regiões adjacentes tenham cores diferentes.

Solução: Neste problema, não está explícito qual a variável inteira sobre a qual aplicar a indução. Pode-se considerar esta como o número, denotado por n , de retas que cortam o plano. Realizemos indução em n para provar a afirmação.

(Caso base) Se $n = 1$, então são delimitadas duas regiões. Pinte-as uma de cada cor.

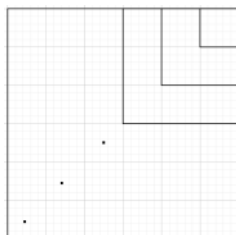
(Hipótese de indução) Assuma que, com k retas, seja viável a coloração.

(Passo indutivo) Examinemos a divisão do plano com $k + 1$ retas. Removendo a $(k + 1)$ -ésima reta, pela hipótese de indução, pode-se colorir as regiões originadas. Retornando com a reta retirada, pode-se inverter as cores de cada região - todas já estão pintadas - de apenas um dos lados dela. Com isso, a figura final terá regiões adjacentes de coloração distinta.

2 Exercícios [3]

1. Prove que a soma dos n primeiros naturais ímpares é n^2 .

Nota: Para se convencer disso, a imagem abaixo pode ajudar.



2. Mostre que, para quaisquer naturais a, b, n , $a^n - b^n$ é divisível por $a - b$, se $a \neq b$.
3. Prove que o número de diagonais em um polígono convexo de n lados é $\frac{n(n-3)}{2}$.
Nota: uma diagonal é um segmento que une dois vértices não consecutivos.
4. Prove que um tabuleiro $2^n \times 2^n$ com um quadradinho faltando pode ser coberto por trininós sem sobreposição.
5. Em cada planeta de um sistema planetário com um número ímpar de planetas, há um astrônomo observando o planeta mais próximo do qual se encontra. Se as distâncias entre cada dois planetas são todas distintas, prove que há pelo menos um planeta que não é observado.
6. Prove que qualquer compra de n reais pode ser paga usando apenas notas de R\$3,00 e R\$5,00, se n é inteiro maior que 7.
7. (Olimpíada chinesa de Matemática - 1979) São dadas caixas com 2^n bolas distribuídas. A cada vez, uma pessoa seleciona duas caixas, uma contendo p e outra contendo q bolas, com $p \geq q$. Então, remove q da primeira e coloca na segunda. Prove que, executando este procedimento, pode-se ter todas as bolas em uma mesma caixa.
8. (Torneio das cidades - 2000) Cada quadradinho de um tabuleiro $n \times n$ possui um número diferente. Primeiro, o menor número de cada linha é circulado e verifica-se que todos os n estão em colunas distintas. Depois, faz-se o mesmo para cada coluna e se observa que as marcações estão em linhas distintas. Prove que nos dois procedimentos o conjunto demarcado foi igual.
9. (OBM - 2015 - 3º fase - Nível 2 - adaptada) Prove que existe um número que pode ser representado de pelo menos 2023 formas diferentes como soma de quadrados de naturais não nulos, não necessariamente distintos.

Nota: alterar a ordem das parcelas não produz nova representação.