

INÍCIO DE CONSTRUÇÕES GEOMÉTRICAS

Jeferson Almir

1 Introdução

O que você vai precisar:

Congruência

O que significa 2 triângulos congruentes?

- Todos os lados correspondentes iguais
- Todos os ângulos correspondentes iguais
- As alturas correspondentes têm o mesmo comprimento
- As bissetrizes correspondentes têm o mesmo comprimento
- As medianas correspondentes têm o mesmo comprimento
- Mediatrizes, Isogonais

Preciso conferir tudo?

Que condições mínimas precisamos para garantir que 2 triângulos são congruentes?

Preciso conferir tudo? Não! Basta verificar **um critério de congruência**, por exemplo:

- *LLL*: os três lados correspondentes são iguais;
- *LAL*: dois lados e o ângulo **entre eles** são iguais;
- *ALA*: um lado e os dois ângulos adjacentes a esse lado são iguais;
- *LAA_o*: dois ângulos e um lado correspondente são iguais (o terceiro ângulo vem “de brinde”);
- **(em triângulos retângulos) HC**: hipotenusa e um cateto correspondentes são iguais.

Semelhança de Triângulos

Se dois triângulos são semelhantes, ou seja, $ABC \sim DEF$:



$$\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF} = \frac{BC}{EF} = K$$

Quais as condições para que dois triângulos sejam semelhantes?

Casos Clássicos de Semelhança de Triângulos

Caso 1:

Se dois triângulos têm congruentes dois a dois os três ângulos internos, então esses dois triângulos são semelhantes.



$$\angle A = \angle A', \angle B = \angle B' \text{ e } \angle C = \angle C'$$

Caso 2:

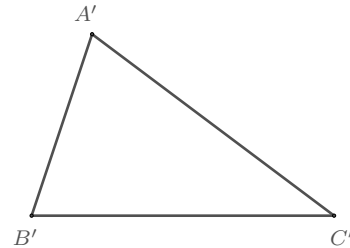
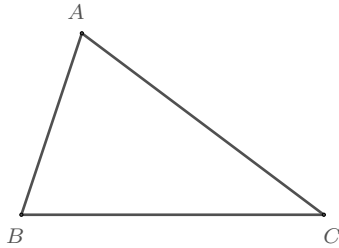
Se dois triângulos têm dois pares de lados proporcionais e os ângulos compreendidos entre eles congruentes, então esses dois triângulos são semelhantes.



$$\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}} \quad \text{e} \quad \angle A = \angle A'$$

Caso 3:

Se dois triângulos têm os três lados correspondentes proporcionais, então esses triângulos são semelhantes.



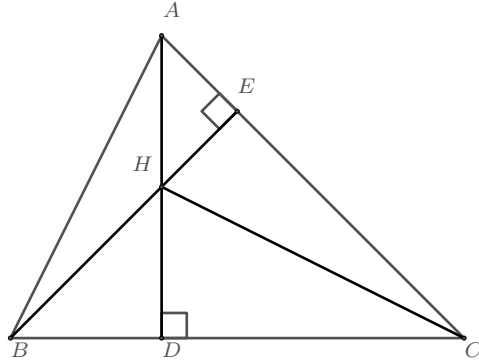
$$\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}}$$

Observação: A razão entre as áreas de dois triângulos semelhantes (na razão k) é igual a k^2 .

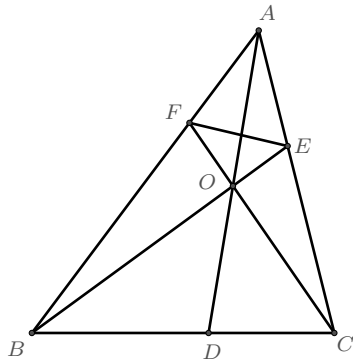
2 Problemas

1. [Mathcounts State Target] Dado um triângulo ABC equilátero e retas $\overline{BC}$ e $\overline{BA}$, os pontos D e E estão na reta BC e BA , respectivamente, tal que $BD = AE$. Mostre $CE = DE$.
2. [Mathcounts State Target] Em $\triangle ABC$, tem-se $AB = AC$ e os pontos D e E estão no segmento $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$, respectivamente, de tal modo que $BD = CE$. O segmento DE intercepta BC em F . Prove que $DF = FE$.
3. [Mathcounts State Sprint - 2014] $ABCD$ é um trapézio reto de bases $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ tal que $AD \perp BA$. E é o ponto médio de BC . Prove que $AE = DE$.
4. 🐾Seja ABC um triângulo isósceles, com $\overline{AB} = \overline{BC}$ e $\angle ABC = 82^\circ$. Seja M um ponto no interior do triângulo tal que $\overline{AM} = \overline{AB}$ e $\angle MAC = 11^\circ$. Ache a medida do ângulo $\angle MCB$.
5. 🐾Seja um $\triangle ABC$ tal que $\overline{AB} = \overline{AC}$ e $\angle BAC = 100^\circ$. Seja D um ponto sobre o lado $\overline{AC}$ ($\overline{AD} > \overline{DC}$) de maneira que $\overline{AD} = \overline{BC}$; determine $\angle CBD$, sabendo que $\angle CBD < 40^\circ$.
6. Dado o ABC seja $\overline{AD}$ a mediana relativa ao lado $\overline{BC}$ e $\angle CDA = 45^\circ$ e $\angle ABC = 30^\circ$. Determine a medida do ângulo α .
7. Em $\triangle ABC$, $\angle ACB = 60^\circ$ e $\angle BAC =$

75° . $AD \perp BC$ em D e $BE \perp AC$ em E . As retas AD e BE intersectam-se em H . Encontre $\angle CHD$.

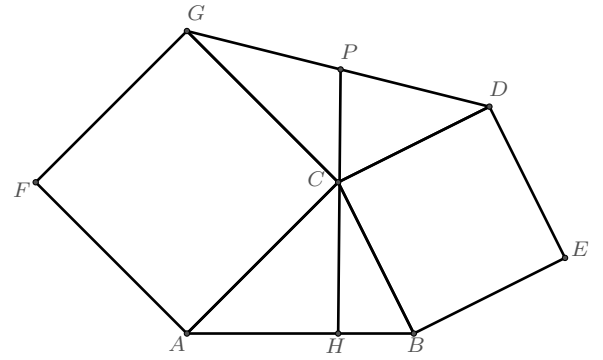


8. No $\triangle ABC$, D é o ponto médio de BC e O está no segmento AD . A extensão de BO e CO intersecta AC e AB nos pontos E e F , respectivamente. Prove que $FE \parallel BC$.

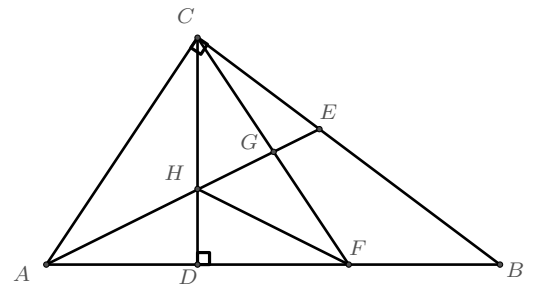


9. Dado um $\triangle ABC$, $AB = AC$ e $\angle BAC = 90^\circ$. M é o ponto médio do segmento AC . D está no segmento BC tal que $AD \perp BM$. Prove que $\angle ADB = \angle MDC$.

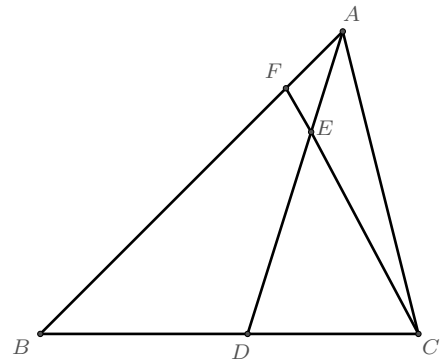
10. Os quadrados $ACGF$ e $BCDE$ estão na aresta AC e BC do $\triangle ABC$, respectivamente. CH é a altura da base AB e intersecta o segmento DG no ponto P . Prove que $DP = GP$.



11. CD é a altura de $\triangle ABC$ na aresta AB . AE é o ângulo bisector de $\angle CAB$ e intersecta a aresta BC no ponto E e CF é o ângulo bisector de $\angle BCD$ e intersecta a aresta DB no ponto F . Mostre que $HF \parallel BC$.

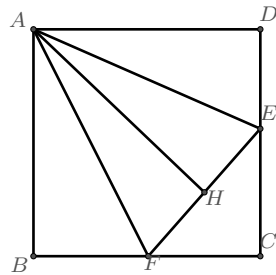


12. AD é a mediana de $\triangle ABC$ com D na aresta BC . E está em AD tal que $AE : AD = 1 : 3$. A linha CE intersecta a aresta AB no ponto F . Se o comprimento de F é 1.2 polegadas, encontre o comprimento do segmento AB .



13. No quadrado $ABCD$, os pontos E e F estão nos lados CD e CB , respectiva-

mente. O ângulo $\angle EAF = 45^\circ$. Se o ponto H está em EF e $AH \perp ED$, prove que $AH = AB$.



14. No triângulo ABC , tem-se $AC = BC$ e $\angle A = 90^\circ$. O ponto D pertence a AC e E está no prolongamento de BD tal que $CE \perp BE$. Se $BD = 2CE$, prove que BD é a bissetriz do ângulo $\angle ABC$.

Referências

1. MATHEMATICAL ASSOCIATION OF AMERICA (MAA). *American Mathematics Competitions (AMC)*. Disponível em: <https://www.maa.org/math-competitions>. Acesso em: 27 jan. 2026.
2. MATHEMATICAL ASSOCIATION OF AMERICA (MAA). *AMC 10/12: problemas e soluções oficiais (arquivos por ano)*. Disponível em: https://artofproblemsolving.com/wiki/index.php/AMC_Problems_and_Solutions. Acesso em: 27 jan. 2026.
3. MATHEMATICAL ASSOCIATION OF AMERICA (MAA). *AMC 8: problemas e soluções oficiais (arquivos por ano)*. Disponível em: https://artofproblemsolving.com/wiki/index.php/AMC_8_Problems_and_Solutions. Acesso em: 27 jan. 2026.