Prof. Fidelis Zanetti de Castro
Instituto Federal do Espírito Santo, *Campus* Serra

Introdução à Combinatória Geométrica

Explorando Cores, Formas e Grafos

1. Introdução

Sejam muito bem-vindos, olímpicos do nível 1!

A presença de vocês na **29ª Semana Olímpica da OBM** não é apenas uma conquista; é a prova de que vocês já dominam uma boa Matemática. No entanto, hoje fazemos um **convite à excelência**: convidamos vocês a darem um passo além e utilizarem a ferramenta mais poderosa de um matemático: a **imaginação criativa**.

Neste encontro, daremos nossos primeiros passos no fascinante mundo da **Combinatória Geométrica**. Esta é a matemática da estrutura, da organização e da lógica visual. Diferente da geometria clássica, focada puramente em medidas, aqui as perguntas são sobre *possibilidade* e *configuração*. É um campo onde a arte de perguntar "e se?" é tão vital quanto a arte de resolver.

Teoria em Pitadas

Este material foi desenhado como uma **introdução inicial e panorâmica** a temas que fundamentam o raciocínio olímpico moderno. Nossa proposta não é esgotar esses assuntos - que são vastos e profundos -, mas sim apresentar **técnicas essenciais e problemas clássicos em "pitadas" certeiras**. Queremos que vocês sintam o sabor de cada ferramenta, desenvolvendo a intuição necessária para identificar padrões onde outros veem apenas o "caos". Cada problema que vocês enfrentarem, cada conceito que dominarem, não é uma nova forma de ver o mundo e de resolver desafios, não só na Matemática, mas em qualquer área da vida.

Para desenvolver essa visão estratégica, trabalharemos com três pilares em doses fundamentais:

1. **Colorações e Invariantes:**
   Uma introdução à arte de pintar figuras para revelar propriedades ocultas. Veremos como transformar problemas de "encaixe" em argumentos lógicos de paridade e impossibilidade. A simplicidade de uma cor pode desvendar complexidades surpreendentes!

2. **O Princípio da Casa dos Pombos Geométrico:**
   Aprenderemos a "geometrizar" o Princípio de Dirichlet, criando partições inteligentes para garantir a existência de padrões e fatos métricos inevitáveis, mesmo em distribuições aleatórias. É a ferramenta que nos permite afirmar com certeza algo em meio à incerteza aparente.

3. **INtrodução a Grafos e Reticulados:**
   Mergulharemos na linguagem das conexões e dos pontos discretos. Apresentaremos de forma leve a poderosa **Fórmula de Euler** e o elegante **Teorema de Pick**.

   A **Fórmula de Euler** para poliedros e grafos planares ($V - A + F = 2$) é uma relação fundamental que conecta o número de *vértices* (V), *arestas* (A) e *faces* (F) de uma figura. Ela mostra que, independentemente da complexidade de um poliedro sem buracos ou de um grafo planar, essa característica topológica permanece constante.

   O **Teorema de Pick** é uma joia da geometria de reticulados, permitindo-nos calcular a área de um polígono cujos vértices estão sobre pontos de uma grade quadriculada. A área (A) é dada por $A = I + \frac{B}{2} - 1$, onde I é o número de pontos internos ao polígono e B é o número de pontos da grade que estão sobre a fronteira do polígono. Uma fórmula surpreendente que liga a geometria contínua (área) à contagem discreta de pontos!

A Jornada Continua

Lembrem-se: o que veremos aqui é apenas a ponta do iceberg - um mapa inicial para orientar seus estudos. Este nível tem como objetivo despertar sua curiosidade e fornecer as primeiras chaves mestras do raciocínio combinatório. Cada hora dedicada ao estudo, cada problema que vocês insistem em resolver, está pavimentando o caminho para um futuro de maiores conquistas.

A profundidade total de cada um desses temas será explorada por vocês ao longo de sua trajetória olímpica. Vocês terão a oportunidade de se tornarem especialistas em cada um desses pilares através dos materiais da **Biblioteca do Medalhista**, das nossas **Aulas Olímpicas** e dos desafios que os aguardam nos **próximos níveis** da sua caminhada rumo à excelência.

2. Problemas Resolvidos

✎ Prob 1: O Tabuleiro 10×10 e os Tetraminós-T

Enunciado: Um *tetraminó-T* é uma peça formada por 4 quadrados arranjados na forma da letra "T". Considere um tabuleiro 10×10. É possível cobrir perfeitamente este tabuleiro utilizando exatamente 25 dessas peças, sem que haja sobreposição ou cortes?

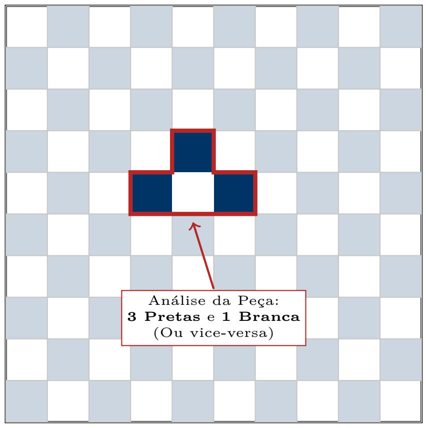
Solução: A resposta é **não**. Utilizaremos uma prova por contradição baseada em um **invariante de coloração**.
Considere o tabuleiro colorido no padrão de xadrez (preto e branco). O tabuleiro 10×10 possui 50 casas pretas e 50 brancas.
Observe a geometria da peça: o tetraminó-T consiste em um quadrado central conectado a três vizinhos. Em um tabuleiro de xadrez, casas vizinhas têm cores opostas. Portanto, qualquer tetraminó-T cobrirá necessariamente uma quantidade ímpar de cada cor:

- **Tipo A:** 3 casas pretas e 1 branca.
- **Tipo B:** 1 casa preta e 3 brancas.

Suponha que exista uma cobertura com 25 peças. Seja k o número de peças do Tipo A. Então, $(25 - k)$ peças serão do Tipo B. Somando as casas pretas cobertas:

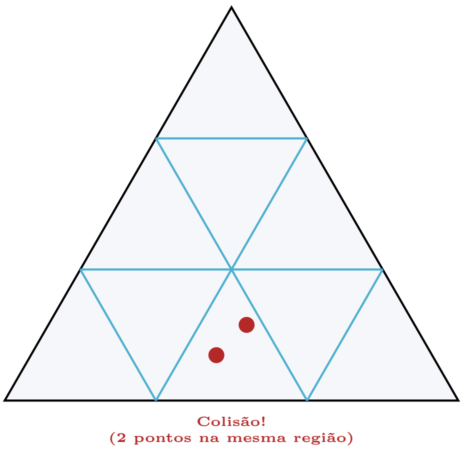
$$3(k) + 1(25 - k) = 50 \implies 2k = 25$$

Como k (número de peças) deve ser inteiro, chegamos a um **absurdo**. Logo, a cobertura é impossível. ■



✎ Prob 2: 10 Pontos no Triângulo

Enunciado: Sejam selecionados 10 pontos quaisquer no interior de um triângulo equilátero de lado 1. Demonstre que é sempre possível encontrar dois pontos cuja distância entre eles seja menor ou igual a $1/3$.



Demonstração: Para provar essa afirmação, utilizaremos o Princípio da Casa dos Pombos associado a uma divisão geométrica estratégica.
Divida cada lado do triângulo original em 3 segmentos congruentes de comprimento $1/3$. Traçando paralelas particionamos o triângulo maior em **9 triângulos equiláteros menores**, todos de lado $1/3$.

- **Pombos:** 10 pontos distribuídos na figura.
- **Casas:** 9 pequenos triângulos (regiões).

Pelo PCP, como $10 > 9$, pelo menos uma região contém dois pontos. Geometricamente, a maior distância possível dentro de um triângulo equilátero de lado L é L. Logo, a distância é $\leq 1/3$. ■

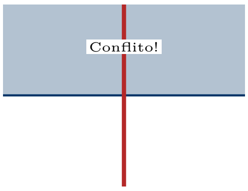
✎ Prob 3: O Mapa de Duas Cores (Indução)

Enunciado: Considere n retas no plano em posição geral. Prove que as regiões delimitadas por essas retas podem ser coloridas com duas cores de modo que regiões vizinhas tenham cores distintas.

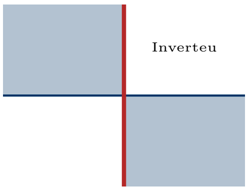
Demonstração: Indução sobre n. **Base** ($n = 1$)**:** Uma reta divide o plano em dois semiplanos (Preto/Branco). OK.
Passo Indutivo: Suponha válido para n retas. Ao adicionar a $(n+1)$-ésima reta:

1. As cores existentes de um lado da nova reta (Esq) são mantidas.
2. As cores do outro lado (Dir) são **invertidas**.

Regiões adjacentes que não tocam a nova reta continuam válidas. Regiões separadas pela nova reta (antes unidas) tinham a mesma cor, mas agora uma inverteu, tornando-se diferentes. ∎



1. Cores Iguais



2. Direita Invertida

✎ Prob 4: O Polígono da Tempestade (Pick)

Enunciado: Calcular a área de polígonos não-convexos por decomposição é trabalhoso. Use o Teorema de Pick para dominar a forma "Tempestade" abaixo.

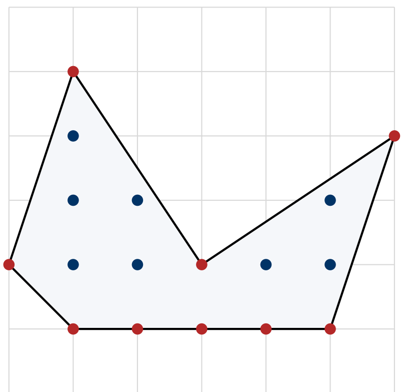
Solução: Em vez de cortar a figura em vários pedaços, aplicamos o **Teorema de Pick** ($S = I + \frac{B}{2} - 1$) focando apenas nos pontos discretos:

- **Borda** ($B = 9$)**:** Contamos os 6 vértices mais os 3 pontos na base reta. Nos segmentos inclinados, não há pontos intermediários (MDC = 1).
- **Internos** ($I = 8$)**:** Contando os pontos azuis estritamente dentro da figura (linhas $y = 2, 3, 4$).

Cálculo:

$$S = 8 + \frac{9}{2} - 1 = 8 + 4,5 - 1 = \mathbf{11,5}$$

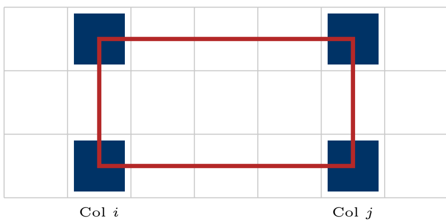
A área é de 11,5 unidades quadradas. Rápido e preciso! ∎


I=8, B=9 ⇒ Área = 11,5

✎ Prob 5: Retângulo Monocromático

Enunciado: Cada casa de um grid 3×7 é pintada de Azul ou Branco. Prove que é impossível evitar a formação de um retângulo cujos quatro vértices tenham a mesma cor.

Demonstração por PCP Duplo: Etapa 1: O Par Vertical. Uma coluna tem 3 casas e apenas 2 cores. Pelo PCP, em toda coluna, pelo menos duas casas têm a mesma cor. Existem apenas 3 tipos de pares possíveis nas posições: $\{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}$.
Etapa 2: Colisão de Colunas. Um "tipo" de coluna é definido pela posição do seu par monocromático e a cor dele. Total de tipos = 3 (posições) × 2 (cores) = **6**.
Como o grid tem **7 colunas**, o PCP garante que duas colunas diferentes possuem o **mesmo par** na **mesma cor**. A união desses dois pares forma o retângulo. ∎



Colisão de Colunas
($7 > 6 \longrightarrow$ Retângulo)

✎ Prob 6: O Lema do Aperto de Mão

Enunciado: Em uma festa com n pessoas, prove que o número de pessoas que apertaram a mão de um número **ímpar** de outros convidados é sempre par.

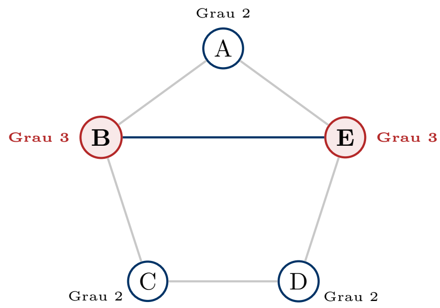
Solução por Teoria dos Grafos: Modelamos as pessoas como **vértices** e os apertos de mão como **arestas**.
O grau de um vértice, $d(v)$, é o número de apertos de mão. Queremos provar que a quantidade de vértices com grau ímpar é par.
Pelo **Lema do Aperto de Mão**, a soma dos graus de todos os vértices é o dobro do número de arestas (E):

$$\sum d(v) = 2E$$

O total ($2E$) é sempre um número **par**. Dividimos a soma em graus pares e ímpares:

$$\sum d_{par} + \sum d_{impar} = \text{Par}$$

A soma de números pares ($\sum d_{par}$) é par. Para que o resultado final seja par, a soma dos graus ímpares ($\sum d_{impar}$) também deve ser par.
A soma de uma quantidade **ímpar** de números ímpares resultaria em um número ímpar. Logo, deve haver uma quantidade **par** de vértices com grau ímpar. ■



3. Problemas Propostos

Use sua imaginação e as ferramentas apresentadas para resolver os desafios abaixo.

1. **(O Tabuleiro Ímpar)** É possível cobrir perfeitamente um tabuleiro 5×5 usando apenas dominós (1×2)?

2. **(O Clube dos Sete)** Em um grupo de estudos com 7 alunos, é possível que cada aluno seja amigo de exatamente 3 outros alunos do grupo?

3. **(Dominós e o Tabuleiro Cortado)** Um tabuleiro de xadrez 8×8 tem dois cantos opostos removidos, restando 62 casas. É possível cobrir esse tabuleiro com 31 dominós?

4. **(Cálculo de Área no Grid)** Um polígono tem seus vértices nos pontos de coordenadas inteiras $(0, 0)$, $(4, 0)$, $(4, 3)$ e $(2, 4)$. Calcule a sua área utilizando o Teorema de Pick.

5. **(O Passeio do Cavalo)** Um cavalo de xadrez começa na casa $a1$ (canto inferior esquerdo, cor preta). É possível que ele faça um passeio pelo tabuleiro e, após exatamente 3 movimentos, chegue a uma casa de cor preta? E após 63 movimentos?

6. **(Pontos no Quadrado)** Prove que, se escolhermos 5 pontos dentro de um quadrado de lado 1, pelo menos dois estarão a uma distância $\leq \frac{\sqrt{2}}{2}$.

7. **(Círculo e Retas)** Desenhe um círculo e, em seguida, trace 3 retas que cortam o círculo e se cruzam dentro dele. Prove que o mapa formado (dentro e fora do círculo) pode ser pintado com apenas 2 cores.

8. **(Pontos no Triângulo)** Temos um triângulo equilátero de lado 1. Escolhemos 5 pontos dentro dele. Prove que pelo menos dois pontos estão a uma distância menor ou igual a $1/2$.

9. **(O Ponto Médio Inteiro)** Prove que, ao escolhermos 5 pontos com coordenadas inteiras no plano, o ponto médio de pelo menos um par de pontos também terá coordenadas inteiras.

10. **(Pontos no Retângulo 3×4)** Temos 6 pontos num retângulo 3×4. Prove que dois deles distam $\leq \sqrt{5}$.

11. **(Tetraminós Retos)** É possível cobrir um tabuleiro 10×10 usando apenas tetraminós retos (peças de 1×4)?

12. **(Ramsey de Amigos)** Em uma festa com 6 pessoas, prove que sempre existem 3 amigos mútuos (triângulo de amigos) ou 3 estranhos mútuos.
Dica: Modele como um grafo completo de 6 vértices com arestas Azuis (amigos) e Vermelhas (estranhos). Escolha um vértice e use o PCP nas suas 5 arestas.

13. **(O Plano Bicolor)** Pintamos todos os pontos do plano infinito de Vermelho ou Azul. Prove que existe um par de pontos da **mesma cor** à distância exatamente 1.

14. **(L-Trominós e Indução)** Dado um tabuleiro de tamanho $2^n \times 2^n$ com **exatamente uma** casa removida (em qualquer posição), prove que é possível cobrir todo o restante com L-trominós.
Dica: Use indução. Divida o tabuleiro em 4 quadrantes menores e veja onde o buraco está.

15. **(O Triângulo Equilátero)** Prove que é **impossível** desenhar um triângulo equilátero com os seus três vértices sobre pontos de um reticulado cujas coordenadas são números inteiros.

4. Biblioteca do Medalhista

Clássicos Internacionais

ENGEL, Arthur. *Problem-Solving Strategies.* Springer, 1998.
(A "bíblia" olímpica. Foco nos capítulos de Invariantes e Grafos).

SOIFER, Alexander. *The Mathematical Coloring Book.* Springer, 2009.
(História e teoria profunda sobre problemas de coloração e Ramsey).

ANDREESCU, T.; FENG, Z. *102 Combinatorial Problems.* Birkhäuser, 2003.
(Problemas de nível intermediário a avançado, essenciais para o ciclo IMO).

AIGNER, M.; ZIEGLER, G. *Proofs from THE BOOK.* Springer, 2018.
(Demonstrações elegantes de teoremas clássicos, incluindo a Galeria de Arte e Euler).

HONSBERGER, Ross. *Mathematical Gems I, II & III.* MAA.
(Coleção de tópicos fascinantes, incluindo o Teorema de Sylvester-Gallai).

LARSON, Loren. *Problem-Solving Through Problems.* Springer, 1983.
(Um clássico absoluto que ensina heurísticas de resolução de problemas).

CHEN, C.; KOH, K. *Principles and Techniques in Combinatorics.* World Scientific.
(O livro-texto padrão para combinatória de contagem e existência na Ásia).

PÓLYA, George. *How to Solve It.* Princeton University Press.
(A obra fundamental sobre o pensamento matemático moderno).

Literatura Essencial em Língua Portuguesa

FOMIN, D. et al. *Círculos Matemáticos: A Experiência Russa.* IMPA, 2012.
(Leitura obrigatória. A melhor didática para iniciantes em combinatória).

MORGADO, A. C. et al. *Análise Combinatória e Probabilidade.* SBM.
(A base teórica sólida para qualquer estudante brasileiro).

SHINE, Carlos Y. *Combinatória* (Coleção Lantejoulas). SBM.
(Material nacional de altíssima qualidade focado na OBM).

LIMA, Elon Lages. *Meu Professor de Matemática.* SBM.
(Contém o artigo clássico que popularizou o Teorema de Pick no Brasil).

WAGNER, Eduardo. *Teorema de Pitágoras e Áreas.* SBM.
(Excelente para aprofundar a geometria do Teorema de Pick e áreas de polígonos).

SANTOS, J. P. et al. *Introdução à Análise Combinatória.* Editora Unicamp.
(Um texto rigoroso e completo sobre contagem e princípios combinatórios).

Artigos Recomendados (Revista EUREKA!)

N.º 28 (2008) **HOLANDA, Bruno.** *Combinatória Geométrica e Invariantes.*

N.º 9 (2000) **MOREIRA, C. G. (Gugu).** *Teoria dos Grafos em Olimpíadas.*

N.º 3 (1998) **TENGAN, E.; WAGNER, E.** *O Princípio das Gavetas.*

N.º 15 (2002) **RODRIGUES, Pablo.** *Grafos Planares e a Fórmula de Euler.*

N.º 5 (1999) **CARNEIRO, J. P.** *O Teorema de Pick e Outros Resultados.*

Recursos Digitais e Comunidades

Art of Problem Solving *aops.com.* (O maior fórum mundial de discussão olímpica).

MathWorld *mathworld.wolfram.com.* (Enciclopédia rigorosa de definições matemáticas).

Portal da OBMEP *portaldaobmep.impa.br.* (Videoaulas excelentes em português).

Project Euler *projecteuler.net.* (Desafios de combinatória e teoria dos números para programadores).