

Princípio das Casas e dos Pombos

Gabriel Torkomian

27 de janeiro de 2026

1 Problemas

Problema 1. Escolhem-se 5 pontos ao acaso sobre a superfície de um quadrado de lado 2. Mostre que pelo menos dois destes pontos estão a uma distância menor ou igual a $\sqrt{2}$.

Problema 2. Escolhemos aleatoriamente 168 números de três algarismos. Mostre que sempre é possível escolher 8 deles tal que a soma de seus algarismos é igual.

Problema 3. Em cada casa de um tabuleiro 3×3 é colocado um dos números $-1, 0, 1$. Prove que, dentre as oito somas ao longo de uma mesma linha, coluna ou diagonal, existem duas iguais.

Problema 4. (Bielorrússia 1996) Em um grupo de 29 hobbits existem alguns que falam a verdade e outros que sempre mentem. Em um certo dia de primavera, todos se sentaram ao redor de uma mesa, e cada um deles falou que seus dois vizinhos eram mentirosos.

(a) Prove que pelo menos 10 hobbits falavam a verdade.

(b) É possível que exatamente 10 deles falem a verdade?

Problema 5. Trinta e três torres são postas em um tabuleiro 8×8 . Prove que podemos escolher cinco delas sem que nenhuma ataque a outra.

Problema 6. (Longlist IMO 1979 – Bulgária) Colocamos $4n + 1$ reis em um tabuleiro infinito. Prove que podemos escolher $n + 1$ deles de modo que não existam dois que se ataquem.

Problema 7. (USAMO 1976) Cada quadradinho de um tabuleiro 4×7 é colorido de preto ou branco. Prove que, para qualquer coloração, o tabuleiro contém pelo menos 1 subretângulo de forma que os quadrados que estão em sua borda são da mesma cor.

Problema 8. Prove que em qualquer grupo de 17 números escolhidos do conjunto

$$M = \{1, 2, 3, \dots, 24, 25\}$$

é possível escolher dois cujo produto é um quadrado perfeito.

Problema 9. (Leningrado) Considere 70 inteiros positivos distintos menores ou iguais a 200. Prove que existem dois deles cuja diferença é 4, 5 ou 9.

Problema 10. (Teste Cone Sul) Os inteiros $1, 2, \dots, 200$ são divididos em 50 conjuntos. Mostre que pelo menos um desses 50 conjuntos contém três números distintos que podem ser medidas dos lados de um mesmo triângulo.

Problema 11. Mostre que se há n pessoas em uma festa, então duas delas conhecem o mesmo número de pessoas entre as presentes.

Problema 12. *Mostrar que todo inteiro positivo n possui um múltiplo que se escreve, na base 10, somente com os algarismos 0 e 1.*

Problema 13. *(USAMO 1985) Em uma festa há n pessoas. Prove que existem duas pessoas tais que, das $n - 2$ pessoas restantes, é possível achar $\lfloor n/2 \rfloor - 1$ onde cada uma delas conhece ou não conhece ambas.*

Problema 14. *O plano é pintado usando duas cores. Prove que existem dois pontos da mesma cor distando exatamente um metro.*

Problema 15. *(Putnam) Os pontos inteiros do plano são pintados usando três cores. Prove que existem dois pontos da mesma cor distando exatamente um metro.*

Problema 16. *Os pontos inteiros do plano são pintados usando três cores. Prove que existe um retângulo cujos vértices são todos da mesma cor.*

Problema 17. *(IMO 1983) Cada ponto do perímetro de um triângulo equilátero é pintado de uma de duas cores. Mostre que é possível escolher três pontos da mesma cor formando um triângulo retângulo.*