

COMBINATÓRIA DE OURO NA IMO

PROF. LUCIANO MONTEIRO DE CASTRO

lucianogmcastro@gmail.com

Problemas

1. Uma reta no plano é ensolarada se ela não é paralela ao eixo x , não é paralela ao eixo y e não é paralela à reta $x + y = 0$.

Seja $n \geq 3$ um número inteiro dado. Determine todos os inteiros não negativos k tais que existem n retas distintas no plano satisfazendo as duas seguintes condições:

- para todos os inteiros positivos a e b com $a + b \leq n + 1$, o ponto (a, b) está sobre pelo menos uma das retas; e
- exatamente k das n retas são ensolaradas.

2. O caracol Turbo joga num tabuleiro retangular com 2024 linhas e 2023 colunas. Em 2022 casas (quadrados unitários) desse tabuleiro existem monstros escondidos. Inicialmente, Turbo não conhece a posição de qualquer um dos monstros, mas ele sabe que existe exatamente um monstro em cada linha, com exceção da primeira e da última linha, e que cada coluna tem no máximo um monstro.

Turbo faz uma série de tentativas para ir da primeira linha à última linha. Em cada tentativa, ele escolhe começar em qualquer casa na primeira linha, e repetidamente se move para uma casa adjacente, ou seja, com um lado em comum (ele pode voltar a uma casa visitada anteriormente). Se ele chega a uma casa em que há um monstro, essa tentativa acaba e ele é transportado de volta para a primeira linha para começar uma nova tentativa. Os monstros não se movem e Turbo lembra se em cada casa que ele visitou há, ou não há, um monstro. Se ele chega a uma casa na última linha, a tentativa acaba e o jogo termina.

Determine o menor valor de n para o qual Turbo tem uma estratégia que garante que ele chegará na última linha na n -ésima tentativa, ou antes, sem importar as posições dos monstros.

3. Um *local* é um ponto (x, y) no plano tal que x e y são ambos inteiros positivos menores ou iguais a 20. Inicialmente, cada um dos 400 locais está vazio. Ana e Beto colocam pedras alternadamente com Ana a iniciar. Na sua vez, Ana coloca uma nova pedra vermelha num local vazio tal que a distância entre quaisquer dois locais ocupados por pedras vermelhas seja diferente de $\sqrt{5}$. Na sua vez, Beto coloca uma nova pedra azul em qualquer local vazio. (Um local ocupado por uma pedra azul pode estar a qualquer distância de outro local ocupado.) Eles param quando um dos jogadores não pode colocar uma pedra. Determine o maior K tal que Ana pode garantir que ela coloca pelo menos K pedras vermelhas, não importando como Beto coloca suas pedras azuis.

4. Determine todos os inteiros positivos n tais que pode-se preencher cada casa de um tabuleiro $n \times n$ com uma das letras I, M e O de tal forma que ambas as condições seguintes sejam satisfeitas:
- em cada linha e em cada coluna, exatamente um terço das casas tenha um I, um terço tenha um M e um terço tenha um O.
 - em cada diagonal formada por um número de casas que seja múltiplo de 3, exatamente um terço das casas tenha um I, um terço tenha um M e um terço tenha um O.

Observação: As linhas e as colunas de um tabuleiro $n \times n$ são numeradas de 1 a n . Assim, cada casa corresponde a um par de inteiros positivos (i, j) com $1 \leq i, j \leq n$. Para $n > 1$, o tabuleiro tem $4n - 2$ diagonais de dois tipos. Uma diagonal do primeiro tipo é formada por todas as casas (i, j) para as quais $i + j$ é igual a uma constante. Uma diagonal do segundo tipo é formada por todas as casas (i, j) para as quais $i - j$ é igual a uma constante.

5. Sejam n e k números inteiros positivos tais que $k \geq n$ e $k - n$ é um número par. São dadas $2n$ lâmpadas numeradas de 1 a $2n$, cada uma das quais pode estar *acesa* ou *apagada*. Inicialmente todas as lâmpadas estão apagadas. Uma *operação* consiste em alterar o estado de exatamente uma das lâmpadas (de acesa para apagada ou de apagada para acesa). Consideremos sequências de operações.

Seja N o número de sequências com k operações após as quais as lâmpadas de 1 a n estão todas acesas e as lâmpadas de $n + 1$ a $2n$ estão todas apagadas.

Seja M o número de sequências com k operações após as quais as lâmpadas de 1 a n estão todas acesas e as lâmpadas de $n + 1$ a $2n$ estão todas apagadas, e durante as quais todas as lâmpadas de $n + 1$ a $2n$ permanecem sempre apagadas.

Determine a razão $\frac{N}{M}$.

6. Numa competição de matemática na qual foram propostos 6 problemas, quaisquer dois problemas foram resolvidos por mais de $2/5$ dos estudantes. Além disso, nenhum estudante resolveu todos os 6 problemas. Mostre que existem pelo menos 2 estudantes que resolveram 5 problemas cada um.
7. Há $n \geq 2$ segmentos no plano tais que cada par de segmentos se intersecta num ponto interior a ambos e não há três segmentos que tenham um ponto em comum. Geoff deve escolher um dos extremos de cada segmento e colocar sobre ele um sapo, virado para o outro extremo. Depois ele baterá palmas $n - 1$ vezes. Cada vez que ele bater as mãos, cada sapo saltará imediatamente para a frente até o próximo ponto de interseção sobre o seu segmento. Os sapos nunca mudam a direção dos seus saltos. Geoff deseja colocar os sapos de tal forma que dois sapos nunca ocupem ao mesmo tempo o mesmo ponto de interseção. (a) Prove que se n é ímpar, Geoff sempre tem uma maneira de realizar o seu desejo. (b) Prove que se n é par, Geoff nunca realiza o seu desejo.