

Nas paralelas do circuncesso

Nível 2 - Semana Olímpica/2026

Prof. Armando Barbosa

Vitória/ES, 30 de janeiro de 2026

Um levantamento estatístico da OBM/2025, Nível 2, incluindo menções honrosas, apontou que:

- 43 alunos fizeram 10 pontos no P2 e 22 alunos fizeram 0 pontos no P2;
- 40 alunos fizeram 10 pontos no P4 e 32 alunos fizeram 0 pontos no P4.

No geral, vê-se que foram os problemas que “decidiram” quem atingiu a pontuação mínima para ser medalha de bronze. Por um lado, há o copo meio cheio com o pessoal desempenhando bem no P2, que era de combinatória. Porém, por outro lado, há o copo meio vazio com o pessoal não indo tão bem no P4, que foi de geometria. Sendo o P5 um problema de álgebra, que foi considerado difícil com 7 alunos em pontuação máxima e 49 com pontuação zerada, esperava-se mais no desempenho geral no P4.

Conversando com alguns professores experientes, conjecturamos que um problema pode estar relacionado com uma ideia geral de não tentar aplicar técnicas simples. Por exemplo, num problema de geometria, ao invés de, primeiramente, marcar ângulos e procurar cíclicos, tenta-se aplicar geometria projetiva, às vezes sem ter um razoável domínio do tema.

Dessa forma, planejou-se essa aula para reforço da ideia: pensar simples, primeiro. Essa ideia está alinhada com o que alguns professores viram em diversos eventos mundiais de treinamentos de países que desempenham bem na IMO.

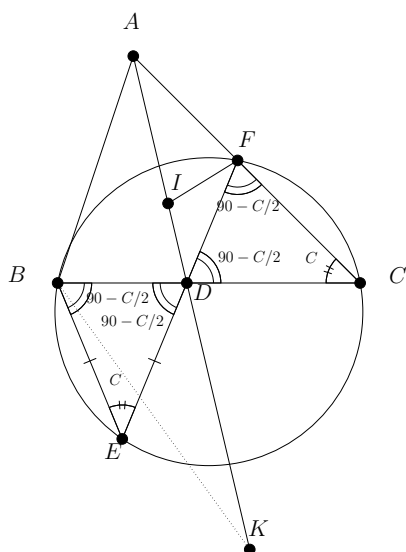
Sendo somente uma aula de 2 horas, optou-se por falar apenas sobre dois assuntos: circuncentro, que foi tema do P4, e paralelismos/paralelogramos. Para fim dessa seção introdutória, apresentamos a solução do P4 da OBM:

Problema 1. (OBM/2025 - N2/P4) Seja ABC um triângulo com incentro I e A -exincentro K . Seja D o pé da bissetriz interna relativa ao vértice A e E o circuncentro do $\triangle BDK$. Seja $F \neq C$ a segunda interseção de AC com o circuncírculo do $\triangle BFC$. Prove que:

a) E, D e F são colineares.

b) $ID = IF$.

Solução: Começemos com um bom desenho:



a) Primeiramente, notemos que $\triangle BDE$ é isósceles em E . Portanto, sendo $\angle BED = 2 \cdot \angle BKD = C$, temos que: $\angle BDE = 90 - C/2$.

Além disso, seja $D' = BC \cap EF$. Daí, temos que: $\angle D'FC = \angle EFC = \angle EBC = 90 - C/2$, o que implica, pelo $\triangle D'FC$, em $\angle FD'C = 90 - C/2 = \angle BD'E = \angle BDE$.

b) $\triangle DCF$ é isósceles em C . Isso implica em $CD = CF$. Sendo CI bissetriz, temos que $\triangle CDI \equiv \triangle CFI$ por LAL, de onde segue que $ID = IF$.

Notemos como foram apenas usadas ideias simples e fatos conhecidos, a partir da propriedade do circuncentro gerar alguns triângulos isósceles por ser equidistante dos três vértices.

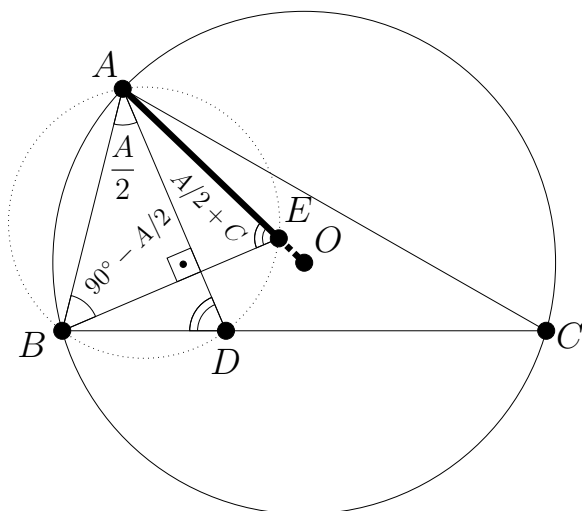
Vamos para os detalhes.

1 Circuncentro e suas propriedades

Começemos com uma solução:

Problema 2. (Hong Kong/TST - 2017) Num triângulo ABC , seja AD a bissetriz do ângulo $\angle BAC$, com D pertencente ao segmento BC . A perpendicular de B a AD intersecta o circuncírculo do triângulo ABD nos pontos B e E . Sendo O o circuncentro do triângulo ABC , prove que A, O e E são colineares.

Solução: Começemos com um bom desenho:



Marcando ângulos, temos que:

$$\triangle ABE \Rightarrow \angle ABE = 90^\circ - A/2$$

$$\triangle ADC \Rightarrow \angle BDA = A/2 + C$$

$$ABDE \text{ é cíclico } \Rightarrow \angle BEA = \angle BDA = A/2 + C$$

$$\xrightarrow{\triangle ABE} \angle BAE = 180^\circ - \left(90^\circ - \frac{A}{2} + \frac{A}{2} + C\right) = \boxed{90 - C}$$

Ficando, provada, a colinearidade desejada, pois $\triangle ABO$ é isósceles em O , com $\angle AOB = 2C$, o que nos leva a:

$$\angle BAO = 90 - C = \angle BAE$$

■

Note que a solução saiu apenas marcando ângulos e usando as propriedades que o circuncentro gera, que basicamente são triângulos isósceles com os circunraios.

Para treinar um pouco, tentemos fazer as questões a seguir, de ideias similares:

Problema 3. (Pan-africana/2019) As tangentes ao circuncírculo do triângulo ABC em B e C encontram-se em D . O circuncírculo do triângulo BCD encontra os lados AC e AB novamente em E e F , respectivamente. Sendo O o circuncentro do triângulo ABC , prove que $AO \perp EF$.

Problema 4. (Bangladesh-2025) Seja ABC um triângulo dado com circuncentro O e ortocentro H . Sejam D, E e F os pés das perpendiculares de A, B e C aos lados opostos, respectivamente. Sendo A' a reflexão de A em relação a EF , prove que $HOA'D$ é um quadrilátero cíclico.

Problema 5. (Centro-americana/2022) Seja ABC um triângulo acutângulo com ortocentro H e circuncentro O . Seja D a interseção de AO e BH . Seja P o ponto em AB tal que $PH = PD$. Prove que os pontos B, D, O e P pertencem a uma circunferência.

1.0.1 Dicas e ideias de soluções

Problema 3. Seja $X = AO \cap EF$. Sendo $BCEF$ cíclico, temos que $\angle XEA = B$. Marcando ângulos, vemos que $\angle EAX = \angle EAO = 90^\circ - B$. Logo, no $\triangle AEX$, temos que $\angle AXE = 90^\circ$.

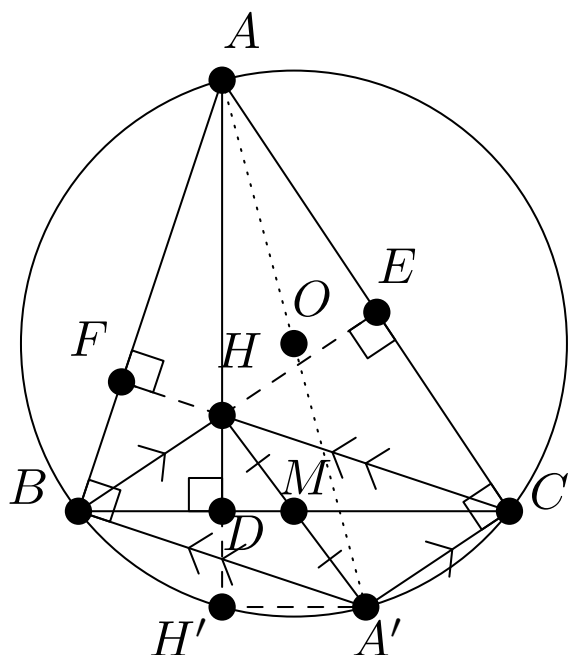
Problema 4. Primeiramente, de $BCEF$ cíclico, temos que $\angle FEA = B$. Daí, sendo A' reflexão, logo $\angle A'AE = 90^\circ - B = \angle OAE$, o que implica que A', O e A são colineares. Por fim, por potência de ponto, basta provar que $AH \cdot AD = AO \cdot AA'$, que será verdade pois $EHDC$ é cíclico, o que nos leva a $AH \cdot AD = AE \cdot AC$ e $EOA'C$ é cíclico, pois $\angle OA'E = \angle OAE = 90^\circ - C = \angle OCE$, o que nos leva a: $AE \cdot AC = AO' \cdot AA'$.

Problema 5. Se o $BDOP$ for cíclico, temos que $\angle ODP = \angle OBP = \angle OBA = 90^\circ - C = \angle OAP$. Com isso, teríamos $PA = PD = PH$, ou seja, que P é circuncentro do $\triangle ADH$. Daí, “invertamos” o problema: seja P' o circuncentro do $\triangle ADH$. Precisamos provar que $P' \in AB$. Cuidado para não dizer, nesse momento, que $\angle APH = 2B$. Isso só seria verdade se $P' \in AB$, que é algo ainda não provado. Analisando $\triangle ADH$, temos que: $\angle AHD = C$ e $\angle HAD = (90^\circ - B) - (90^\circ - C) = C - B$. Daí, por ângulos inscritos na circunferência, teremos que $\angle AP'H = 2 \cdot C + 2 \cdot (B - C) = 2B$, de modo que $P'A = P'H$ nos leva a: $\angle P'AH = 90^\circ - B = \angle BAH$, o que conclui nossa solução.

2 Paralelismos/Paralelogramos

Por vezes, precisamos mexer com o circuncírculo e alguns paralelogramos.

Uma das formas mais conhecidas disso é o reflexo do ortocentro pelo ponto médio do lado que cai no circuncírculo, demonstrado no desenho a seguir:



Sendo A' a antípoda de A em relação à circunferência circunscrita de ABC , provaremos que $BHCA'$ é um paralelogramo

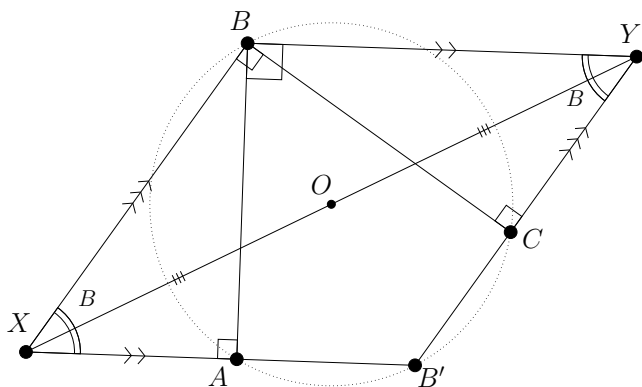
Lembrando que outros paralelismos e paralelogramos podem acontecer no contexto da questão, mas que há muitos associados a antípoda, treinemos um pouco:

Problema 6. (Cone Sul/2017) Seja ABC um triângulo acutângulo com circuncentro O . Os pontos X e Y são escolhidos tais que:

- $\angle XAB = \angle YCB = 90^\circ$
- $\angle ABC = \angle BXA = \angle BYC$
- X e C estão em semi-planos diferentes em relação a AB
- Y e A estão em semi-planos diferentes em relação a BC

Prove que O é ponto médio de XY .

Solução: Começemos com um bom desenho:



Observemos como um bom desenho é “mais que meio caminho andado”.

Para isso, basta analisarmos que:

$$\begin{cases} BE \perp AC \\ A'C \perp AC \end{cases} \Rightarrow BE \parallel A'C \Rightarrow BH \parallel A'C$$

$$\begin{cases} CF \perp AB \\ A'B \perp AB \end{cases} \Rightarrow CF \parallel A'B \Rightarrow CH \parallel A'B$$

Portanto, temos que $BHCA'$ é paralelogramo.

Como as diagonais de um paralelogramo cortam-se no ponto médio, logo, sendo M ponto médio de BC , temos que: $HM = MA'$, resultando que A' é o reflexo de H por M .

Aproveitemos para provar que o reflexo do ortocentro pelo lado também cai no ortocentro. Para isso, chamemos de H' o encontro da altura AH com a circunferência circunscrita ao triângulo ABC .

Daí, temos que:

$$A' \text{ é antípoda} \Rightarrow AH'A' = 90^\circ$$

$$\begin{cases} AD \perp BC \\ AH' \perp H'A' \end{cases} \Rightarrow BC \parallel H'A' \Rightarrow DM \parallel H'A'$$

M é ponto médio de $HA' \Rightarrow DM$ é base média em $\triangle HH'A'$
 $\Rightarrow D$ é ponto médio de $HH' \Rightarrow H'$ é o reflexo de H por D

Notemos que:

$$\begin{cases} XA \perp AB \\ \angle BXA = B \end{cases} \xrightarrow{\triangle BXA} \angle XBA = 90^\circ - B \Rightarrow \angle XBC = 90^\circ$$

$$\Rightarrow XB \perp BC \xrightarrow{BC \perp CY} XB \parallel CY$$

Analog. $YB \parallel AX$

Daí, para formar o paralelogramo, surge espontaneamente a ideia de esticar AX e CY por A e C , respectivamente.

Nesse caso, sendo $B' = AX \cap CY$, concluiremos que:

$$\angle BAB' = 90^\circ = \angle BCB' \Rightarrow B' \text{ é antípoda de } B \text{ em } (\circ)ABC$$

$$B'XB'Y \text{ é paralelogramo} \Rightarrow O \text{ (ponto médio de } BB')$$

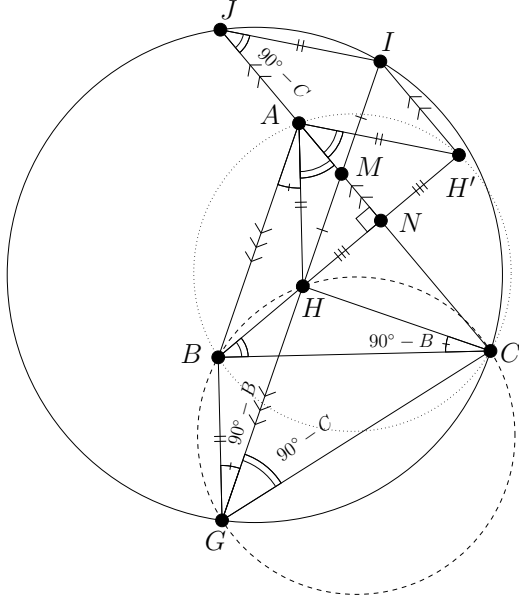
é ponto médio de XY

Pode não parecer, mas o que vimos até aqui, apesar de serem ideias simples, já é suficiente para resolvermos problemas de shortlist, conforme veremos a seguir.

3 Duas de IMO/SLs

Problema 7. (IMO/SL - 2015/G1) Seja ABC um triângulo acutângulo com ortocentro H . Seja G o ponto tal que o quadrilátero $ABGH$ é um paralelogramo. Seja I o ponto na reta GH tal que AC passa pelo ponto médio de HI . Sejam C e J os pontos em que a reta AC intersecta a circunferência circunscrita do ΔGCI . Prove que $IJ = AH$.

Solução: Começemos com um bom desenho:



Com um bom desenho, a princípio, não vemos algo muito imediato para relacionar IJ com AH . Porém,

conforme vimos na seção anterior, podemos analisar H' reflexo de H por AC . Sendo $AH = AH'$, será suficiente provar que $AH'IJ$ é paralelogramo.

Por um lado, tomemos M e N pontos médios de HI e de HH' , respectivamente. Dessa forma, temos que MN é base média no $\Delta HH'I$ e por consequência: $MN \parallel IH' \Rightarrow$

$$\boxed{AJ \parallel H'I} \quad (I).$$

Por outro lado, $ABGH$ é paralelogramo implica em $\angle BGH = \angle BAH = 90^\circ - B$. Sendo $\angle BCH = 90^\circ - B$ também, podemos concluir que $BGCH$ é cíclico. Por consequência, temos que: $\angle HGC = \angle HBC = 90^\circ - C$.

Pela própria definição de J , temos que $GCIJ$ é cíclico, de modo que:

$$\angle IJA = \angle IJC = \angle IGC = \angle HBC = 90^\circ - C$$

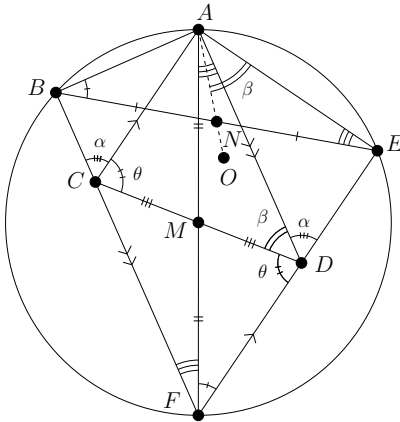
Por fim, temos que H' ser reflexo de H implica em:

$$\begin{aligned} \angle H'AN &= \angle HAN = \angle HAC = 90^\circ - C \\ \Rightarrow \boxed{JI \parallel AH'} \quad (II) \end{aligned}$$

Por (I) e (II) segue que $AH'IJ$ é paralelogramo, o que conclui nossa solução, pois $IJ = AH' = AH$. ■

Problema 8. (IMO/SL - 2023/G1) Seja $ABCDE$ um pentágono convexo tal que $\angle ABC = \angle AED = 90^\circ$. Sabe-se que o ponto médio de CD é o circuncentro do ΔABE . Seja O o circuncentro do ΔACD . Prove que AO passa pelo ponto médio de BE .

Solução: Seja N o ponto médio de BE . Note que a questão pede para provar que A, N e O são colineares. Como já vimos ao longo desse material, principalmente na primeira seção, isso implica em: $\angle NAD = 90 - \angle ACD = \angle OAD$. Buscando isso, façamos um bom desenho:



De $\angle ABC = \angle AED = 90^\circ$, surge a ideia de esticar BC e DE até se encontrarem. Seja $F = BC \cap DE$. Daí, sendo M ponto médio de CD , temos que:

$$\begin{aligned} \angle ABF &= \angle AEF = 90^\circ \Rightarrow ABFE \text{ é cíclico} \\ &\text{com centro no ponto médio de } AF \end{aligned}$$

Seja M o ponto médio de AF . Logo, M é o centro de $(ABFE)$ que, pelo enunciado, é o ponto médio de CD :

AF e CD cortam-se no ponto médio

$$\Rightarrow \boxed{ACFD \text{ é paralelogramo}}$$

Agora, para cumprir nosso objetivo de provar que $\angle NAD = \angle OAD$ será basicamente marcação de ângulos e uma semelhança.

Provemos a semelhança: $\Delta ABE \sim \Delta DFA$. Para isso, basta perceber que:

$$\angle ABE = \angle AFE = \angle DFA; \angle AEB = \angle AFB = \angle DAF$$

Daí, sejam $\theta = \angle ACD = \angle CDF$, $\alpha = \angle EDA$ e $\beta = \angle CDA = \angle MDA$. Com isso, podemos concluir que:

$$\text{Ponto } D \Rightarrow \boxed{\alpha + \beta + \theta = 180^\circ} \quad (I)$$

$$\begin{aligned} \Delta ABE &\sim \Delta DFA \\ N \text{ e } M &\text{ pontos médios} \end{aligned} \Rightarrow \angle NAE = \angle MDA = \beta$$

$$\angle NAD = \beta - (90^\circ - \alpha) = \alpha + \beta - 90^\circ$$

$$(I) \Rightarrow \angle NAD = 90 - \theta = 90 - \angle ACD$$

$$\Rightarrow \boxed{A, N \text{ e } O \text{ são colineares}}$$

4 Teorema de Reim (só na versão online)

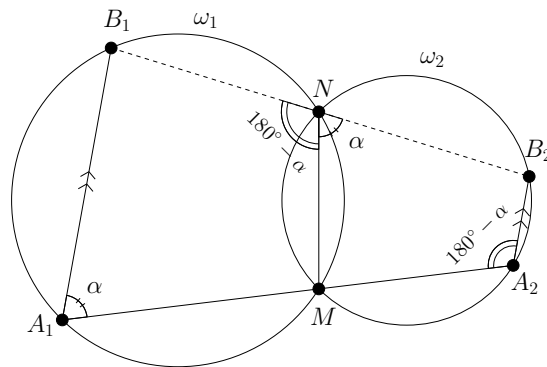
Aproveitemos esse tema para falar do teorema de Reim, que relaciona circunferências com paralelas e em algumas outras literaturas é apenas apontado como “fato conhecido”: Sejam ω_1, ω_2 duas circunferências que se intersectam nos pontos M e N . Uma reta que passa por M intersecta ω_1 e ω_2 novamente nos pontos A_1 e A_2 , respectivamente. Sendo B_1 ponto em ω_1 e B_2 ponto em ω_2 , temos que:

$$A_1B_1 \parallel A_2B_2 \Leftrightarrow B_1, N \text{ e } B_2 \text{ são colineares}$$

Prova:

Parte 1: $A_1B_1 \parallel A_2B_2 \Rightarrow B_1, N \text{ e } B_2$ são colineares

Seja $\angle MA_1B_1 = \alpha$.

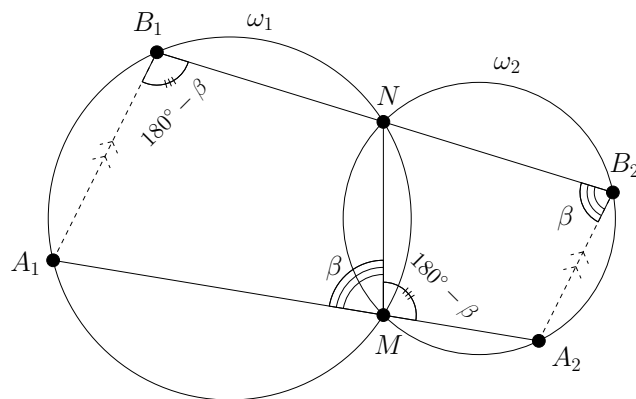


Daí, temos que:

$$\begin{aligned} A_1B_1 \parallel A_2B_2 &\Rightarrow \angle MA_2B_2 = 180^\circ - \alpha \\ MA_2B_2N \text{ é inscritível} &\Rightarrow \angle MNB_2 = 180^\circ - (180 - \alpha) = \alpha \\ MA_1B_1N \text{ é inscritível} &\Rightarrow \angle B_1NM = 180^\circ - \alpha \\ \Rightarrow \angle B_1NM + \angle MNB_2 &= (180^\circ - \alpha) + \alpha = 180^\circ \Rightarrow \boxed{B_1, N \text{ e } B_2 \text{ colineares}} \end{aligned}$$

Parte 2: $A_1B_1 \parallel A_2B_2 \Leftarrow B_1, N \text{ e } B_2$ são colineares

Seja $\angle A_1MN = \beta$.

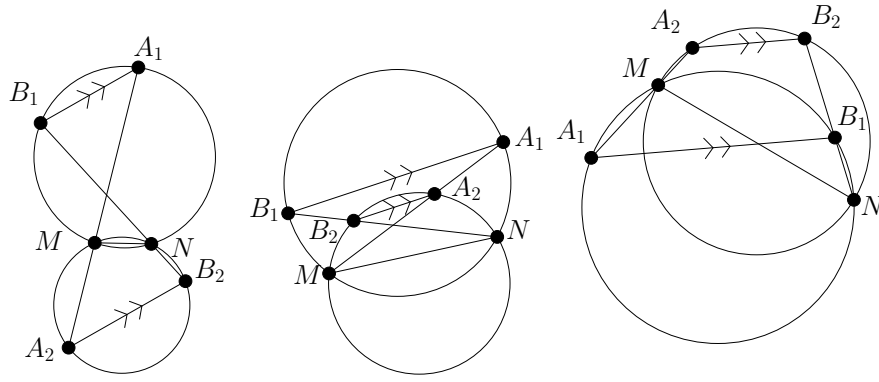


Daí, temos que:

$$\begin{aligned} A_1, M \text{ e } A_2 \text{ são colineares} &\Rightarrow \angle NMA_2 = 180^\circ - \beta \\ MA_2B_2N \text{ é inscritível} &\Rightarrow \angle NB_2A_2 = 180^\circ - (180 - \beta) = \beta \\ MA_1B_1N \text{ é inscritível} &\Rightarrow \angle NB_1A_1 = 180^\circ - \beta \\ \angle NB_1A_1 = 180^\circ - \beta &= 180^\circ - \angle NB_2A_2 \Rightarrow \boxed{A_1B_1 \parallel A_2B_2} \end{aligned}$$

■

Antes de começarmos a ver as soluções, convém mencionar que as retas que envolvem o teorema de Reim podem aparecer de diversas formas como as apresentadas a seguir:

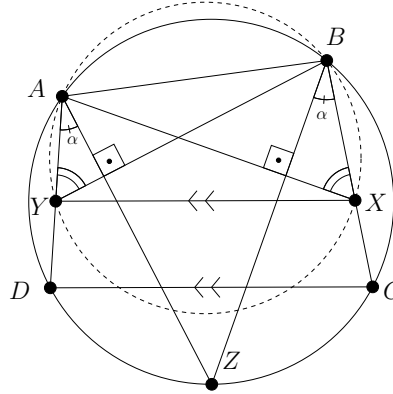


As demonstrações de cada um dos casos mostrados e de qualquer outro do teorema de Reim são análogas de modo que as deixaremos para o leitor.

Vamos para os problemas resolvidos.

Problema 9. (Indonésia/2020) Dado um quadrilátero cíclico $ABCD$, sejam X um ponto no segmento BC ($X \neq BC$) tal que a reta AX seja perpendicular à bissetriz do ângulo $\angle CBD$ e Y um ponto no segmento AD ($Y \neq D$) tal que BY seja perpendicular à bissetriz do ângulo $\angle CAD$. Prove que $XY \parallel CD$.

Solução: Começemos com um bom desenho, fazendo $2\alpha = \angle CAD = \angle CBD$:



Analisando o desenho anterior:

- A, Y e D colineares;
- B, X e C colineares;
- deseja-se provar que $XY \parallel CD$.

Temos, então, pelo teorema de Reim, que é suficiente mostrar que $ABXY$ é cíclico, pois Y, D, X e C seriam os pontos onde as retas encontrariam as circunferências analisadas.

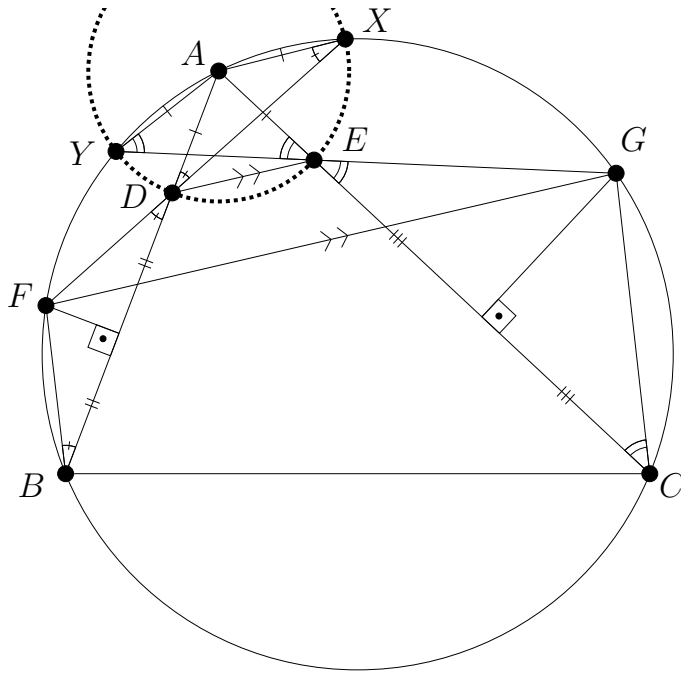
Provemos isso, sabendo que Z , ponto médio do arco $\widehat{CD}$ será o ponto onde as duas bissetrizes encontrarão a circunferência ($ABCD$):

$$\begin{aligned}\angle DAZ &= \frac{2\alpha}{2} = \alpha \xrightarrow{BY \perp AZ} \angle AYB = 90^\circ - \alpha \\ \angle CBZ &= \frac{2\alpha}{2} = \alpha \xrightarrow{AX \perp BZ} \angle AXB = 90^\circ - \alpha \\ \Rightarrow \angle AYB &= \angle AXB \Rightarrow \boxed{ABXY \text{ é cíclico}}\end{aligned}$$

■

Problema 10. (IMO/2018) Seja Γ o circuncírculo do triângulo ABC . Os pontos D e E estão sobre os segmentos AB e AC , respectivamente, de modo que $AD = AE$. As mediatrizes de BD e CE intersectam os arcos menores AB e AC de Γ nos pontos F e G , respectivamente. Prove que as retas DE e FG são paralelas (ou são a mesma reta).

Solução: Começemos com um bom desenho:



Pensando na aplicação do teorema do Reim, considerando que:

- Γ a primeira das duas circunferências, pois $F, G \in \Gamma$;
- o pedido é para provar que $DE \parallel FG$

logo faz sentido:

- esticar FD até Γ , novamente, definindo o ponto X ;
- esticar GE até Γ , novamente, definindo o ponto Y ;
- provar que $XYDE$ é cíclico.

Provemos isso, olhando inicialmente para o ângulo $\angle AXD$:

$$\begin{aligned}\angle AXD &= \angle AXF \stackrel{\Gamma}{=} \angle AXD = \angle ABF \\ F \in \text{mediatriz de } BD &\Rightarrow \angle ABF = \angle DBF = \angle BDF = \angle ADX (\text{o.p.v.}) \\ &\Rightarrow \angle AXD = \angle ADX \Rightarrow \boxed{AD = AX}\end{aligned}$$

Analogamente, olhando para o ângulo $\angle AXE$, temos que: $AY = AE$.

Por fim, sendo $AD = AE$, podemos concluir que:

$$AX = AD = AE = AY \Rightarrow \boxed{XYDE \text{ é cíclico}}$$

pois X, Y, D e E estão equidistantes de A . ■