

Invariantes e Monovariantes

Gabriel Torkomian

29 de janeiro de 2026

1 Problemas

Problema 1. *Sete moedas estão sobre uma mesa mostrando a cara. Podemos escolher quaisquer quatro delas e virá-las ao mesmo tempo. Podemos obter todas as moedas mostrando a coroa?*

Problema 2. *Dado um polinômio quadrático $ax^2 + bx + c$, podemos fazer as operações:*

(a) *trocar a com c ;*

(b) *trocar x por $x + t$, onde t é um número real.*

Usando essas operações, é possível transformar $x^2 - x - 2$ em $x^2 - x - 1$?

Problema 3. *Os números $1, 2, \dots, 20$ são escritos em um quadro negro. Podemos apagar dois deles a e b e escrever no lugar o número $a + b + ab$. Após muitas operações ficamos apenas com um número. Qual deve ser esse número?*

Problema 4. *Em um tabuleiro 8×8 uma das casas está pintada de preto e as outras casas de branco. Podemos escolher qualquer linha ou coluna e trocar a cor de todas as suas casas. Usando essas operações, podemos obter um tabuleiro inteiramente preto?*

Problema 5. *Em um tabuleiro 3×3 uma das casas do canto está pintada de preto e as outras casas de branco. Podemos escolher qualquer linha ou coluna e trocar a cor de todas as suas casas. Usando essas operações, podemos obter um tabuleiro inteiramente preto?*

Problema 6. *No planeta colorido, os únicos habitantes são camaleões, que podem ser verdes, amarelos ou azuis. A lei do planeta dita que os camaleões mudam de cor se, e somente se, dois camaleões de cores diferentes se encontram; nesse caso, ambos mudam para a terceira cor. Sendo a, b, c as quantidades iniciais de camaleões verdes, amarelos e azuis, respectivamente, para que valores das ternas (a, b, c) é possível que os camaleões fiquem da mesma cor?*

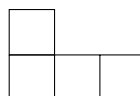
Problema 7. *Quais dos cinco tetraminós podem ser usados para cobrir um tabuleiro 6×6 ? Você tem nove cópias de cada tetraminó e pode girar e virar os tetraminós. Só não pode misturar tetraminós diferentes!*



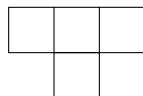
Quadrado



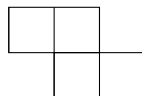
Tetraminó reto



L-tetraminó



T-tetraminó

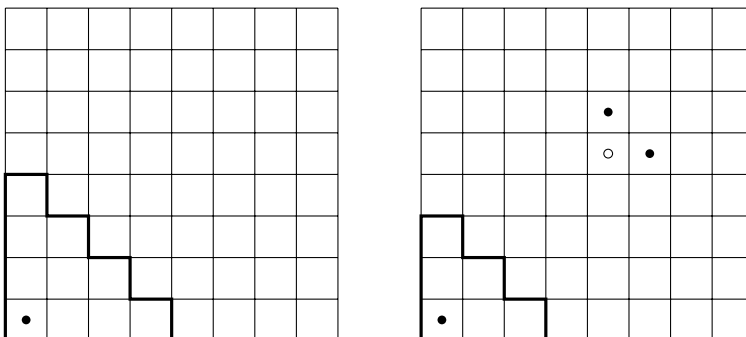


Z-tetraminó

Problema 8. Considere o tabuleiro infinito a seguir, que consiste no primeiro quadrante dividido em quadrados unitários. Colocamos uma peça no canto inferior esquerdo. O movimento permitido é tomar uma peça na casa (x, y) e substituí-la por duas peças, uma na casa $(x, y + 1)$ e outra na casa $(x + 1, y)$, desde que ambas as casas estejam vazias. É possível que a região delimitada pelas linhas mais grossas fique sem peças dentro dela:

(a) no tabuleiro da esquerda?

(b) no tabuleiro da direita?



Problema 9. Duas mil pessoas estão hospedadas em um hotel com 123 quartos. A cada segundo, uma pessoa sai de um quarto para outro com pelo menos a mesma quantidade de pessoas, a não ser que todas as pessoas estejam em um quarto só. Prove que eventualmente todas as pessoas estarão em um quarto só.

Problema 10. Uma quantidade finita de sapos está pulando entre 2000 vitórias-régias dispostas em fila. A cada minuto, quaisquer dois sapos que estão sobre a mesma vitória-régia (diferente das extremidades) pulam para as vitórias-régias vizinhas, um em cada direção. Prove que os sapos param de pular em algum momento.

Problema 11. Imagine um tabuleiro de xadrez infinito dividido em dois por uma de suas retas horizontais. Devemos agora pôr uma quantidade finita de peças na parte de baixo do tabuleiro e, movendo-as segundo as regras do Resta um, trazer pelo menos uma delas até a n -ésima linha acima da linha divisória. Determine os valores de n para o qual isto é possível.

Problema 12. (Cone Sul) Um jogo consiste de 9 botões (de cor verde ou vermelha) dispostos da seguinte maneira: Se é apertado um botão do bordo do quadrado, trocam de cor ele e todos os seus vizinhos; se é apertado o botão do centro, trocam de cor seus 8 vizinhos, porém ele não. Os exemplos seguintes mostram com círculos as luzes que trocam de cor ao pressionar o botão que é indicado. É possível (apertando sucessivamente alguns botões) acender todas as luzes de cor verde, se inicialmente estavam todas acesas com a luz vermelha? Justifique a sua resposta.

Problema 13. Cada um dos números $x_1, x_2, \dots, x_n$ é igual a 1 ou -1 , e

$$x_1x_2x_3x_4 + x_2x_3x_4x_5 + \dots + x_{n-3}x_{n-2}x_{n-1}x_n + x_{n-2}x_{n-1}x_nx_1 \\ + x_{n-1}x_nx_1x_2 + x_nx_1x_2x_3 = 0.$$

Prove que n é divisível por 4.

Problema 14. Pablo escolhe um inteiro positivo n e escreve no quadro negro os $2n + 1$ números

$$\frac{n}{1}, \frac{n}{2}, \dots, \frac{n}{2n+1}.$$

Laura escolhe dois números escritos por Pablo, a e b , apaga-os e escreve o número $2ab - a - b + 1$. Depois de repetir esse procedimento $2n$ vezes, sobra apenas um único número no quadro negro. Determinar os possíveis valores deste número.

Problema 15. (OBM) Temos uma fileira longa de copos e n pedras no copo central (copo 0). Os seguintes movimentos são permitidos.

Movimento tipo A. Se há pelo menos uma pedra no copo i e pelo menos uma no copo $i + 1$, podemos fazer uma pedra que está no copo $i + 1$ pular para o copo $i - 1$, eliminando uma pedra do copo $i + 1$.

Movimento tipo B. Se há pelo menos duas pedras no copo i , podemos pular uma para o copo $i + 2$ e uma outra para o copo $i - 1$.

Demonstre o seguinte fato: fazendo os movimentos tipo A ou B durante um tempo suficientemente longo sempre chegaremos a uma configuração a partir da qual não é mais possível fazer nenhum desses dois tipos de movimento. Além disso essa configuração final não depende da escolha de movimentos durante o processo.

Problema 16. (OBM 2012 – 3ª Fase – Nível 2) Quando duas amebas vermelhas se juntam, se transformam em uma única ameba azul; quando uma ameba vermelha se junta com uma ameba azul, as duas se transformam em três amebas vermelhas; quando duas amebas azuis se juntam, elas se transformam em quatro amebas vermelhas. Um tubo de ensaio tem inicialmente 201 amebas azuis e 112 amebas vermelhas.

(a) É possível que após algumas transformações o tubo contenha 100 amebas azuis e 314 amebas vermelhas?

(b) É possível que após algumas transformações o tubo contenha 99 amebas azuis e 314 amebas vermelhas?

Problema 17. (OBM 2022 – Níveis 2 e 3) Um jogo para uma pessoa tem as seguintes regras: inicialmente há dez pilhas de pedras, com $1, 2, 3, \dots, 10$ pedras, respectivamente. Uma jogada consiste em fazer uma das duas seguintes operações:

- (i) escolher duas pilhas, cada uma com pelo menos duas pedras, juntá-las e depois adicionar mais duas pedras à nova pilha;
- (ii) escolher uma pilha com pelo menos 4 pedras, tirar duas pedras dela e separá-la em duas pilhas de quantidades de pedras positivas escolhidas pelo jogador.

O jogo continua até não ser mais possível fazer uma operação. Mostre que o número de pilhas com apenas uma pedra ao final do jogo é sempre o mesmo, independentemente de como se realizam as jogadas.

Problema 18. Escrevemos os números de 1 a 10 numa lousa. A cada passo, trocamos dois números da lousa a e b pelo número $\sqrt{a^2 + b^2}$. Qual é o número que vai ficar no final, independentemente das operações?