

INVOLUÇÕES PROJETIVAS

PROF. LUCIANO MONTEIRO DE CASTRO

lucianogmcastro@gmail.com

@matematicamentexyz

1. Prove o Teorema de Thales.
2. EIXO DE UMA PROJETIVIDADE. Seja α uma projetividade entre as retas distintas r e r' . Para cada $X \in r$, denotamos por X' o ponto $\alpha(X) \in r'$. Prove que, para quaisquer $A, B \in r$, o ponto $AB' \cap A'B$ pertence a uma reta fixa. Tal reta é denominada *eixo* da projetividade α . Enuncie e desenhe o dual.
Obs. É possível resolver o exercício 2 sem utilizar o teorema de Pappus, obtendo, portanto, outra maneira de demonstrar tal teorema.
3. Enuncie e ilustre com um desenho o dual do Teorema de Pappus.
4. São dados os pontos A e B e as retas p e q , passando por A , e r e s , passando por B . Uma reta variável a passando por A corta r em R e s em S , enquanto outra reta variável b passando por B corta p em P e q em Q . Determine os lugares geométricos de $PR \cap QS$ e de $PS \cap QR$.
5. (Caracterização euclidiana das projetividades) Seja $\alpha : r \rightarrow s$ uma bijeção entre as retas projetivas r e s do plano projetivo, e escolha-se uma outra reta para “reta do infinito”. Seja I o ponto de r tal que $\alpha(I) = \infty_s$ (ponto do infinito de s) e J o ponto de s tal que $\alpha(\infty_r) = J$. Prove que α é uma projetividade se, e somente se, para todo $P \in r - \{I, \infty_r\}$,

$$IP \times J\alpha(P) = k,$$

onde k é uma constante real não nula.

6. Seja ABC um triângulo. Dado um ponto M sobre o lado AB , considere a seguinte construção para determinar o ponto M' também sobre AB : traça-se por M a paralela a AC , que corta BC em N . Por N , traça-se a paralela a AB que corta AC em P . Finalmente, traça-se por P a paralela a BC que corta AB em M' . Repete-se esta construção a partir de M' , obtendo-se o ponto M'' . Prove que $M'' = M$.
7. Sendo r uma reta projetiva, prove que se uma projetividade $\alpha : r \rightarrow r$ ‘troca’ um par de pontos distintos A e B , ou seja, $\alpha(A) = B$ e $\alpha(B) = A$, com $A, B \in r$ e $A \neq B$, então α é uma involução.
8. Uma involução de uma reta projetiva tem zero (elíptica) ou dois (hiperbólica) pontos fixos. Para cada par de pontos distintos da reta existe uma única involução que fixa esses pontos.
9. Uma involução fica definida por dois de seus pares de pontos. Mais precisamente:
Sejam A, A', B, B' quatro pontos alinhados sobre uma reta projetiva r . Se

$$\{A, A'\} \cap \{B, B'\} = \emptyset,$$

então existe uma única involução $\sigma : r \rightarrow r$ tal que $\sigma(A) = A'$ e $\sigma(B) = B'$.

10. Toda projetividade de uma reta projetiva é produto de no máximo duas involuções.
11. Seja $\sigma : r \rightarrow r$ uma involução projetiva. Como σ não é a identidade, existe um ponto I distinto de $I' = \sigma(I)$. Consideremos uma reta real contida em r tomando I' como ponto no infinito. A expressão analítica de σ é:

$$\overline{IM} \cdot \overline{IM'} = k, \quad k \neq 0.$$

12. O produto de duas involuções hiperbólicas distintas é uma involução se, e somente se, uma troca os pontos fixos da outra.

13. Os lados (retas) BC , CA , AB de um triângulo ABC cortam uma reta r em P, Q, R , respectivamente. Sejam P', Q', R' três pontos de r tais que os segmentos PP', QQ', RR' têm o mesmo ponto médio I . Prove que as retas AP', BQ' e CR' são concorrentes.
14. Seja ABC um triângulo e seja S um ponto fora dos lados. As perpendiculares por S a SA, SB, SC cortam BC, CA, AB em P, Q, R , respectivamente. Mostre que P, Q e R são colineares.
15. (Banco da IMO 2012) Seja ABC um triângulo com circuncírculo ω e seja ℓ uma reta sem pontos em comum com ω . Seja P o pé da perpendicular traçada do centro de ω a ℓ . As retas BC, CA e AB intersectam ℓ nos pontos X, Y e Z , diferentes de P . Prove que os circuncírculos dos triângulos AXP, BYP e CZP possuem um ponto comum diferente de P ou são mutuamente tangentes em P .
16. Enuncie e prove a propriedade do eixo de uma projetividade de uma cônica em si mesma, de forma análoga ao problema 2. Enuncie também o dual.
17. Seja $\mathcal{C}$ uma cônica no plano projetivo e P um ponto fora dela. Dado $A \in \mathcal{C}$ definimos $\alpha(A)$ como sendo a outra intersecção da reta AP com a cônica. Prove que α é uma involução projetiva.
18. Prove que toda involução projetiva de uma cônica em si mesma pode ser definida como no problema anterior. Ou seja, as retas definidas por cada ponto da cônica e sua imagem passam por um ponto fixo.
19. Considere um triângulo inscrito em uma cônica. Se uma reta corta dois dos seus lados em A e A' , o terceiro lado e a tangente ao vértice oposto a esse lado em B e B' , e a cônica em C e C' , prove que $(A, A'), (B, B'), (C, C')$ são pares de uma involução projetiva.
20. São dados quatro pontos de uma cônica, juntamente com a reta tangente à cônica em um deles. Descreva como construir as tangentes à cônica nos outros três pontos.
21. Sejam A, B, C três pontos distintos de uma cônica Γ , e a, b, c , respectivamente, as tangentes a Γ por esses pontos. Prove que os pontos $a \cap b$ e $a \cap c$ dividem harmonicamente os pontos A e $a \cap BC$.
22. Duas retas p e q , traçadas a partir do ponto A pertencente a uma circunferência Γ cortam novamente a circunferência em B e C , e cortam uma perpendicular ao diâmetro que passa por A em B' e C' . Prove que os pontos B, C, B', C' são concíclicos.
23. São dados o triângulo ABC e a reta r . Sejam A', B' e C' os simétricos de A, B e C , respectivamente, em relação a r . Sejam a, b e c as retas traçadas a partir dos vértices A, B e C ortogonais a $B'C', C'A'$ e $A'B'$, respectivamente. Prove que as retas a, b e c cortam-se em um ponto do circuncírculo do triângulo ABC .
24. (Banco da IMO 2011) Seja ABC um triângulo com incentro I e circuncírculo ω . Sejam D e E os outros pontos de intersecção de ω com as retas AI e BI , respectivamente. A corda DE encontra AC no ponto F , e BC no ponto G . Seja P o ponto de intersecção entre a reta por F paralela a AD e a reta por G paralela a BE . Suponha que as tangentes a ω em A e B encontrem-se em um ponto K . Prove que as três retas AE, BD e KP são concorrentes ou paralelas.
25. (Taiwan TST 2014) Let M be any point on the circumcircle of $\triangle ABC$. Suppose the tangents from M to the incircle meet BC at two points X_1 and X_2 . Prove that the circumcircle of $\triangle MX_1X_2$ intersects the circumcircle of $\triangle ABC$ again at the tangency point of the A -mixtilinear incircle.
26. (PAGMO 2021) Let ABC be a triangle with incenter I , and A -excenter Γ . Let A_1, B_1, C_1 be the points of tangency of Γ with BC, AC and AB , respectively. Suppose IA_1, IB_1 and IC_1 intersect Γ for the second time at points A_2, B_2, C_2 , respectively. M is the midpoint of segment AA_1 . If the intersection of A_1B_1 and A_2B_2 is X , and the intersection of A_1C_1 and A_2C_2 is Y , prove that $MX = MY$.
27. (Romênia Stars 2017) Let ABC be a triangle, let M_A be the midpoint of the side BC , and let P_A be the orthogonal projection of A on the line BC ; similarly, define M_B, P_B and M_C, P_C . The lines $M_B M_C$ and $P_B P_C$ meet at S_A , and the tangent of the circle ABC at A meets the line BC at T_A ; similarly, define S_B, T_B and S_C, T_C . Show that the perpendiculars through A, B, C to the lines $S_A T_A, S_B T_B, S_C T_C$, respectively, are concurrent.
28. (Shortlist IMO 2020) Let $ABCD$ be a cyclic quadrilateral with no two sides parallel. Let K, L, M , and N be points lying on sides AB, BC, CD , and DA , respectively, such that $KLMN$ is a rhombus with $KL \parallel AC$ and $LM \parallel BD$. Let $\omega_1, \omega_2, \omega_3$, and ω_4 be the incircles of triangles ANK, BKL, CLM , and DMN , respectively. Prove that the internal common tangents to ω_1 and ω_3 and the internal common tangents to ω_2 and ω_4 are concurrent.