

Álgebra: soluções

Carlos Shine

1. Seja

$$x = 2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{4 + \frac{1}{\cdots + \frac{1}{2026}}}}.$$

Então queremos calcular

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{1 + \frac{1}{x-1}} = \frac{1}{x} + \frac{x-1}{x-1+1} = \frac{1+(x-1)}{x} = 1.$$

2. Observando que $x \neq y$ e $\frac{m}{n} = \frac{p}{q} = \frac{m-p}{n-q}$,

$$\frac{yz - x^2}{1-x} = \frac{xz - y^2}{1-y} = \frac{yz - x^2 - zx + y^2}{1-x-1+y} = \frac{z(y-x) + (y+x)(y-x)}{y-x} = x + y + z.$$

3. Sejam $x = a - b$, $y = b - c$ e, conseqüentemente, $c - a = -x - y$. Então queremos calcular

$$E = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{(-x-y)^2}.$$

Poderíamos abrir toda a conta, mas é mais vantagem fazer isso aos poucos:

$$\begin{aligned} E &= \frac{(x+y)^2 y^2 + (x+y)^2 x^2 + x^2 y^2}{(xy(x+y))^2} = \frac{(x^2+y^2)(x^2+y^2+2xy) + (xy)^2}{(xy(x+y))^2} \\ &= \frac{(x^2+y^2)^2 + 2(x^2+y^2)xy + (xy)^2}{(xy(x+y))^2} = \left(\frac{x^2+y^2+xy}{xy(x+y)} \right)^2, \end{aligned}$$

que é o quadrado do racional $\frac{x^2+y^2+xy}{xy(x+y)}$.

4. Somando 1 a todas as frações, obtemos

$$\frac{x+y+z+t}{y+z+t} = \frac{x+y+z+t}{z+t+x} = \frac{x+y+z+t}{t+x+y} = \frac{x+y+z+t}{x+y+z}.$$

Assim, ou $x+y+z+t=0$, para o qual a expressão dada é igual a $4 \cdot (-1) = -4$, ou $x=y=z=t$, para o qual a expressão dada é igual a $4 \cdot 1 = 4$.

5. Fatorando obtemos

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2 + \sqrt[3]{x^4 y^2}} + \sqrt{y^2 + \sqrt[3]{x^2 y^4}} &= \sqrt{x^2 + x^{4/3} y^{2/3}} + \sqrt{y^2 + x^{2/3} y^{4/3}} \\ &= \sqrt{x^{4/3} (x^{2/3} + y^{2/3})} + \sqrt{y^{4/3} (x^{2/3} + y^{2/3})} \\ &= (x^{2/3} + y^{2/3})^{1/2} (x^{2/3} + y^{2/3}) \\ &= (x^{2/3} + y^{2/3})^{3/2}. \end{aligned}$$

Logo

$$(x^{2/3} + y^{2/3})^{3/2} = a \iff x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}.$$

6. (a) $x^5 + x^4 + 1 = x^5 + x^4 + x^3 - x^3 + 1 = x^3(x^2 + x + 1) - (x - 1)(x^2 + x + 1) = (x^2 + x + 1)(x^3 - x + 1)$.
 (b) Sendo $x = a - b$ e $y = b - c$, $c - a = -x - y$, de modo que $(a - b)^3 + (b - c)^3 + (c - a)^3 = x^3 + y^3 - (x + y)^3 = -3xy(x + y) = 3(a - b)(b - c)(c - a)$.
 (c) $ab(a^2 - b^2) + bc(b^2 - c^2) + ca(c^2 - a^2) = ab(a^2 - b^2) + bc(b^2 - c^2) - ca(a^2 - b^2 + b^2 - c^2) = (a^2 - b^2)(ab - ca) + (b^2 - c^2)(bc - ca) = a(a - b)(a + b)(b - c) + c(b - c)(b + c)(b - a) = (a - b)(b - c)(a^2 + ab - bc - c^2) = (a - b)(b - c)(b(a - c) + (a - c)(a + c)) = (a - b)(b - c)(a - c)(a + b + c)$.
 (d) Sendo $(a + b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a + b) \iff a^3 + b^3 = (a + b)^3 - 3ab(a + b)$,

$$\begin{aligned} a^3 + b^3 + c^3 - 3abc &= (a + b)^3 + c^3 - 3ab(a + b) - 3abc \\ &= (a + b + c)((a + b)^2 - (a + b)c + c^2) - 3ab(a + b + c) \\ &= (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca). \end{aligned}$$

(e) $x^4 + 4y^4 = x^4 + 4x^2y^2 + 4y^4 - 4x^2y^2 = (x^2 + 2y^2)^2 - (2xy)^2 = (x^2 + 2y^2 + 2xy)(x^2 + 2y^2 - 2xy) = ((x + y)^2 + y^2)((x - y)^2 + y^2)$.

(f) Seja $x = a^2$. Então a expressão é

$$\begin{aligned} -x^2 + 2(b^2 + c^2)x - (b^2 - c^2)^2 &= -(x^2 - ((b - c)^2 + (b + c)^2)x + (b - c)^2(b + c)^2) \\ &= -(x - (b - c)^2)(x - (b + c)^2) \\ &= -(a^2 - (b - c)^2)(a^2 - (b + c)^2) \\ &= -(a - b + c)(a + b - c)(a + b + c)(a - b - c) \\ &= (a + b + c)(-a + b + c)(a - b + c)(a + b - c) \end{aligned}$$

(g) O segredo é fatorar aos poucos: sendo $2(a^2 + b^2) - (a + b)^2 = (a - b)^2$,

$$\begin{aligned} &2(x^4 + y^4 + z^4 + w^4) - (x^2 + y^2 + z^2 + w^2)^2 + 8xyzw \\ &= 2(x^4 + y^4 + z^4 + w^4) - (x^2 + y^2)^2 - 2(x^2 + y^2)(z^2 + w^2) - (z^2 + w^2)^2 + 8xyzw \\ &= (x^2 - y^2)^2 + (z^2 - w^2)^2 - 2(x^2 - y^2 + 2y^2)(z^2 + w^2) + 8xyzw \\ &= (x^2 - y^2)^2 + (z^2 - w^2)^2 - 2(x^2 - y^2)(z^2 + w^2) - 4y^2(z^2 + w^2) + 8xyzw \\ &= (x^2 - y^2)^2 + (z^2 - w^2)^2 - 2(x^2 - y^2)(z^2 - w^2) - 4y^2(z^2 + w^2) - 4(x^2 - y^2)w^2 + 8xyzw \\ &= (x^2 - y^2 - z^2 + w^2)^2 - 4y^2z^2 - 4x^2w^2 + 8xyzw \\ &= (x^2 - y^2 - z^2 + w^2)^2 - (2xw - 2yz)^2 \\ &= (x^2 - y^2 - z^2 + w^2 - 2xw + 2yz)(x^2 - y^2 - z^2 + w^2 + 2xw - 2yz) \\ &= ((x - w)^2 - (y - z)^2)((x + w)^2 - (y + z)^2) \\ &= (x + y + z + w)(x + y - z - w)(x - y - z + w)(x - y + z - w) \end{aligned}$$

7. Note que $n^4 + 324 = n^4 + 4 \cdot 3^4 = ((n + 3)^2 + 9)((n - 3)^2 + 9)$. Assim,

$$\frac{(10^4 + 324)(22^4 + 324)(34^4 + 324)(46^4 + 324)(58^4 + 324)}{(4^4 + 324)(16^4 + 324)(28^4 + 324)(40^4 + 324)(52^4 + 324)}.$$

é igual a

$$\frac{(7^2 + 9)(13^2 + 9)(19^2 + 9)(25^2 + 9)(31^2 + 9)(37^2 + 9)(43^2 + 9)(49^2 + 9)(55^2 + 9)(61^2 + 9)}{(1^2 + 9)(7^2 + 9)(13^2 + 9)(19^2 + 9)(25^2 + 9)(31^2 + 9)(37^2 + 9)(43^2 + 9)(49^2 + 9)(55^2 + 9)}.$$

Simplificando e observando que $61^2 + 9 = (60 + 1)^2 + 9 = 60^2 + 2 \cdot 60 + 10$, obtemos

$$\frac{60^2 + 2 \cdot 60 + 10}{10} = 6 \cdot 60 + 12 + 1 = 373.$$

8. Supondo, é claro, $a, b, c, a + b + c$ não nulos,

$$\begin{aligned}\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} &= \frac{1}{a+b+c} \iff \frac{a+b}{ab} = -\frac{a+b+c-c}{c(a+b+c)} \\ &\iff (a+b)(c(a+b+c)) = -(a+b)ab \\ &\iff (a+b)(ab+ac+bc+c^2) = 0 \\ &\iff (a+b)(b+c)(c+a) = 0,\end{aligned}$$

ou seja, $a = -b$ ou $b = -c$ ou $c = -a$. Elevando a qualquer ímpar m , obtemos ainda $a^m = -b^m$ ou $b^m = -c^m$ ou $c^m = -a^m$, e podemos reverter todas as contas até obter

$$\frac{1}{a^m} + \frac{1}{b^m} + \frac{1}{c^m} = \frac{1}{a^m + b^m + c^m}.$$

9. (a) $x^2 - 2 = t^2 + \frac{1}{t^2}$.

(b) Elevando ao quadrado, temos

$$a_{n+1}^2 = a_n^2 + \frac{1}{a_n^2} + 2 > a_n^2 + 2,$$

$$\text{logo } a_{1996} > a_0^2 + 2 \cdot 1996 > 3992 > 3969 = 63^2.$$

10. Temos $1+m = \frac{2a}{a+b}$, $1+n = \frac{2b}{b+c}$, $1+p = \frac{2c}{c+a}$, e $1-m = \frac{2b}{a+b}$, $1-n = \frac{2c}{b+c}$ e $1-p = \frac{2a}{c+a}$. Assim, ambas as expressões são iguais a

$$\frac{8abc}{(a+b)(b+c)(c+a)}.$$

11. Desenvolvendo a identidade anterior, obtemos

$$1+m+n+p+mn+np+pm+mnp = 1-m-n-p+mn+np+pm-mnp \iff m+n+p = mnp.$$

Com isso, se $mnp = \frac{(a-b)(b-c)(c-a)}{(a+b)(b+c)(c+a)} = \frac{1}{11}$ então $m+n+p = \frac{1}{11}$, ou seja,

$$\frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a} = \frac{1}{2} \left(\frac{a-b}{a+b} + 1 + \frac{b-c}{b+c} + 1 + \frac{c-a}{c+a} + 1 \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{11} + 3 \right) = \frac{17}{11}.$$

12. Fazendo $y = x + 1$, para se livrar do denominador “feio” $(x+1)^2$, temos

$$(y-1)^2 + \frac{(y-1)^2}{y^2} = 3 \iff y^2 - 2y + 1 + 1 - 2 \cdot \frac{1}{y} + \frac{1}{y^2} = 3 \iff y^2 + \frac{1}{y^2} - 2 \left(y + \frac{1}{y} \right) - 1 = 0$$

Sendo $z = y + \frac{1}{y}$, $y^2 + \frac{1}{y^2} = z^2 - 2$, e temos

$$z^2 - 2 - 2z - 1 = 0 \iff z = -1 \text{ ou } z = 3.$$

Agora, $y + \frac{1}{y} = -1$ não tem solução real, e

$$y + \frac{1}{y} = 3 \iff y = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2},$$

o que nos dá $x = y - 1 = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$, ou seja,

$$V = \left\{ \frac{1 + \sqrt{5}}{2}, \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right\}.$$

13. Sejam $A = \sqrt{x - \frac{1}{x}}$ e $B = \sqrt{1 - \frac{1}{x}}$. Assim, $A + B = x$ e $A^2 - B^2 = x - 1$. Com isso, $A - B = \frac{A^2 - B^2}{A + B} = \frac{x - 1}{x} = 1 - \frac{1}{x}$.

Logo $2A = (A + B) + (A - B) = x + 1 - \frac{1}{x} = A^2 + 1 \implies A^2 - 2A + 1 = 0 \iff A = 1$. Portanto

$$x - \frac{1}{x} = 1 \iff x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \text{ ou } x = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}.$$

Note que $\frac{1 - \sqrt{5}}{2} < 0$ e $x = A + B$ é a soma de duas raízes quadradas, de modo que $x \geq 0$. Logo $x = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$ não é solução.

Se $x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$, sabemos que $x^2 = x + 1 \iff \frac{1}{x} = x - 1 > 0$, logo

$$A + B = \sqrt{x - (x - 1)} + \sqrt{\frac{x - 1}{x}} = 1 + \sqrt{\frac{1}{x}} = 1 + \frac{1}{x} = \frac{x + 1}{x} = \frac{x^2}{x} = x,$$

ou seja, $V = \left\{ \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right\}$.

14.

$$\begin{aligned} \frac{x - a - b}{c} + \frac{x - b - c}{a} + \frac{x - c - a}{b} = 3 &\iff \frac{x - a - b - c}{c} + \frac{x - a - b - c}{a} + \frac{x - a - b - c}{b} = 0 \\ &\iff (x - a - b - c) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) = 0. \end{aligned}$$

Assim, se $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \neq 0$ temos $V = \{a + b + c\}$ e se $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 0$ temos $V = \mathbb{R}$.

15. Parece inusitado, mas é melhor isolar o 5: sendo $x \geq 0$,

$$5 - \sqrt{5 + x} = x^2 \iff \begin{cases} (5 - x^2)^2 = 5 + x \\ 5 - x^2 \geq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 5^2 - (2x^2 + 1)5 + x^4 - x = 0 \\ x^2 \leq 5 \end{cases}$$

O discriminante da “equação” do segundo grau é $(2x^2 + 1)^2 - 4(x^4 - x) = 4x^2 + 4x + 1 = (2x + 1)^2$. Sorte grande! Desse modo,

$$\begin{cases} 5 = \frac{2x^2 + 1 + 2x + 1}{2} \text{ ou } 5 = \frac{2x^2 + 1 - 2x - 1}{2} \\ x^2 \leq 5 \end{cases} \iff \begin{cases} 5 = x^2 + x + 1 \text{ ou } 5 = x^2 - x \\ x^2 \leq 5 \end{cases}$$

Como $5 = x^2 - x \leq x^2$, com igualdade só com $x = 0$, que não é viável, temos

$$x^2 + x - 4 = 0 \iff x = \frac{-1 \pm \sqrt{21}}{2}.$$

Sendo $x \geq 0$, $V = \left\{ \frac{1 + \sqrt{21}}{2} \right\}$.

Outra solução é fazer $y = \sqrt{5 + x}$. Assim, $x^2 = 5 - y$ e $y^2 = 5 + x$. Subtraindo temos $x^2 - y^2 = -x - y \iff x + y = 0$ ou $x - y = -1$. O primeiro caso é impossível pois $x, y \geq 0$ e não é possível ter $x = y = 0$. Assim, $x^2 = 5 - (x + 1) \iff x^2 + x - 4 = 0$, e terminamos do mesmo jeito.

16. (a)

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{b^2 - bc + c^2}{a} + \frac{a^2}{b+c} - \frac{3}{\frac{1}{b} + \frac{1}{c}} \right) \cdot \frac{\frac{2}{b} + \frac{2}{c}}{\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca}} + (a+b+c)^2 \\
&= \left(\frac{b^2 - bc + c^2}{a} + \frac{a^2}{b+c} - \frac{3bc}{b+c} \right) \cdot \frac{2a(b+c)}{a+b+c} + (a+b+c)^2 \\
&= \frac{(b+c)(b^2 - bc + c^2) + a(a^2 - 3bc)}{a(b+c)} \cdot \frac{2a(b+c)}{a+b+c} + (a+b+c)^2 \\
&= \frac{2(a^3 + b^3 + c^3 - 3abc)}{a+b+c} + (a+b+c)^2 \\
&= \frac{2(a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)}{a+b+c} + (a+b+c)^2 \\
&= 2a^2 + 2b^2 + 2c^2 - 2ab - 2bc - 2ca + a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca \\
&= 3(a^2 + b^2 + c^2).
\end{aligned}$$

(b) O numerador é

$$\begin{aligned}
& \frac{b^2 - c^2}{a} + \frac{c^2 - a^2}{b} + \frac{a^2 - b^2}{c} \\
&= \frac{(b-c)(b+c)}{a} + (b-c) + \frac{(c-a)(c+a)}{b} + (c-a) + \frac{(a-b)(a+b)}{c} + (a-b) \\
&= \frac{b-c}{a}(b+c+a) + \frac{c-a}{b}(c+a+b) + \frac{a-b}{c}(a+b+c) \\
&= (a+b+c) \left(\frac{a-b}{c} + \frac{b-c}{a} + \frac{c-a}{b} \right)
\end{aligned}$$

Com isso, a fração é igual a $a+b+c$.

(c) Tirando o mínimo obtemos $(a-b)(b-c)(c-a)$, e o numerador, usando novamente $b-a = -(c-b+a-c)$,

$$\begin{aligned}
& a^2(a+b)(a+c)(c-b) + b^2(b+a)(b+c)(a-c) + c^2(c+a)(c+b)(b-a) \\
&= (a+c)(c-b)(a^2(a+b) - c^2(b+c)) + (b+c)(a-c)(b^2(a+b) - c^2(a+c)) \\
&= (a+c)(c-b)(a^3 - c^3 + b(a^2 - c^2)) + (b+c)(a-c)(b^3 - c^3 + a(b^2 - c^2)) \\
&= (a+c)(c-b)(a-c)(a^2 + ac + c^2 + ab + bc) + (b+c)(a-c)(b-c)(b^2 + bc + c^2 + ab + ca) \\
&= (b-c)(c-a)((a+c)(a^2 + c^2 + ab + bc + ca) - (b+c)(b^2 + c^2 + ab + bc + ca)) \\
&= (b-c)(c-a)(a^3 + a^2c + c^2a - b^3 - b^2c - c^2b + (ab + bc + ca)(a-b)) \\
&= (a-b)(b-c)(c-a)(a^2 + b^2 + ab + ac + bc + c^2 + ab + bc + ca) \\
&= (a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c)^2,
\end{aligned}$$

e a fração é igual a $(a+b+c)^2$.

(d) Já fatoramos o denominador! (Veja o problema 6.f). Assim, cortamos $a+b+c$ e $a+b-c$ e sobra

$$\frac{a-b}{(-a+b+c)(a-b+c)}.$$

(e) Sabemos (problema 6.b) que $(a-b)^3 + (b-c)^3 + (c-a)^3 = 3(a-b)(b-c)(c-a)$, mas podemos também usar esse mesmo problema trocando a, b, c pelo seus quadrados! Assim,

$$\frac{(a^2 - b^2)^3 + (b^2 - c^2)^3 + (c^2 - a^2)^3}{(a-b)^3 + (b-c)^3 + (c-a)^3} = \frac{3(a^2 - b^2)(b^2 - c^2)(c^2 - a^2)}{3(a-b)(b-c)(c-a)} = (a+b)(b+c)(c+a).$$

17. Primeiro abrimos o segundo fator: lembrando que $x + y + z = 0$,

$$\begin{aligned}
 \frac{z}{x-y} + \frac{x}{y-z} + \frac{y}{z-x} &= \frac{-x-y}{x-y} + \frac{x}{y-z} + \frac{y}{z-x} \\
 &= x \left(\frac{1}{y-z} - \frac{1}{x-y} \right) + y \left(\frac{1}{z-x} - \frac{1}{x-y} \right) \\
 &= x \cdot \frac{x+z-2y}{(y-z)(x-y)} + y \cdot \frac{2x-y-z}{(z-x)(x-y)} \\
 &= x \cdot \frac{-y-2y}{(y-z)(x-y)} + y \cdot \frac{2x-(-x)}{(z-x)(x-y)} \\
 &= \frac{3xy}{x-y} \left(\frac{1}{z-x} - \frac{1}{y-z} \right) = \frac{3xy(x+y-2z)}{(x-y)(y-z)(z-x)} \\
 &= -\frac{9xyz}{(x-y)(y-z)(z-x)}.
 \end{aligned}$$

O primeiro fator na verdade é praticamente a mesma conta: sendo $p = y - z$, $q = z - x$ e $r = x - y$, $p + q + r = 0$, $p - q = x + y - 2z = -3z$, $q - r = y + z - 2x = -3x$ e $r - p = x + z - 2y = -3y$. Com isso, o primeiro fator é

$$-3 \cdot \frac{-9pqr}{(p-q)(q-r)(r-p)} = \frac{27(x-y)(y-z)(z-x)}{-27xyz} = \frac{(x-y)(y-z)(z-x)}{-xyz},$$

e o produto pedido é

$$-\frac{9xyz}{(x-y)(y-z)(z-x)} \cdot \frac{(x-y)(y-z)(z-x)}{-xyz} = 9.$$

18. Se $P_1(x)$ e $P_2(x)$ satisfazem a equação, então $mP_1(x) + nP_2(x)$ também satisfaz. Basta então checar para $P(x) = x^2$ e $P(x) = x^4$.

Para $P(x) = x^2$, lembrando que $ab + bc + ca = 0$,

$$\begin{aligned}
 (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 &= 2a^2 + 2b^2 + 2c^2 - 2(ab + bc + ca) \\
 &= 2(a^2 + b^2 + c^2) = 2(a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca) \\
 &= 2(a+b+c)^2.
 \end{aligned}$$

Para $P(x) = x^4$, você pode abrir a conta toda. Mas como já sabemos que a identidade é verdadeira para x^2 ,

$$\begin{aligned}
 4(a+b+c)^4 &= (2(a+b+c)^2)^2 = ((a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2)^2 \\
 &= (a-b)^4 + (b-c)^4 + (c-a)^4 + 2((a-b)^2(b-c)^2 + (a-b)^2(c-a)^2 + (b-c)^2(c-a)^2).
 \end{aligned}$$

Agora,

$$0^2 = ((a-b) + (b-c) + (c-a))^2 = (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 + 2((a-b)(b-c) + (b-c)(c-a) + (c-a)(a-b)),$$

logo

$$2((a-b)(b-c) + (b-c)(c-a) + (c-a)(a-b)) = -2(a+b+c)^2,$$

ou seja,

$$(a-b)(b-c) + (b-c)(c-a) + (c-a)(a-b) = -(a+b+c)^2.$$

Elevando ao quadrado,

$$((a-b)(b-c) + (b-c)(c-a) + (c-a)(a-b))^2 = (a+b+c)^4.$$

Ao elevar o primeiro membro ao quadrado, os termos $2xy$ são da forma $2(a-b)(b-c)(c-a)t$, em que $t \in \{a-b, b-c, c-a\}$. Ao somar esses termos, vai somar zero e cortar. Logo

$$((a-b)(b-c))^2 + ((b-c)(c-a))^2 + ((c-a)(a-b))^2 = (a+b+c)^4.$$

Substituindo lá em cima temos

$$4(a+b+c)^4 = (a-b)^4 + (b-c)^4 + (c-a)^4 + 2(a+b+c)^4,$$

que nos dá a identidade desejada.

19. Sendo $a+b+c=0$,

$$a^3 + b^3 + c^3 = a^3 + b^3 - (a+b)^3 = -3ab(a+b).$$

Vamos para $a^4 + b^4 + c^4$. Dá para abrir direto, mas vamos calcular $a^2 + b^2 + c^2$ primeiro:

$$a^2 + b^2 + c^2 = a^2 + b^2 + (-a-b)^2 = 2(a^2 + b^2 + ab).$$

Elevando ao quadrado,

$$a^4 + b^4 + c^4 + 2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) = 4(a^2 + b^2 + ab)^2.$$

Mas

$$\begin{aligned} a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 &= a^2b^2 + c^2(a^2 + b^2) = a^2b^2 + (a+b)^2(a^2 + b^2) \\ &= (a^2 + b^2)(a^2 + b^2 + 2ab) + (ab)^2 \\ &= (a^2 + b^2)^2 + 2(a^2 + b^2)ab + (ab)^2 = (a^2 + b^2 + ab)^2. \end{aligned}$$

Portanto

$$a^4 + b^4 + c^4 + 2(a^2 + b^2 + ab)^2 = 4(a^2 + b^2 + ab)^2 \iff a^4 + b^4 + c^4 = 2(a^2 + b^2 + ab)^2.$$

Para $a^5 + b^5 + c^5$, há vários caminhos. Vamos simplesmente abrir $c^5 = -(a+b)^5 = -(a+b)^2(a+b)^3$. Fazendo a conta você obtém $(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$ (se você conhece o binômio de Newton você consegue chegar direto nessa conta). Assim,

$$a^5 + b^5 + c^5 = -5ab(a^3 + b^3 + 2ab(a+b)) = -5ab(a+b)(a^2 - ab + b^2 + 2ab) = -5ab(a+b)(a^2 + b^2 + ab).$$

Aí é só substituir:

$$\frac{(a^3 + b^3 + c^3)^2(a^4 + b^4 + c^4)}{(a^5 + b^5 + c^5)^2} = \frac{(-3ab(a+b))^2 \cdot 2(a^2 + b^2 + ab)^2}{(-5ab(a+b)(a^2 + b^2 + ab))^2} = \frac{18}{25}.$$

20. Completando os cubos, temos $(a-1)^3 + 2(a-1) = -2$ e $(b-1)^3 + 2(b-1) = 2$. Sendo $x = a-1$ e $y = b-1$, somando temos

$$x^3 + y^3 + 2(x+y) = 0 \iff (x+y)(x^2 - xy + y^2 + 2) = 0.$$

Como $x^2 - xy + y^2 + 2 = \frac{1}{4}((x-2y)^2 + 3x^2) + 2 > 0$, $x+y = 0$, ou seja, $a-1+b-1 = 0 \iff a+b = 2$.

21. Por enquanto, sejam $x = (bc - a^2)^{-1}$, $y = (ca - b^2)^{-1}$ e $z = (ab - c^2)^{-1}$. Assim, $x + y + z = 0$ e queremos calcular $ax^2 + by^2 + cz^2$.

Parece loucura, mas vale a pena fazer

$$ax^2 + by^2 + cz^2 = a(-y-z)^2 + b(-z-x)^2 + c(-x-y)^2 = (b+c)x^2 + (c+a)y^2 + (a+b)z^2 + 2ayz + 2bzx + 2cxy.$$

Para fatorar um pouco mais, some $ax^2 + by^2 + cz^2$ dos dois lados:

$$2(ax^2 + by^2 + cz^2) = (a+b+c)(x^2 + y^2 + z^2) + 2(ayz + bzx + cxy).$$

Só mais uma conta: como $x + y + z = 0$, $x^2 + y^2 + z^2 = -2yz - 2zx - 2xy$, e obtemos

$$ax^2 + by^2 + cz^2 = ayz + bzx + cxy - (a+b+c)(yz + zx + xy) = -(b+c)yz - (c+a)zx - (a+b)xy.$$

Tirando o mínimo, obtemos

$$(b+c)yz + (c+a)zx + (a+b)xy = \frac{(b+c)(bc-a^2) + (c+a)(ca-b^2) + (a+b)(ab-c^2)}{(bc-a^2)(ca-b^2)(ab-c^2)},$$

e abrindo a conta fica fácil de ver que o numerador é zero, já que $(b+c)(bc-a^2) = b^2c + bc^2 - a^2b - a^2c$, e aparecem dois de cada um dos termos a^2b e análogos, um com o sinal de mais e outro com o sinal de menos.

22. O denominador tem grau maior do que o numerador, então é mais interessante tentar fatorar o denominador primeiro. Vai que aparece o numerador como fator direto.

$$bc(y-z)^2 + ca(z-x)^2 + ab(x-y)^2 = a(b+c)x^2 + b(c+a)y^2 + c(a+b)z^2 - 2(abxy + bcyz + cazx).$$

Agora, $(ax + by + cz)^2 = 0 \iff -2(abxy + bcyz + cazx) = a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2$. Logo

$$\begin{aligned} bc(y-z)^2 + ca(z-x)^2 + ab(x-y)^2 &= a(b+c)x^2 + b(c+a)y^2 + c(a+b)z^2 + a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2 \\ &= a(a+b+c)x^2 + b(a+b+c)y^2 + c(a+b+c)z^2 \\ &= (a+b+c)(ax^2 + by^2 + cz^2). \end{aligned}$$

Sorte grande! O numerador era exatamente um dos fatores! Logo

$$\frac{ax^2 + by^2 + cz^2}{bc(y-z)^2 + ca(z-x)^2 + ab(x-y)^2} = \frac{1}{a+b+c}.$$

23. Temos $AB = (a+b)^2 - (c+d)^2$ e $A^2 + B^2 = 2(a+b)^2 + 2(c+d)^2$ (imagine $x = a+b$ e $y = c+d$ para enxergar essas contas), logo usando $(m+n)^4 = m^4 + n^4 + 4mn(m^2 + n^2) + 6m^2n^2$ (abra $(m+n)^4 = ((m+n)^2)^2$ ou use o binômio de Newton),

$$\begin{aligned} AB(A^2 + B^2) &= 2((a+b)^4 - (c+d)^4) \\ &= 2(a^4 + b^4 + 4ab(a^2 + b^2) + 6a^2b^2 - c^4 - d^4 - 4cd(c^2 + d^2) - 6c^2d^2) \\ &= 2(a^4 + b^4 - c^4 - d^4 + 6a^2b^2 - 6c^2d^2). \end{aligned}$$

A conta com $C = a + (-b) + c + (-d)$ e $D = a + (-b) - c - (-d)$ troca b por $-b$ e d por $-d$, e o resultado vai ser o mesmo (os termos que cancelam ficam com os sinais opostos)! Logo

$$AB(A^2 + B^2) = CD(C^2 + D^2).$$

24. Temos

$$(a+b)(b+c)(c+a) = a^2b + a^2c + b^2a + b^2c + c^2a + c^2b + 2abc.$$

Podemos obter $a^2b + a^2c + b^2a + b^2c + c^2a + c^2b$ multiplicando $a+b+c$ por $a^2 + b^2 + c^2$ ou por $ab + bc + ca$ (sobrando alguns termos):

$$a^2b + a^2c + b^2a + b^2c + c^2a + c^2b = (a+b+c)(a^2+b^2+c^2) - (a^3+b^3+c^3) = (a+b+c)(ab+bc+ca) - 3abc.$$

Com isso,

$$(a+b)(b+c)(c+a) = (a+b+c)(a^2+b^2+c^2) - (a^3+b^3+c^3) + 2abc = (a+b+c)(ab+bc+ca) - abc.$$

Olha só! Apareceu $a^3 + b^3 + c^3$. Assim,

$$(a+b)(b+c)(c+a) + a^3 + b^3 + c^3 = (a+b+c)(a^2+b^2+c^2) + 2abc.$$

Somando $2(a+b)(c+a)(b+c) = 2(a+b+c)(ab+bc+ca) - 2abc$ para cortar $2abc$, obtemos

$$3(a+b)(b+c)(c+a) + a^3 + b^3 + c^3 = (a+b+c)(a^2+b^2+c^2) + 2(a+b+c)(ab+bc+ca).$$

Que sorte! Fatora $a+b+c$ e sobra... $a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab+bc+ca) = (a+b+c)^2$. Logo, para todos a, b, c , independente da condição dada,

$$3(a+b)(b+c)(c+a) + a^3 + b^3 + c^3 = (a+b+c)^3.$$

Portanto $a^3 + b^3 + c^3 = (a+b)(b+c)(c+a)$ se, e somente se,

$$4(a+b)(b+c)(c+a) = (a+b+c)^3.$$

Com isso, queremos provar que

$$4(x+y)(y+z)(z+x) = (x+y+z)^3.$$

Por que toda essa conta? Porque é mais agradável trabalhar com somas do que com somas de cubos.

Agora, sendo $k = (b^2 + c^2 - a^2)x = (c^2 + a^2 - b^2)y = (a^2 + b^2 - c^2)z$,

$$\frac{x+y}{k} = \frac{1}{b^2 + c^2 - a^2} + \frac{1}{c^2 + a^2 - b^2} = \frac{2c^2}{(b^2 + c^2 - a^2)(c^2 + a^2 - b^2)}$$

e

$$\begin{aligned} \frac{x+y+z}{k} &= \frac{x+y}{k} + \frac{z}{k} = \frac{2c^2}{(b^2 + c^2 - a^2)(c^2 + a^2 - b^2)} + \frac{1}{a^2 + b^2 - c^2} \\ &= \frac{2c^2(a^2 + b^2 - c^2) + (b^2 + c^2 - a^2)(c^2 + a^2 - b^2)}{(b^2 + c^2 - a^2)(c^2 + a^2 - b^2)(a^2 + b^2 - c^2)} \\ &= \frac{2a^2b^2 + 2b^2c^2 - 2c^4 + c^4 - (a^2 - b^2)^2}{(b^2 + c^2 - a^2)(c^2 + a^2 - b^2)(a^2 + b^2 - c^2)} \\ &= \frac{2a^2b^2 + 2b^2c^2 + 2c^2a^2 - a^4 - b^4 - c^4}{(b^2 + c^2 - a^2)(c^2 + a^2 - b^2)(a^2 + b^2 - c^2)} \end{aligned}$$

Opa! Esse numerador é conhecido! Então

$$\frac{x+y+z}{k} = \frac{(a+b+c)(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)}{(b^2 + c^2 - a^2)(c^2 + a^2 - b^2)(a^2 + b^2 - c^2)}.$$

Queremos então

$$4(x+y)(y+z)(z+x) = (x+y+z)^3,$$

ou seja,

$$4 \cdot \frac{8a^2b^2c^2}{(b^2+c^2-a^2)^2(c^2+a^2-b^2)^2(a^2+b^2-c^2)^2} = \frac{(a+b+c)^3(b+c-a)^3(c+a-b)^3(a+b-c)^3}{(b^2+c^2-a^2)^3(c^2+a^2-b^2)^3(a^2+b^2-c^2)^3}$$

Ajeitando, queremos provar que

$$32a^2b^2c^2(b^2+c^2-a^2)(c^2+a^2-b^2)(a^2+b^2-c^2) = (a+b+c)^3(b+c-a)^3(c+a-b)^3(a+b-c)^3.$$

Vamos tentar dar um jeito em $b^2+c^2-a^2$, que é meio desagradável por estar no grau “errado” (nesse problema, o grau “bom” é 3, não 2). Multiplicando por $b+c-a$ para aparecer $a^3+b^3+c^3$ temos

$$(b+c-a)(b^2+c^2-a^2) = a^3+b^3+c^3-a^2b-a^2c-b^2a+b^2c-c^2a+c^2b.$$

Substituindo $a^3+b^3+c^3 = a^2b+a^2c+b^2a+b^2c+c^2a+c^2b+2abc$, obtemos

$$(b+c-a)(b^2+c^2-a^2) = 2b^2c+2c^2b+2abc = 2bc(a+b+c).$$

Com isso, queremos

$$32a^2b^2c^2 \cdot 8a^2b^2c^2(a+b+c)^3 = (a+b+c)^3(b+c-a)^4(c+a-b)^4(a+b-c)^4,$$

ou seja,

$$4^4a^4b^4c^4 = (b+c-a)^4(c+a-b)^4(a+b-c)^4.$$

Se conseguirmos

$$(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c) = \pm 4abc,$$

o problema acaba. Mas aí é só ter coragem: sendo $s = a+b+c$,

$$\begin{aligned} (b+c-a)(c+a-b)(a+b-c) &= (s-2a)(s-2b)(s-2c) \\ &= s^3 - 2(a+b+c)s^2 + 4(ab+bc+ca)s - 8abc \\ &= s^3 - 2s^3 + 4(ab+bc+ca)s - 8abc \\ &= -s^3 + 4(ab+bc+ca)s - 8abc. \end{aligned}$$

Mas, faz um tempo, vimos que $4(ab+bc+ca)s = 4(a+b)(b+c)(c+a) + 4abc = s^3 + 4abc$, logo

$$(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c) = -4abc,$$

e o problema finalmente acabou.