Contagem Dupla

Cecília Mileski

29ª Semana Olímpica - Janeiro 2026

1 Introdução

Como o próprio nome diz, a técnica da **contagem dupla** se baseia em calcular certo conjunto de duas maneiras diferentes, com o objetivo de obter igualdades ou desigualdades que revelem relações importantes entre seus elementos.

Deixando esse texto bonito aí de lado, na matemática, geralmente fazemos isso o tempo todo. Por exemplo, quando afirmamos que "o quadrado de um número é o dobro dele". Se você prestar atenção, estamos descrevendo uma mesma quantidade de duas formas diferentes: como o "quadrado de um número" e "como o dobro desse número". Em outras palavras, estamos contando a mesma coisa de dois jeitos diferentes.

Mas afinal, e aí? Como isso pode ficar mais interessante?

2 Para Aquecer

Para começar a explorar a ideia dessa técnica, vamos resolver alguns problemas conhecidos.

Problema 1. Em um torneio de xadrez, cada participante joga com cada um dos outros. Uma vitória vale 1 ponto, um empate vale 1/2 ponto e uma derrota vale 0 ponto. Cada jogador ganhou a mesma quantidade de pontos contra homens e contra mulheres. Prove que a quantidade de participantes do torneio é um quadrado perfeito.

DICA 1: Como calcular a quantidade de pontos totais a partir da quantidade de jogos?

DICA 2: Como calcular a quantidade de pontos totais olhando para a condição de que "cada jogador ganhou a mesma quantidade de pontos contra homens e contra mulheres"?.

Problema 2. (Teorema de Euler) Um poliedro é um sólido delimitado por polígonos. Sejam V, A e F as quantidades de vértices, arestas e faces de um poliedro convexo, respectivamente. Prove que V - A + F = 2.

DICA 1: "Abra" o poliedro de forma que todas as suas faces fiquem contidas em uma das faces e conte de duas formas a soma dos ângulos internos S desse poliedro "esticado".

DICA 2: Calcule S a partir da soma dos ângulos internos das faces internas do poliedro esticado. Calcule S a partir do número de vértices do polígono.

Problema 3. Num concurso, há m candidatos e n juízes, onde $n \geq 3$ é ímpar. Cada candidato é avaliado por cada juiz, podendo ser aprovado ou reprovado. Sabe-se que os julgamentos de cada par de juízes coincidem em no máximo k candidatos. Prove que

$$\frac{k}{m} \geq \frac{n-1}{2n}$$

DICA 1: Monte uma tabela com n linha e m colunas. Preencha ela colocando um "x" na linha a e coluna b se, e somente se, o juiz a provar o candidato b. O que contaremos de duas formas?

DICA 2: Conte a quantidade de duplas de "x" em uma mesma coluna, o que isso significa? Quais as duas formas de contar?

3 Problemas

Os problemas estão sortidos, tente pensar em todos!

Problema 4. Existem 1000 cidades em Brazilândia e alguns pares de cidades são ligadas por uma estrada de terra. É possível viajar de uma cidade para qualquer outra através das estradas de terra. Prove que o governo de Brazilândia pode pavimentar algumas estradas de modo que de cada cidade saia um número ímpar de estradas pavimentadas.

Problema 5. Seja m um inteiro positivo relativamente primo com 6. Pintamos os vértices de um m-ágono regular com três cores, de modo que exista um número ímpar de vértices de cada cor. Prove que existe um triângulo isósceles cujos três vértices são de cores distintas.

Problema 6. Seja n um inteiro não negativo. Mostre que:

$$\sum_{k=0}^{n} k \cdot \binom{n}{k}^2 = n \cdot \binom{2n-1}{n-1}$$

Problema 7. Bruno pintou k casas de um tabuleiro $n \cdot n$ de preto. Ele observou que não existiam quatro casas pretas formando um um retângulo com lados paralelos aos lados do tabuleiro. Mostre que:

$$k \leq n(\frac{1+\sqrt{4n-3}}{2})$$

Problema 8. Com os dígitos 1 e 2 formamos 5 números de n dígitos de tal forma que dois quaisquer destes números coincidam em exatamente m casas decimais e não existe nenhuma casa decimal onde coincidam os 5 números. Demonstre que:

$$\frac{2}{5} \leq \frac{m}{n} \leq \frac{3}{5}$$

Problema 9. Um grupo de 10 pessoas foi a uma livraria. Sabe-se que:

- Todo mundo comprou exatamente 3 livros;
- Para quaisquer duas pessoas, existe pelo menos um livro que ambos compraram.

Qual é o menor número de pessoas que poderiam ter comprado o livro comprado pelo maior número de pessoas?

Problema 10. Mostre que:

$$\sum_{r=1}^{n} r^2 \binom{n}{r} = n(n+1)2^{n-2}$$

Dica: Tente abordar o problema por um argumento combinatório.

Problema 11. Um triângulo é um conjunto de três vértices ligados dois a dois. Prove que um grafo com m arestas e n vértices tem pelo menos

$$\frac{4m(m - \frac{n^2}{4})}{3n}$$

triângulos.

Problema 12. Calcule a quantidade de elementos do conjunto

$$S = \{(a_1, a_2, a_3, a_4) \in \mathbb{Z}_4 \mid 0 \leq a_1, a_2, a_3 < a_4 \leq n\}$$

Problema 13. Determine todos os valores de n tais que é possível dividir um triângulo em n triângulos de modo que não haja três vértices alinhados e em cada vértice incida o mesmo número de segmentos.

Problema 14. Seja $p_n(k)$ o total de permutações do conjunto 1, 2, 3,...,n que contêm exatamente k pontos fixos. Prove que

$$\sum_{k=1}^{n} k \cdot p_n(k) = n!$$

4 Referências

- Samuel, *Contagem Dupla*. Disponível em: `https://files.cercomp.ufg.br/weby/up/1170/o/Samuel10.pdf`

- Lopes, Davi. *Problemas Diversos e Contagem Dupla*. OBM, 2022. Disponível em: https://www.obm.org.br/content/uploads/2022/08/N2_Problemas_Diversos_e_Contagem_-Dupla_Versao_Curta_Davi-Lopes_SO2022.pdf
- SBM. *Artigo PMO*. Disponível em: https://pmo.sbm.org.br/wp-content/uploads/sites/16/dlm_uploads/2020/09/art33_vol8_PMO_SBM_2020.pdf