

Manipulação Algébrica

Cecília Mileski

29ª Semana Olímpica - Janeiro 2026

1 Identidades Clássicas

Para começar a explorar as manipulações algébricas em problemas de olimpíadas, precisamos saber algumas identidades clássicas, também chamada de **produtos notáveis**.

- Quadrado da soma: $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
- Quadrado da diferença: $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
- Diferença de quadrados: $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$
- Quadrado da soma de três números: $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + ac + bc)$
- Soma de dois cubos: $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$
- Diferença de dois cubos: $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$
- Outros produtos notáveis:

$$(a - 1)(b - 1) = ab - a - b + 1$$

$$(a + 1)(b + 1) = ab + a + b + 1$$

- Produto de Stevin: $(x + a)(x + b) = x^2 + x(a + b) + a \cdot b$
- Para qualquer n :

$$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2} \cdot b + a^{n-3} \cdot b^2 + \dots + a^2 \cdot b^{n-3} + a \cdot b^{n-2} + b^{n-1})$$

- Para n **ímpar**:

$$a^n + b^n = (a + b)(a^{n-1} - a^{n-2} \cdot b + a^{n-3} \cdot b^2 - \dots + a^2 \cdot b^{n-3} - a \cdot b^{n-2} + b^{n-1})$$

2 Para Aquecer

Problema 1. Fatore $(x - y)^3 + (y - z)^3 + (z - x)^3$.

DICA: Esse problema tem uma ideia muito importante e que é usada em muitos outros problemas: a **substituição esperta**. Assim, troque $x - y$ por a , $y - z$ por b . Como escrevemos $z - x$?

Problema 2. Fatore $x^4 + 4y^4$.

DICA: **Completar quadrado** ou algum produto notável também é uma técnica muito importante, tente fazer isso! A forma fatorada é a conhecida fatoração de Sophie Germain.

Problema 3. Prove que, para x real positivo,

$$x + \frac{1}{x} \geq 2$$

DICA: Sabemos que todo quadrado perfeito é maior ou igual a 0, pense espertamente num quadrado que te leve até a expressão acima.

3 Problemas

Os problemas estão sortidos, tente pensar em todos!

Problema 4. Dizemos que uma tripla de inteiros (x, y, z) é do tipo jenifer se x , y e z são inteiros positivos, com $y \geq 2$, e $x^2 - 3y^2 = z^2 - 3$

a) Encontre uma tripla (x, y, z) do tipo jenifer com $x = 5$ e $x = 7$.

b) Mostre que para todo $x \geq 5$ e ímpar existem pelo menos duas triplas distintas (x, y_1, z_1) e (x, y_2, z_2) do tipo jenifer.

c) Encontre alguma tripla (x, y, z) do tipo jenifer com x par.

Problema 5. Sejam a , b , c números reais positivos tais que:

$$ab - c = 3$$

$$abc = 18$$

Calcule o valor numérico de $\frac{a \cdot b}{c}$

Problema 6. Sejam $x_0 > x_1 > x_2 > \dots > x_n$ reais. Mostre que

$$x_0 + \frac{1}{x_0 - x_1} + \frac{1}{x_1 - x_2} + \dots + \frac{1}{x_{n-1} - x_n} \geq x_n + 2n$$

Problema 7. Dados os números reais não nulos a, b e c , determine o valor da expressão

$$\frac{a^5 + b^5 + c^5}{5} \cdot \frac{a^2 + b^2 + c^2}{a^2 \cdot b^3 \cdot c^2}$$

de forma que se tenha $a^2 + b^2 + c^2 = a \cdot b + a \cdot c + b \cdot c$

Problema 8. Mostre que $2^{2^{2010}} - 1$ tem pelo menos 2010 fatores primos.
Bônus: Prove que esse número tem pelo menos 2010 fatores primos distintos.

Problema 9. Encontre $x^2 + y^2$ se $x, y \in \mathbb{Z}$ e $xy + x + y = 71$, $x^2y + xy^2 = 880$.

Problema 10. Sejam x, y números reais tais que $x, y \neq \frac{1}{2}$ e $x + y \neq 1$, com $\frac{x^2-4}{2x-1} + \frac{y^2-4}{2y-1} = x + y$. Determine o valor de $2xy - x - y$.

Problema 11. Se a, b e c são inteiros positivos tais que $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{c}$, prove que existem inteiros positivos q, u e v tais que o $\text{mdc}(u, v) = 1$ e $a = qu(u + v)$, $b = qv(u + v)$ e $c = quv$.

Problema 12. Seja p um número primo ímpar dado. Quantos valores de k inteiro positivo existem tais que $\sqrt{k^2 - k \cdot p}$ é também um inteiro positivo?

Problema 13. Sejam $a, b \in \mathbb{R}$ tais que $a^3 - 3a^2 + 5a = 1$ e $b^3 - 3b^2 + 5b = 5$. Calcule o valor de $a + b$.

Problema 14. Defina $c_s = s \cdot (s + 1)$. Mostre que $(c_{m+1} - c_k) \cdot (c_{m+2} - c_k) \dots (c_{m+n} - c_k)$ é divisível por $\frac{c_1 \cdot c_2 \dots c_n}{n+1}$

4 Referências

- Mendes, Marcelo. *Produtos Notáveis*. Disponível em: https://www.urantiagaia.org/educacional/matematica/algebra2/Aula01-Produtos_Notaveis.pdf
- Craveiro, Jorge. *Álgebra Básica - Nível 1 (OBM)*. Disponível em: https://www.obm.org.br/content/uploads/2024/02/Nivel_1_Algebra_Basica_Jorge_Craveiro_S02024.pdf
- OBM. *Álgebra - Nível 2 (OBM)*. Disponível em: <https://www.obm.org.br/content/uploads/2017/01/algebra-nivel2-1.pdf>