

Problemas Clássicos de Polinômios

George Lucas

Semana Olímpica 2026

Seção Aquecimento

1. Se o polinômio $P(x)$ de grau 9 tem a seguinte propriedade $P(k) = \frac{1}{k(k+1)}$ para $k = 1, 2, \dots, 10$, determine $P(11)$.
2. Sabendo que a, b, c, d são raízes da equação $x^4 + 4x^3 - 6x^2 + 7x - 9 = 0$ calcule o valor da expressão $(1 + a^2)(1 + b^2)(1 + c^2)(1 + d^2)$.
3. Um certo polinômio $p(x)$ quando dividido por $x - a, x - b, x - c$ deixa restos a, b, c , respectivamente. Determine o resto da divisão de $p(x)$ por $(x - a)(x - b)(x - c)$.
4. Seja P um polinômio de grau 2021 tal que $P(i) = 2^i$ para $i = 0, 1, \dots, 2021$. Calcule $P(2022)$.
5. Dado o sistema:

$$\begin{aligned}\frac{x^2}{2^2 - 1^2} + \frac{y^2}{2^2 - 3^2} + \frac{z^2}{2^2 - 5^2} &= 1 \\ \frac{x^2}{4^2 - 1^2} + \frac{y^2}{4^2 - 3^2} + \frac{z^2}{4^2 - 5^2} &= 1 \\ \frac{x^2}{6^2 - 1^2} + \frac{y^2}{6^2 - 3^2} + \frac{z^2}{6^2 - 5^2} &= 1\end{aligned}$$

Calcule $x^2 + y^2 + z^2$.

6. Seja $P(x)$ um polinômio quadrático com coeficientes reais tais que $P(11) = 181$ e $x^2 - 2x + 2 \leq P(x) \leq 2x^2 - 4x + 3$ para qualquer número real x . Encontre P .
7. Se $a > 0$ e P um polinômio de coeficientes inteiros que satisfaz

$$P(1) = P(3) = P(5) = P(7) = a$$

$$P(2) = P(4) = P(6) = P(8) = -a$$

Determine o menor valor possível de a .

8. Sejam a, b, c as raízes da equação $x^3 + 3x^2 + 5x + 7 = 0$ Considere o polinômio P de grau 3 satisfazendo:

$$\begin{cases} P(a) = b + c \\ P(b) = a + c \\ P(c) = b + a \end{cases}$$

$P(a + b + c) = 16$. Calcule $P(0)$.

Seção Olímpica

1. (OBM) Calcule o valor numérico abaixo em sua forma fechada.

$$\frac{(2^4 + 2^2 + 1)(4^4 + 4^2 + 1)(6^4 + 6^2 + 1) \dots (32^4 + 32^2 + 1)}{(1^4 + 1^2 + 1)(3^4 + 3^2 + 1)(5^4 + 5^2 + 1) \dots (31^4 + 31^2 + 1)}$$

2. (OMERJ) Encontre todos os valores reais que a pode assumir de modo que o sistema

$$\begin{cases} x^3 + y^2 + z^2 = a \\ x^2 + y^3 + z^2 = a \\ x^2 + y^2 + z^3 = a \end{cases}$$

Possui solução com x, y, z reais distintos dois a dois.

3. (CIIM) Sejam $\alpha < 0 < \beta$ números reais e considere o polinômio $f(x) = x(x - \alpha)(x - \beta)$. Seja S o conjunto dos números reais s tal que o polinômio $f(x) - s$ tenha todas as suas raízes reais. Para $s \in S$, seja $P(s)$ o produto da menor e da maior raiz de $f(x) - s$. Determine o menor valor possível de $P(s)$ ao variar $s \in S$. Para que valores de s esse mínimo é atingido?

4. (Turquia) Uma sequência de números reais $a_0, a_1, \dots$ satisfaz a condição

$$\sum_{n=0}^m a_n (-1)^n \binom{m}{n} = 0$$

Para todo m suficientemente grande. Prove que existe um polinômio P tal que $a_n = P(n)$ para todo inteiro não-negativo n .

5. (a) Prove que todo polinômio P de coeficientes reais e de grau $n \geq 0$ pode ser escrito na forma

$$P(x) = \sum_{k=0}^n a_k \binom{x}{k}$$

Onde $a_k \in \mathbb{R}$ para todo k , e $\binom{x}{k} = \frac{x(x-1)\dots(x-k+1)}{k!}$ para k inteiro positivo e $\binom{x}{0} = 1$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

(b) Seja $P(x) = \sum_{k=0}^n a_k \binom{x}{k}$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Prove que $P(t) \in \mathbb{Z}$ para todo $t \in \mathbb{Z}$ se, e somente se, $a_k \in \mathbb{Z}$ para todo k .

6. Determine todos os polinômios P tais que

$$P(x)^2 - 2 = 2P(2x^2 - 1)$$

Para todo real x .

7. Encontre todos os pares de polinômios (f, g) , com coeficientes inteiros, tais que

$$f(g(x)) = x^{2015} + 2x + 1$$

8. Seja $n > 1$ um inteiro positivo. Sejam $t_1, t_2, \dots, t_{n-1} \in \mathbb{Q}$ tais que

$$\sum_{j=1}^{n-1} t_j \sqrt[n]{2021^j} \in \mathbb{Q}$$

Prove que $t_1 = t_2 = \dots = t_{n-1} = 0$.

9. Se um polinômio P de coeficientes reais satisfaz que para todo $x \in \mathbb{R}$

$$P(\sin(x)) = P(\cos(x))$$

Prove que existe um polinômio Q de coeficientes reais tal que $P(x) = Q(x^4 - x^2)$.

10. (IMO) Encontre todos os polinômios $P(x)$ com coeficientes reais que satisfaz a igualdade

$$P(a-b) + P(b-c) + P(c-a) = 2P(a+b+c)$$

Para todas as triplas (a, b, c) de números reais tais que $ab + bc + ca = 0$.

11. Sejam P e Q polinômios de coeficientes reais, ambos de grau ímpar, satisfazendo para todo real x

$$P(1+x+Q(x)^2) = Q(1+x+P(x)^2)$$

Prove que $P \equiv Q$.

12. (Taiwan) Seja λ um número real positivo satisfazendo $\lambda = \lambda^{2/3} + 1$. Prove que existe um inteiro positivo M tal que $|M - \lambda^{300}| < 4^{-100}$.

13. (OIM) Determine todos os polinômios $P(x)$ com coeficientes reais tais que $P(2014) = 1$ e, para algum inteiro c ,

$$xP(x-c) = (x-2014)P(x)$$

14. (OBM) Dizemos que um polinômio é positivista se ele pode ser escrito como o produto de dois polinômios não-constantes com coeficientes reais não-negativos. Seja $f(x)$ um polinômio não-nulo de grau maior que 1 tal que $f(x^n)$ é positivista para algum inteiro positivo n . Prove que $f(x)$ é positivista.

15. (IMO) Seja $P_1(x) = x^2 - 2$ e $P_j(x) = P_1(P_{j-1}(x))$ para $j = 2, 3, \dots$. Prove que para qualquer inteiro positivo n as raízes da equação $P_n(x) = x$ são todas reais e distintas.

16. (IMO SL) Prove que existem infinitos inteiros positivos n tais que o maior divisor primo de $n^4 + n^2 + 1$ é igual ao maior divisor primo de $(n+1)^4 + (n+1)^2 + 1$.

17. (IMO SL) Encontre todos os polinômios $f(x)$ com coeficientes reais que satisfazem

$$f(x)f(2x^2) = f(2x^3 + x)$$

18. (IMO SL) Seja $f(x) = \frac{x^2+1}{2x}$ para $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Defina $f^0(x) = x$ e para todo inteiro positivo n $f^n(x) = f(f^{n-1}(x))$. Prove que para todo $x \neq -1, 0, 1$ e n inteiro não-negativo temos que

$$\frac{f^n(x)}{f^{n+1}(x)} = 1 + \frac{1}{f\left(\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{2^n}\right)}$$

19. (CIIM) Sejam $r > s$ inteiros positivos. Sejam $P(x)$ e $Q(x)$ polinômios não constantes de coeficientes reais tais que $P(x)^2 \neq Q(x)^2$ e que satisfazem

$$P(x)^r - P(x)^s = Q(x)^r - Q(x)^s$$

Para todo real x . Prove que $r = 2$ e $s = 1$.

20. (OBM) Considere o polinômio $P(x) = 4x^2 + 12x - 3015$. Defina a sequência de polinômios $P_1(x) = \frac{P(x)}{2016}$ e $P_{n+1}(x) = \frac{P(P_n(x))}{2016}$ para todo inteiro positivo n .

(a) Prove que existe um número real r tal que $P_n(r) < 0$ para todo inteiro positivo n .

(b) Determine a quantidade de inteiros m tais que $P_n(m) < 0$ para infinitos inteiros positivos n .

21. (OBM) Uma sequência infinita de polinômios $P_0(x), P_1(x), P_2(x), \dots$ é definida por $P_0(x) = x$ e para todo n inteiro positivo

$$P_n(x) = P_{n-1}(x-1)P_{n-1}(x+1)$$

Determine o maior inteiro k para o qual o polinômio $P_{2014}(x)$ é múltiplo de x^k .

22. (IMO) A equação

$$(x-1)(x-2)\dots(x-2016) = (x-1)(x-2)\dots(x-2016)$$

É escrita no quadro, com 2016 fatores afins em cada lado. Qual o menor inteiro positivo k tal que é possível apagar exatamente k dentre esses 4032 fatores de modo que sobre pelo menos um fator em cada lado e a equação resultante não admita soluções reais?

23. Dado um real h seja, para todo real a , $a^{[0]} = 1$ e

$$a^{[n]} = a(a-h)(a-2h)\dots(a-(n-1)h)$$

para todo inteiro positivo n . Prove que

$$(a+b)^{[n]} = \sum_{m=0}^n \binom{n}{m} a^{[n-m]} b^{[m]}$$

24. (IMC) Calcule o produto

$$\prod_{n=3}^{\infty} \frac{(n^3 + 3n)^2}{n^6 - 64}$$

25. (IMC) Determine todos os pares (P, Q) de polinômios mônicos de coeficientes complexos tal que $P(x)$ divide $Q(x)^2 + 1$ e $Q(x)$ divide $P(x)^2 + 1$.

26. (APMO) Sejam a, b, c, d, e, f números reais tais que o polinômio

$$p(x) = x^8 - 4x^7 + 7x^6 + ax^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex + f$$

tem todas as suas 8 raízes reais positivas. Determine os possíveis valores de f .

27. Existe uma função $f : \mathbb{N}^{2021} \rightarrow \mathbb{N}$ bijetiva? Em caso afirmativo, é possível que tal função seja polinomial (um polinômio de 2021 variáveis)? (Observação: $\mathbb{N}$ denota o conjunto dos inteiros positivos)

28. Sejam m, n inteiros positivos. Prove que o polinômio $\frac{x^m + x^n - 2}{x^{\gcd(m,n)} - 1}$ é irredutível em $\mathbb{Z}[x]$.

29. Seja P um polinômio de coeficientes reais e n um inteiro positivo. Prove que existe um polinômio Q de coeficientes reais tal que $P(x)^2 + Q(x)^2$ é múltiplo de $(x^2 + 1)^n$.

30. Considere as sequências de conjuntos $(A_1, A_2, \dots)$ e $(B_1, B_2, \dots)$ dadas por $A_1 = \emptyset$, $B_1 = \{2023\}$ e para $n \geq 1$:

$$A_{n+1} = \{x + 1 : x \in B_n\}$$

$$B_{n+1} = (A_n \cup B_n) - (A_n \cap B_n)$$

Determine todos os n tais que $B_n = \{2023\}$.

31. (EMC Junior 2018) Sejam a, b, c reais não-nulos tais que

$$a^2 + b + c = \frac{1}{a}$$

$$a + b^2 + c = \frac{1}{b}$$

$$a + b + c^2 = \frac{1}{c}$$

Prove que dois dentre os números a, b, c são iguais.

32. (IMO 2023) Para cada inteiro $k \geq 2$, determine todas as sequências infinitas de inteiros positivos $a_1, a_2, \dots$ para as quais existe um polinômio P da forma

$$P(x) = x^k + c_{k-1}x^{k-1} + \dots + c_1x + c_0,$$

onde $c_1, c_2, \dots, c_{k-1}$ são inteiros não-negativos, tais que

$$P(a_n) = a_{n+1}a_{n+2} \dots a_{n+k}$$

para todo inteiro $n \geq 1$.

33. Determine todos os pares de polinômios não-constantes (p, q) cada um com coeficiente líder 1, e todas as raízes sendo inteiras não-negativas tais que $p(x) - q(x) = 1$.

34. (IMO 1993) Seja $f(x) = x^n + 5x^{n-1} + 3$, onde $n > 1$ é um inteiro. Prove que $f(x)$ não pode ser escrito como produto de dois polinômios não-constantos de coeficientes inteiros.
35. (Romania TST 2003) Seja $f(x)$ um polinômio de coeficientes inteiros irredutível e mônico. Suponha que $|f(0)|$ não é quadrado perfeito. Prove que $f(x^2)$ também é irredutível.
36. (Putnam 2000) Seja $f(x)$ um polinômio de coeficientes inteiros. Defina a sequência $a_0, a_1, \dots$ de inteiros tais que $a_0 = 0$ e $a_{n+1} = f(a_n)$ para todo $n \geq 0$. Prove que se existe um inteiro positivo m tal que $a_m = 0$ então $a_1 = 0$ ou $a_2 = 0$.
37. (IMO 2006) Seja $P(x)$ um polinômio de grau $n > 1$ com coeficientes inteiros e seja k um inteiro positivo. Considere o polinômio

$$Q(x) = P(P(\dots(P(x))\dots))$$

Onde P é iterado k vezes. Prove que há no máximo n inteiros t tais que $Q(t) = t$.

38. (USAMO 2002) Prove que qualquer polinômio mônico de grau n com coeficientes reais é a média de dois polinômios mônicos de grau n com n raízes reais.
39. Seja $P(x)$ um polinômio não-nulo ímpar de grau $n > 1$ com coeficientes reais não-negativos. Seja $\Gamma = \{(x, P(x)) : x \in \mathbb{R}\}$ o gráfico desse polinômio no plano coordenado. Existem pontos $A_1, A_2, \dots, A_n \in \Gamma$, distintos dois a dois, tais que a reta tangente a Γ em A_i também passa por A_{i+1} para todo $i = 1, 2, \dots, n$, onde $A_{n+1} = A_1$?
40. (IMC 2014) Seja n inteiro positivo. Mostre que existem números reais positivos $a_0, a_1, \dots, a_n$ tais que para cada uma das 2^n escolhas de sinais o polinômio

$$\pm a_n x^n \pm a_{n-1} x^{n-1} \pm \dots \pm a_1 x \pm a_0$$

Tem n raízes reais distintas.

41. (IMC 2017) Seja $p(x)$ um polinômio não constante com coeficientes reais. Para todo inteiro positivo n , seja

$$q_n(x) = (x+1)^n p(x) + x^n p(x+1)$$

Prove que há apenas um número finito de valores de n tais que todas as raízes de $q_n(x)$ são reais.

42. (IMC 2011) Seja p um número primo. Chame um inteiro positivo n de legal se

$$x^n - 1 = (x^p - x + 1)f(x) + pg(x)$$

Para algum par de polinômios (f, g) de coeficientes inteiros.

(a) Prove que $p^p - 1$ é legal.

(b) Determine todos os p tais que $p^p - 1$ é o menor legal.

Seção Hard

- Seja p um primo ímpar e s a soma das raízes primitivas $\text{mod } p$ incongruentes duas a duas. Determine o inteiro r , $-\frac{p}{2} < r < \frac{p}{2}$, tal que $s - r$ é múltiplo de p .
- (USA TST) Para cada inteiro positivo n , seja $c(n)$ o maior número real tal que

$$c(n) \leq \left| \frac{f(a) - f(b)}{a - b} \right|$$

Para todas as triplas (f, a, b) satisfazendo

- f é um polinômio de grau n tal que $f(x)$ é inteiro para todo x inteiro.
- a e b são inteiros distintos e $f(a) \neq f(b)$.

Determine $c(n)$.

- (USA TST) Determine se existem dois conjuntos distintos A e B , cada um consistindo de, no máximo, 2011^2 inteiros positivos e tais que para todo $x \in (0, 1)$ é satisfeita a seguinte desigualdade:

$$\left| \sum_{a \in A} x^a - \sum_{b \in B} x^b \right| < (1-x)^{2011}.$$