



OBM - Olimpíada Brasileira de Matemática.
29ª Semana Olímpica - Vitória - ES.
26 a 30 de janeiro de 2026.

Prof. Carlos Gomes - DMAT UFRN.
cgomesmat@gmail.com

Probabilidade recursiva

(Nível Universitário - Estudantes de graduação).

Introdução ao raciocínio recursivo em Probabilidade

O *raciocínio recursivo* constitui uma das ferramentas mais importantes e elegantes da matemática olímpica. De modo geral, ele consiste em descrever um problema complexo a partir de versões mais simples de si mesmo, estabelecendo relações entre estados sucessivos de um mesmo processo. Em vez de enfrentar diretamente o caso geral, busca-se compreender como o sistema evolui passo a passo, permitindo que a solução global emerge de uma estrutura recorrente.

No contexto da *Probabilidade*, essa abordagem mostra-se particularmente eficaz. Muitos experimentos aleatórios apresentam uma dinâmica natural, na qual, após cada etapa, o sistema retorna a uma configuração semelhante à inicial, ainda que com parâmetros modificados. Nessas situações, a probabilidade de um evento pode ser expressa em função de probabilidades associadas a estados futuros, conduzindo a equações recursivas ou funcionais.

Problemas olímpicos exploram com frequência esse tipo de raciocínio, exigindo do estudante a capacidade de identificar estados relevantes, reconhecer invariâncias probabilísticas e resolver recorrências simples. Além de reduzir cálculos excessivamente longos, o método recursivo proporciona uma compreensão estrutural profunda dos fenômenos aleatórios.

Nesta aula, apresentaremos técnicas fundamentais de raciocínio recursivo aplicadas a problemas clássicos de Probabilidade em olimpíadas matemáticas.

Recorrências

Definição 2.1. Dada uma sequência $(a_n)_{n \geq 1}$, uma *recorrência de ordem k* é uma expressão da forma $a_n = \varphi(a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_{n-k}, n)$, onde o n -ésimo termo a_n é uma função φ dos k termos precedentes a ele (e possivelmente de n). Além disso, diz-se que a recorrência de ordem k é **linear** quando existem funções $c_1, \dots, c_k, f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$, chamadas de **coeficientes da recorrência**, tais que

$$a_n = c_1(n)a_{n-1} + \dots + c_k(n)a_{n-k} + f(n).$$

Em particular, quando $f(n) \equiv 0$, diz-se que a recorrência é **homogênea**.

Se conhecemos os valores $a_{n-1}, \dots, a_{n-k}$, então o valor de a_n está unicamente determinado e, consequentemente, por indução, existe uma única sequência $(a_n)_{n \geq 0}$ satisfazendo à recorrência se são dados os valores iniciais dos seus k primeiros termos.

De acordo com a definição acima, uma solução para uma recorrência

$$a_n = \varphi(a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_{n-k}, n)$$

é uma sequência $(x_n)_{n \geq 1}$ que cumpre a recorrência.

Recorrências lineares

Como mencionamos anteriormente, uma sequência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência recorrente linear de ordem k (onde k é um inteiro positivo) se existem constantes (reais ou complexas) $C_1, C_2, \dots, C_k$ e uma função $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$, $n \mapsto \varphi(n)$, tais que:

$$x_{n+k} = \sum_{j=1}^k C_j x_{n+k-j} + \varphi(n) = C_1 x_{n+k-1} + C_2 x_{n+k-2} + \dots + C_k x_n + \varphi(n) \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Nesta seção vamos mostrar a teoria básica das sequências recorrentes lineares de primeira e segunda ordens e algumas aplicações dessa teoria.

3.1 Recorrências lineares de 1ª ordem

Uma recorrência de primeira ordem que expressa x_{n+1} em função de x_n é dita linear quando a função que relaciona cada termo aos anteriores é uma função de primeiro grau. Além disso, para que uma recorrência seja caracterizada como primeira ordem, cada termo da sequência deve ser obtido a partir do termo imediatamente anterior a ele, ou seja, x_n em função de x_{n-1} .

Uma recorrência linear de primeira ordem pode ser ainda classificada como recorrência linear homogênea de primeira ordem (recorrências do tipo $x_{n+1} = f(n)x_n$ com $f(n)$ e x_n não nulos) ou ainda como recorrência linear não homogênea de primeira ordem (recorrências de tipo $x_{n+1} = f(n)x_n + g(n)$ com $f(n)$ e $g(n)$ não nulos).

3.2 Resolução de recorrências lineares

Agora vamos ver métodos para resolver alguns tipos especiais de recorrências lineares. Para começar vamos estudar as chamadas **Recorrências lineares de primeira ordem** e exibir o alcance dessa teoria mostrando alguns exemplo bem interessantes. Sempre estaremos pensando numa sequência de números reais $(x_n)_{n \geq 0}$.

Pelo que definimos, um relação de recorrência linear de primeira ordem é aquela em que existem funções $c_1, c_2 : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ tais que $x_{n+1} = c_1(n)x_n + c_2(n)$.

Os resultados a seguir revelam como resolver dois casos particulares de recorrências lineares de primeira ordem, que têm uma larga aplicabilidade.

Proposição 1 (Recorrência linear de primeira ordem homogênea). *Se $x_{n+1} = g(n)x_n$ é uma recorrência linear de primeira ordem, onde $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função qualquer, e todos os termos da sequência $(x_n)_{n \geq 1}$ são não nulos, então*

$$x_n = \prod_{i=1}^{n-1} g(i) x_1.$$

Observação 1 (Recorrência linear de primeira ordem não homogênea). *De modo completamente análogo, se $x_{n+1} = x_n + g(n)$, onde $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função qualquer, podemos concluir que*

$$x_n = x_1 + \sum_{i=1}^{n-1} g(i).$$

A seguir mostraremos um teorema que revela que qualquer recorrência linear não homogênea de primeira ordem pode ser transformada numa recorrência da forma $x_{n+1} = x_n + g(n)$, cuja solução geral é $x_n = x_1 + \sum_{i=1}^{n-1} g(i)$, como vimos acima.

Teorema 1. *Se a_n é uma solução não-nula de $x_{n+1} = g(n)x_n$, então a substituição $x_n = a_n y_n$, transforma a recorrência*

$$x_{n+1} = g(n)x_n + h(n) \text{ em } y_{n+1} = y_n + \varphi(n), \text{ onde } \varphi(n) = \frac{h(n)}{a_n g(n)}.$$

A partir do teorema 1 usando o mesmo método da observação 1, pode-se obter uma fórmula explícita para y_n e, conseqüentemente para x_n , a partir da relação $x_n = a_n y_n$.

3.3 Recorrências lineares de 2ª ordem

Agora trataremos do caso particular das recorrências lineares de segunda ordem com coeficientes constantes. Nesse caso, a lei de recorrência é da forma $a_n = c_1(n)a_{n-1} + c_2(n)a_{n-2} + f(n)$, onde $c_1, c_2, f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ são funções constantes. Para começar trabalharemos especificamente com o caso homogêneo, isto é, o caso em que $f(n) \equiv 0$. Nesse caso podemos escrever recorrência da seguinte forma:

$$\begin{aligned} a_n &= c_1(n)a_{n-1} + c_2(n)a_{n-2} + \underbrace{f(n)}_{\equiv 0} \Rightarrow \\ a_n - c_1(n)a_{n-1} - c_2(n)a_{n-2} &= 0. \end{aligned}$$

Sendo c_1 e c_2 funções constantes, existem números reais p e q tais que $-c_1(n) = p$ e $-c_2(n) = q$, o que nos permite escrever

$$a_n - c_1(n)a_{n-1} - c_2(n)a_{n-2} = 0 \Rightarrow a_n + pa_{n-1} + qa_{n-2} = 0.$$

Teorema 2. Se as raízes da equação $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$ são λ_1 e λ_2 , então

$$a_n = C_1\lambda_1^n + C_2\lambda_2^n.$$

é solução da recorrência linear homogênea de segunda ordem $a_{n+2} + pa_{n+1} + qa_n = 0$, quaisquer que sejam as constantes C_1 e C_2 .

Mas será que todas as soluções sejam do tipo $a_n = C_1\lambda_1^n + C_2\lambda_2^n$? O teorema a seguir mostra que sim!

Teorema 3. Se p e q são números reais e não nulos, então todas as soluções da recorrência linear homogênea de segunda ordem $a_{n+2} + pa_{n+1} + qa_n = 0$, são da forma

$$a_n = C_1\lambda_1^n + C_2\lambda_2^n.$$

em que C_1 e C_2 são constantes e λ_1 e λ_2 são as raízes da equação $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$ (essa equação é dita a **equação característica** da recorrência).

Observação 2 (Raízes complexas). Tudo que dissemos no teorema 2 continua a valer, mesmo que as raízes λ_1 e λ_2 da equação característica $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$ sejam números complexos (que, nesse caso, são conjugados, visto que os coeficientes da equação característica são números reais). Todas as soluções são, como vimos, da forma $a_n = C_1\lambda_1^n + C_2\lambda_2^n$. Escrevendo λ_1 e λ_2 na forma trigonométrica, segue que:

$$\lambda_1 = \rho(\cos \theta + i.\text{sen} \theta), \text{ e } \lambda_2 = \rho(\cos \theta - i.\text{sen} \theta).$$

Nesse caso,

$$\lambda_1^n = \rho^n(\cos(n\theta) + i.\text{sen}(n\theta)), \text{ e } \lambda_2^n = \rho^n(\cos(n\theta) - i.\text{sen}(n\theta)).$$

Portanto,

$$\begin{aligned} a_n &= C_1\lambda_1^n + C_2\lambda_2^n \\ &= C_1\rho^n(\cos(n\theta) + i.\text{sen}(n\theta)) + C_2\rho^n(\cos(n\theta) - i.\text{sen}(n\theta)) \\ &= \rho^n [(C_1 + C_2)\cos(n\theta) + i(C_1 - C_2)\text{sen}(n\theta)] \\ &= \rho^n [C'_1.\cos(n\theta) + C'_2.\text{sen}(n\theta)] \end{aligned}$$

onde $C'_1 = C_1 + C_2$ e $C'_2 = i(C_1 - C_2)$ são constantes. Nessas condições, a solução geral da recorrência é dada por

$$a_n = \rho^n [C'_1 \cos(n\theta) + C'_2 \text{sen}(n\theta)].$$

Teorema 4. Se a equação característica da recorrência $a_{n+2} + pa_{n+1} + qa_n = 0$, com p e q números reais não nulos, possui apenas uma raiz real λ , então a solução da recorrência é

$$a_n = C_1\lambda^n + C_2n\lambda^n, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Mas será que todas as soluções dessa recorrência são desse tipo? O teorema a seguir revela que sim!

Teorema 5. Se a equação característica da recorrência $a_{n+2} + pa_{n+1} + qa_n = 0$, com p e q reais não nulos, possui apenas uma raiz real λ , então todas as soluções dessa recorrência são da forma $a_n = C_1\lambda^n + C_2n\lambda^n$, com C_1 e C_2 constantes reais.

Problemas olímpicos

Exemplo 1. Dois jogadores A e B lançam alternadamente uma moeda honesta. O jogador A vence se obtiver cara antes que B obtenha coroa. Sabendo que A inicia o jogo, determine a probabilidade de A vencer.

Solução. Seja p a probabilidade de A vencer ao iniciar o jogo. No primeiro lançamento:

- com probabilidade $\frac{1}{2}$, sai cara e A vence imediatamente;
- com probabilidade $\frac{1}{2}$, sai coroa, passando a vez para B .

Quando B lança:

- com probabilidade $\frac{1}{2}$, sai coroa e B vence;
- com probabilidade $\frac{1}{2}$, sai cara e o jogo retorna exatamente ao estado inicial.

Logo,

$$p = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot p \Rightarrow p = \frac{2}{3}.$$

■

Exemplo 2 (Competição Elon Lages Lima - 2023). Considere duas moedas A e B tais que na moeda A a probabilidade de sair cara é $\frac{1}{4}$, enquanto que na moeda B a probabilidade de sair cara é $\frac{1}{2}$. Escolhe-se uma dessas duas moedas ao caso e a arremessa. Se sair cara essa mesma moeda será arremessada novamente, caso contrário será arremessada a outra moeda. Para cada inteiro positivo n , seja p_n a probabilidade de que a moeda lançada no n -ésimo arremesso seja a moeda A . Podemos afirmar que:

- (a) $p_n = \frac{2}{5} - \frac{1}{10} \left(-\frac{1}{4}\right)^{n-1}$
- (b) $p_n = \frac{2}{5} + \frac{1}{10} \left(-\frac{1}{4}\right)^{n-1}$
- (c) $p_n = \frac{2}{5} + \frac{1}{10} \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$
- (d) $p_n = \frac{1}{10} \left(-\frac{1}{4}\right)^{n-1}$
- (e) $p_n = -\frac{2}{5} + \frac{1}{10} \left(-\frac{1}{4}\right)^{n-1}$

Solução. Resposta: **B**

Seja o evento $A_n := \{\text{A moeda lançada no arremesso } n \text{ seja "A"}\}$. Assim,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A_{n+1}) &= \mathbb{P}(A_{n+1}|A_n)\mathbb{P}(A_n) + \mathbb{P}(A_{n+1}|A_n^c)\mathbb{P}(A_n^c) \\ &= p_n \cdot \frac{1}{4} + (1 - p_n) \cdot \frac{1}{2} \Rightarrow \\ p_{n+1} &= \frac{1}{2} - \frac{1}{4}p_n.\end{aligned}\tag{1}$$

$$p_{n+1} - c = -\frac{1}{4}(p_n - c) \quad \text{com } a_n := p_n - c\tag{2}$$

De (1) e (2) segue-se

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{4}p_n - c = -\frac{1}{4}(p_n - c) \Rightarrow c = \frac{2}{5}.\tag{3}$$

De (2) tem-se para $n = 1$ que $a_1 = p_1 - \frac{2}{5} = \frac{1}{2} - \frac{2}{5} = \frac{1}{10}$.
Assim,

$$\begin{aligned}a_n &= a_1 \cdot \left(-\frac{1}{4}\right)^{(n-1)} \Rightarrow p_n - \frac{2}{5} = \frac{1}{10} \left(-\frac{1}{4}\right)^{(n-1)} \Rightarrow \\ p_n &= \frac{2}{5} + \frac{1}{10} \left(-\frac{1}{4}\right)^{n-1}.\end{aligned}$$

■

Exemplo 3 (Prépas-França). *Considere duas moedas A e B tais que na moeda A a probabilidade de sair cara é $\frac{1}{4}$, enquanto que na moeda B a probabilidade de sair cara é $\frac{1}{2}$. Escolhe-se uma dessas duas moedas ao caso e a arremessa. Se sair cara essa mesma moeda será arremessada novamente, caso contrário será arremessada a outra moeda. Para cada inteiro positivo n , seja p_n a probabilidade de que a moeda lançada no n -ésimo arremesso seja a moeda A.*

- (a) Mostre que $p_{n+1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}p_n$;
- (b) A partir do item anterior, mostre que $p_n = \frac{2}{5} + \frac{1}{10} \left(-\frac{1}{4}\right)^{n-1}$;
- (c) Calcule $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n$;
- (d) Determine a probabilidade de obtermos uma cara no n -ésimo lançamento.

Solução.

- (a) Seja o evento $A_n := \{\text{A moeda lançada no arremesso } n \text{ seja "A"}\}$. Assim,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A_{n+1}) &= \mathbb{P}(A_{n+1}|A_n)\mathbb{P}(A_n) + \mathbb{P}(A_{n+1}|A_n^c)\mathbb{P}(A_n^c) \\ &= \frac{1}{4} \cdot p_n + \frac{1}{2} \cdot (1 - p_n) \Rightarrow\end{aligned}$$

Fazendo

$$p_{n+1} = -\frac{1}{4}p_n + \frac{1}{2}.\tag{4}$$

(b) Seja c tal que

$$p_{n+1} - c = -\frac{1}{4}(p_n - c) \quad \text{com} \quad a_n := p_n - c \quad (5)$$

De (4) e (5) segue-se

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{4}p_n - c = -\frac{1}{4}(p_n - c) \Rightarrow c = \frac{2}{5}. \quad (6)$$

De (5) tem-se para $n = 1$ que $a_1 = p_1 - \frac{2}{5} = \frac{1}{2} - \frac{2}{5} = \frac{1}{10}$.

Assim,

$$a_n = a_1 \cdot \left(-\frac{1}{4}\right)^{(n-1)} \Rightarrow p_n - \frac{2}{5} = \frac{1}{10} \left(-\frac{1}{4}\right)^{(n-1)} \Rightarrow$$

$$p_n = \frac{2}{5} + \frac{1}{10} \left(-\frac{1}{4}\right)^{(n-1)}.$$

(c)

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} p_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{2}{5} + \frac{1}{10} \left(-\frac{1}{4}\right)^{(n-1)} \right] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{5} + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{10} \left(-\frac{1}{4}\right)^{(n-1)} \\ &= \frac{2}{5} + 0 \\ &= \frac{2}{5}. \end{aligned}$$

(d) Seja P_n a probabilidade pedida do evento $E := \{\text{cara no } n\text{-ésimo lançamento}\}$. Condicionando o evento de interessante na moeda escolhida, tem-se

$$\begin{aligned} P_n &= \mathbb{P}(A_n)\mathbb{P}(E|A_n) + \mathbb{P}(A_n^c)\mathbb{P}(E|A_n^c) \\ &= p_n \cdot \frac{1}{4} + (1 - p_n) \cdot \frac{1}{2}. \end{aligned} \quad (7)$$

Do item (b) e (7) tem-se que

$$P_n = \frac{2}{5} + \frac{1}{10} \left(\frac{1}{4}\right)^n.$$

■

Exemplo 4 (OBM-2002). *José tem três pares de óculos, um magenta, um amarelo e um ciano. Todo dia de manhã ele escolhe um ao acaso, tendo apenas o cuidado de nunca usar o mesmo que usou no dia anterior. Se dia primeiro de agosto ele usou o magenta, qual a probabilidade de que dia 31 de agosto ele volte a usar o magenta?*

Solução. Sejam m_n, a_n e c_n as probabilidades de que no dia n ele use óculos magenta, amarelo e ciano, respectivamente. Ora, como no dia 1 de agosto temos certeza que José usou os óculos magenta, segue que a probabilidade de que no dia 1 de agosto ela tenha usado os óculos manega é igual a 1 (e consequentemente a probabilidade de que ele tenha usado outros óculos é 0), ou seja, $m_1 = 1, a_1 = 0$ e $c_1 = 0$.

Além disso, como a cada dia José escolhe ao acaso uma das cores que ele não usou no dia anterior, segue que ele escolhe cada uma das opções disponíveis para o dia com probabilidade $\frac{1}{2}$. Por exemplo, no dia 2 de agosto a probabilidade de que ele escolha os óculos magenta é $m_2 = 0$ (ele não pode usar a mesma cor do dia anterior), a probabilidade de que ele escolha os óculos amarelo é $a_2 = \frac{1}{2}$ e probabilidade de que ele escolha os óculos ciano é $c_2 = \frac{1}{2}$. De um modo geral, no dia $n+1$ do mês de agosto existem três configurações possíveis, a saber:

- Para que no dia $n+1$ ele escolha os óculos magenta é preciso que no dia anterior (dia n) ele tenha usado óculos amarelo ou ciano. Mas a probabilidade de que no dia n ele tenha usado óculos amarelo é a_n e a probabilidade de que ele tenha usado óculos ciano é c_n . Assim, a probabilidade m_{n+1} de que no dia $n+1$ ele use os óculos magenta é a probabilidade de que no dia anterior (o dia n) ele tenha usado óculos amarelo ou ciano. Como no dia em que ele vai usar os óculos amarelo ou ciano ele escolhe um deles com probabilidade $\frac{1}{2}$, segue que:

$$m_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + \frac{1}{2}c_n.$$

- Por fim, para que no dia $n+1$ ele escolha os óculos ciano é preciso que no dia anterior (dia n) ele tenha usado óculos magenta ou amarelo. Mas a probabilidade de que no dia n ele tenha usado óculos magenta é m_n e a probabilidade de que ele tenha usado óculos amarelo é a_n . Assim, a probabilidade c_{n+1} de que no dia $n+1$ ele use os óculos ciano é a probabilidade de que no dia anterior (o dia n) ele tenha usado óculos magenta ou amarelo. Como no dia em que ele vai usar os óculos magenta ou amarelo ele escolhe um deles com probabilidade $\frac{1}{2}$, segue que:

$$c_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + \frac{1}{2}m_n.$$

Como $m_n + a_n + c_n = 1$, tem-se que:

$$\begin{cases} m_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + \frac{1}{2}c_n \\ a_{n+1} = \frac{1}{2}m_n + \frac{1}{2}c_n \\ c_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + \frac{1}{2}m_n \\ m_n + a_n + c_n = 1 \end{cases} \Rightarrow m_{n+1} = \frac{a_n + c_n}{2} = \frac{1 - m_n}{2} \Rightarrow m_{n+1} + \frac{1}{2}m_n = 1.$$

Resolvendo essa recorrência,

$$m_n = \frac{1 - (-2)^{2-n}}{3}.$$

Portanto, em 31 de agosto a probabilidade de que ele volte a usar o magenta é igual a $m_{31} = \frac{1+2^{-29}}{3}$. ■

Exemplo 5 (OMRN). *Paulinho arremessa aleatoriamente uma moeda em que numa face há “cara” e na outra “coroa”. A cada lançamento ele anota o resultado num papel e ele promete parar a brincadeira quando ocorrerem duas “caras” consecutivas. Qual a probabilidade de que Paulinho faça exatamente n -lançamentos até parar a brincadeira?*

Solução. Consideremos, inicialmente, que o número n de lançamentos seja par. Seja o evento A_n o conjunto de todas as sequências de lançamentos nas quais o jogo acaba no n -ésimo lançamento e notemos que A_n ocorre se, e somente se, as duas condições ocorrem:

- não ocorrem duas caras consecutivas nos lançamentos de 1 a $n - 3$;
- ocorrem, respectivamente, coroa, cara e cara nos lançamentos $n - 2$, $n - 1$ e n .

O conjunto de todas as sequências de caras e coroas nas quais o jogo acaba no n -ésimo lançamento, é finito e equiprovável, segue-se que

$$\mathbb{P}(A_n) = \frac{|A_n|}{|A|} \text{ em que } |A| = 2^n.$$

Para calcularmos a cardinalidade de A_n , particionemos o evento A_n nos eventos $B_k := \{\text{nos } n - 3 \text{ primeiros lançamentos ocorrem } k \text{ caras, com duas quaisquer delas não consecutivas}\}$.

Observe que o número máximo de caras nos $n - 3$ lançamentos a fim de que não apareçam duas caras em posições consecutivas é no máximo o número de coroas mais um. Assim, $k \in \{0, \dots, \frac{n}{2} - 1\}$, e portanto, pelo primeiro lema de Kaplansky dado no exemplo ??, segue-se que

$$A_n = B_0 \cup B_1 \cup \dots \cup B_{\frac{n}{2}-1} \text{ com } |B_k| = \binom{n-3-k+1}{k} \quad (8)$$

Assim, desde que os eventos B_k são disjuntos, segue-se de (8) que

$$\mathbb{P}(A_n) = \frac{\sum_{k=0}^{\frac{n}{2}-1} \binom{n-2-k}{k}}{2^n}.$$

Se o número de lançamentos é ímpar, tem-se as mesmas condições do caso n par, notemos apenas que a quantidade máxima de caras que pode ocorrer nos $n - 3$ primeiros lançamentos a fim de que não ocorram duas caras consecutivas é no máximo $\frac{n-3}{2}$. Assim,

$$\mathbb{P}(A_n) = \frac{\sum_{k=0}^{\frac{n-3}{2}} \binom{n-2-k}{k}}{2^n}.$$

■

Exemplo 6 (OBMU-2001). *Um rato, que ocupa inicialmente uma sala A, está treinado para que toda vez que um alarme toque ele mude de sala. Toda vez que ele ouve o som de alarme ele escolhe (com igual probabilidade) um dos túneis partindo da sala em que ele se encontra e vai para uma outra sala que se encontra na outra extremidade do túnel escolhido. Após o alarme ter soado 23 vezes, qual a probabilidade de que o rato encontre-se na sala B?*

Solução. Seja o evento M_n o rato está nos sítios B ou E após n sinais dado que partiu do sítio A , com $p_n = \mathbb{P}(M_n)$. Pelo teorema da probabilidade total tem-se que

$$\begin{aligned} p_{n+1} &= \mathbb{P}(M_{n+1}) = \mathbb{P}(M_n)\mathbb{P}(M_{n+1}|M_n) + \mathbb{P}(M_n^c)\mathbb{P}(M_{n+1}|M_n^c) \\ &= p_n \cdot \frac{1}{3} + (1 - p_n) \cdot \left(\frac{1}{4} \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \frac{1}{2} \right). \end{aligned}$$

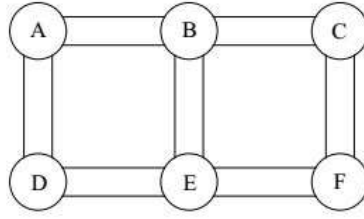


Figura 1: Labirinto com 6 salas

Assim,

$$p_{n+1} = -\frac{1}{6} \cdot p_n + \frac{1}{2} \quad (9)$$

Determinemos uma constante c tal que possamos escrever a recorrência (9) como uma Progressão Geométrica. Isto é,

$$p_{n+1} - c = -\frac{1}{6} (p_n - c), \quad \text{com } a_n := p_n - c \text{ e } p_1 = \frac{1}{2}. \quad (10)$$

De (9) e (10) resulta que

$$-\frac{1}{6}p_n + \frac{1}{6}c + c = -\frac{1}{6}p_n + \frac{1}{2} \Rightarrow c = \frac{3}{7}. \quad (11)$$

De (11) e (10) resulta que

$$a_1 = \frac{1}{2} - \frac{3}{7} = \frac{1}{14}, \quad a_{23} = \frac{1}{14} \cdot \left(-\frac{1}{6}\right)^{22} \text{ e } p_{23} = a_{23} + \frac{3}{7} = \frac{1}{14} \cdot \left(-\frac{1}{6}\right)^{22} + \frac{3}{7}.$$

Note que nos instantes ímpares o rato não pode estar no sítio “E” e a probabilidade pedida é

$$\mathbb{P} = \frac{1}{14} \cdot \left(-\frac{1}{6}\right)^{22} + \frac{3}{7}.$$

■

Exemplo 7. Lançamos uma moeda viciada n vezes e registamos a sequência de caras e coroas. Se $P(\text{cara}) = p$ (com $0 < p < 1$), qual é a probabilidade de não observarmos duas caras consecutivas na sequência?

Solução. Sejam $K = \text{cara}$, $C = \text{coroa}$ e A_n o evento de que não observamos duas caras consecutivas em n lançamentos de moeda, isto é,

$$p_n = P(A_n).$$

A ideia é condicionar no resultado do primeiro lançamento da moeda. Existem duas possibilidades.

Usando a lei da probabilidade total e condicionando no resultado do primeiro lançamento, podemos escrever

$$p_n = \mathbb{P}(A_n) = \mathbb{P}(A_n \mid K)\mathbb{P}(K) + \mathbb{P}(A_n \mid C)\mathbb{P}(C) = p \mathbb{P}(A_n \mid K) + (1 - p) \mathbb{P}(A_n \mid C).$$

Agora, para encontrar $\mathbb{P}(A_n | C)$, note que, se o primeiro lançamento é C , então, para não observarmos um KK em toda a sequência, não devemos observar um KK nos $n - 1$ lançamentos restantes. Assim,

$$\mathbb{P}(A_n | C) = \mathbb{P}(A_{n-1}) = p_{n-1}.$$

De forma semelhante, se o primeiro lançamento resulta em K , o segundo deve ser necessariamente C , e não devemos observar um KK nos $n - 2$ lançamentos restantes. Logo,

$$\mathbb{P}(A_n | H) = (1 - p) \mathbb{P}(A_{n-2}) = (1 - p)p_{n-2}.$$

Substituindo na Equação acima, obtemos

$$p_n = (1 - p)p_{n-1} + p(1 - p)p_{n-2}.$$

Observe que também sabemos que $p_1 = 1$ e $p_2 = 1 - p^2$. Usando a recorrência, obtemos ainda $p_0 = 1$. Assim, podemos resolver essa recorrência. Obtemos a seguinte equação característica:

$$x^2 - (1 - p)x - p(1 - p) = 0.$$

A equação característica possui raízes

$$x_1 = \frac{1 - p + \sqrt{(1 - p)(1 + 3p)}}{2}, \quad x_2 = \frac{1 - p - \sqrt{(1 - p)(1 + 3p)}}{2},$$

de modo que a solução geral é dada por

$$p_n = \alpha \left(\frac{1 - p + \sqrt{(1 - p)(1 + 3p)}}{2} \right)^n + \beta \left(\frac{1 - p - \sqrt{(1 - p)(1 + 3p)}}{2} \right)^n.$$

Usando $p_0 = 1$ e $p_1 = 1$, obtemos

$$\alpha = \frac{1 + p + \sqrt{(1 - p)(1 + 3p)}}{2\sqrt{(1 - p)(1 + 3p)}},$$

e

$$\beta = 1 - \alpha = \frac{\sqrt{(1 - p)(1 + 3p)} - 1 - p}{2\sqrt{(1 - p)(1 + 3p)}}.$$

Diante do exposto,

$$p_n = \frac{1 + p + \sqrt{(1 - p)(1 + 3p)}}{2\sqrt{(1 - p)(1 + 3p)}} \left(\frac{1 - p + \sqrt{(1 - p)(1 + 3p)}}{2} \right)^n + \frac{\sqrt{(1 - p)(1 + 3p)} - 1 - p}{2\sqrt{(1 - p)(1 + 3p)}} \left(\frac{1 - p - \sqrt{(1 - p)(1 + 3p)}}{2} \right)^n.$$

■

Exemplo 8. Lançamos uma moeda viciada n vezes e registramos a sequência de caras e coroas. Se $P(\text{cara}) = p$ (com $0 < p < 1$), qual é a probabilidade de observarmos um número par de caras?

Solução. Sejam $K = \text{cara}$, $C = \text{coroa}$ e A_n o evento de que observamos um número par de caras, para $n = 1, 2, \dots$. Seja $p_n = P(A_n)$. Condicionando no resultado do último lançamento da moeda, podemos escrever, para $n \geq 2$,

$$p_n = P(A_n | K)P(K) + P(A_n | C)P(C) = pP(A_n | K) + (1 - p)P(A_n | C).$$

Se o último lançamento resulta em K , então, para que o número total de caras seja par, os primeiros $n - 1$ lançamentos devem conter um número ímpar de caras. Logo,

$$P(A_n | K) = P(A_{n-1}^c) = 1 - p_{n-1}.$$

Se o último lançamento resulta em C , então os primeiros $n - 1$ lançamentos devem conter um número par de caras. Assim,

$$P(A_n | C) = P(A_{n-1}) = p_{n-1}.$$

Substituindo, obtemos

$$p_n = p(1 - p_{n-1}) + (1 - p)p_{n-1}.$$

Portanto, obtemos a seguinte equação de recorrência:

$$p_n = (1 - 2p)p_{n-1} + p, \quad \text{com } p_1 = 1 - p.$$

Resolvendo essa equação de recorrência obtemos:

$$p_n = (1 - 2p)^n + p \left(\frac{1 - (1 - 2p)^n}{2p} \right) = \frac{1 + (1 - 2p)^n}{2}.$$

■

Exemplo 9. Escolhe-se um ponto uniformemente no intervalo $[0, 1]$. Se o ponto cair em $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ o processo termina imediatamente. Se cair no intervalo $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ o processo se repete, agora dentro de $\left[0, \frac{1}{2}\right]$. O mesmo vale a cada etapa: se cair na metade direita do intervalo atual, o processo termina; se cair na metade esquerda, continua. Qual é a probabilidade de o processo terminar após um número finito de etapas?

Solução.

Em cada etapa do processo escolhe-se um ponto uniformemente no intervalo corrente. Se o ponto pertencer à metade direita do intervalo, o processo termina; caso contrário, ele se repete na metade esquerda.

Para que o processo continue por pelo menos n etapas, é necessário que, em cada uma delas, o ponto escolhido pertença à metade esquerda do intervalo. Como em cada etapa essa probabilidade é $\frac{1}{2}$, temos

$$\mathbb{P}(\text{o processo durar pelo menos } n \text{ etapas}) = \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

Assim, a probabilidade de o processo nunca terminar é

$$\mathbb{P}(\text{o processo nunca terminar}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0.$$

Logo, a probabilidade de o processo terminar após um número finito de etapas é

$$\mathbb{P}(\text{o processo terminar em tempo finito}) = 1 - 0 = 1.$$

Portanto, o processo termina quase certamente.

■

Exemplo 10. Lançamos uma moeda equilibrada n vezes e registramos a sequência de caras e coroas. Qual é a probabilidade de não observarmos duas caras consecutivas na sequência?

Solução. Sejam $k = \text{cara}$, $C = \text{coroa}$ e p_n a probabilidade de não observar duas caras consecutivas em n lançamentos de moeda. Uma maneira de resolver este problema é determinar (usando recorrências) o número total de sequências de comprimento n sem KK , que é

$$a_n = \frac{5 + 3\sqrt{5}}{10} \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n + \frac{5 - 3\sqrt{5}}{10} \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n.$$

Agora, como o número total de sequências de comprimento n é 2^n , e todas as sequências são igualmente prováveis, obtemos

$$p_n = \frac{a_n}{2^n} = \frac{5 + 3\sqrt{5}}{10} \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{4} \right)^n + \frac{5 - 3\sqrt{5}}{10} \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{4} \right)^n.$$

Uma outra maneira seria usar recorrências. Sendo A_n o evento em que para n lançamentos não há dois resultados cara (KK) consecutivos, segue que $p_n = P(A_n)$. Condicionando pelo resultado obtido no primeiro lançamento, segue que

$$p_n = P(A_n) = P(A_n | K) \cdot P(K) + P(A_n | C) \cdot P(C)$$

Note que sendo o resultado do primeiro arremesso K , o segundo necessariamente terá que ser C (pois não queremos duas caras consecutivas), sobrando assim $n - 2$ lançamentos em que não podem haver duas caras consecutivas, o que ocorrerá com probabilidade p_{n-2} . Além disso, a probabilidade de que os dois primeiros resultados sejam KC é $\frac{1}{4}$.

No caso em que o primeiro resultado é C os $n - 1$ restantes não podem apresentar duas caras consecutivas, o que ocorrerá com probabilidade p_{n-1} .

Diante do exposto,

$$p_n = P(A_n) = P(A_n | K) \cdot P(K) + P(A_n | C) \cdot P(C) \quad (12)$$

$$= p_{n-2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + p_{n-1} \cdot \frac{1}{2} \quad (13)$$

$$= \frac{1}{2} p_{n-1} + \frac{1}{4} p_{n-2} \quad (14)$$

Observe que também sabemos que $p_1 = 1$ e $p_2 = \frac{3}{4}$. Usando a recorrência, obtemos ainda $p_0 = 1$. Assim, podemos resolver essa recorrência. Obtemos a seguinte equação característica:

$$x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{4} = 0.$$

A equação característica tem raízes

$$x_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{4} \quad \text{e} \quad x_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{4},$$

de modo que a solução geral é dada por

$$p_n = \alpha \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{4} \right)^n + \beta \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{4} \right)^n.$$

Usando $p_0 = 1$ e $p_1 = 1$, obtemos

$$p_n = \frac{5 + 3\sqrt{5}}{10} \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{4} \right)^n + \frac{5 - 3\sqrt{5}}{10} \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{4} \right)^n.$$

■

Exemplo 11. Uma urna contém inicialmente n bolas brancas e n bolas pretas. Em cada etapa do processo, retiram-se simultaneamente duas bolas da urna. Em seguida, procede-se da seguinte forma:

- se as duas bolas retiradas forem da mesma cor, coloca-se na urna uma única bola branca;
- se as duas bolas retiradas forem de cores diferentes, coloca-se na urna uma única bola preta.

O processo é repetido até que reste exatamente uma bola na urna. Determine a probabilidade de que a bola final seja branca.

Solução.

Seja B_k o número de bolas brancas na urna após a k -ésima etapa e P_k o número de bolas pretas. Inicialmente,

$$B_0 = n, \quad P_0 = n.$$

Observemos o efeito de cada possível retirada:

- duas bolas brancas: B diminui em 2 e depois aumenta em 1, logo B diminui em 1;
- duas bolas pretas: P diminui em 2, mas adiciona-se uma bola branca, de modo que P diminui em 2 e B aumenta em 1;
- uma branca e uma preta: B e P diminuem em 1 e adiciona-se uma bola preta, de modo que P não se altera e B diminui em 1.

Em todos os casos, a paridade do número de bolas brancas é preservada, pois B varia sempre de uma quantidade ímpar. Como inicialmente $B_0 = n$, a paridade de B_k permanece a mesma ao longo de todo o processo.

Ao final, resta apenas uma bola na urna. Se ela for branca, então $B_{\text{final}} = 1$, que é ímpar; se for preta, então $B_{\text{final}} = 0$, que é par.

Logo, a cor da bola final é completamente determinada pela paridade de n :

- se n é ímpar, a bola final é necessariamente branca;
- se n é par, a bola final é necessariamente preta.

Portanto, a probabilidade de a bola final ser branca é

$$\mathbb{P}(\text{bola final branca}) = \begin{cases} 1, & \text{se } n \text{ é ímpar,} \\ 0, & \text{se } n \text{ é par.} \end{cases}$$

■

Exemplo 12 (Caminhada aleatória em uma reta). *Um ponto começa na origem de uma reta. A cada passo, ele se desloca uma unidade para a direita ou para a esquerda, com probabilidades iguais. Qual é a probabilidade de o ponto atingir +3 antes de atingir -2?*

Solução. Considere um passeio aleatório simples na reta inteira. O ponto inicia na posição 0 e, a cada passo, desloca-se uma unidade para a direita ou para a esquerda, cada uma com probabilidade 1/2. O processo é interrompido quando o ponto atinge +3 ou -2.

Para cada posição $x \in \{-2, -1, 0, 1, 2, 3\}$, definimos

$$p(x) = \mathbb{P}(\text{atingir } +3 \text{ antes de } -2 \mid \text{início em } x).$$

Nosso objetivo é determinar $p(0)$.

As condições de contorno são imediatas:

$$p(3) = 1, \quad p(-2) = 0.$$

Para as posições intermediárias $x = -1, 0, 1, 2$, pelo princípio da probabilidade total, o próximo passo leva o ponto a $x + 1$ ou $x - 1$ com probabilidades iguais. Logo,

$$p(x) = \frac{1}{2}p(x+1) + \frac{1}{2}p(x-1), \quad x = -1, 0, 1, 2.$$

Multiplicando por 2, obtemos a equação de diferenças

$$p(x+1) - 2p(x) + p(x-1) = 0.$$

A solução geral dessa equação é linear, isto é,

$$p(x) = ax + b,$$

onde a e b são constantes reais.

Usando as condições de contorno, temos:

$$\begin{cases} 3a + b = 1, \\ -2a + b = 0. \end{cases} \Rightarrow a = \frac{1}{5} \text{ e } b = \frac{2}{5}.$$

Portanto, $p(x) = \frac{x+2}{5}$.

Como o ponto começa na posição 0, a probabilidade procurada é $p(0) = \frac{2}{5}$. ■

Problemas propostos

1. (França) Supõe-se que o tempo de um dia seja ou ensolarado ou nublado. A cada dia, o tempo é o mesmo do dia anterior com probabilidade p . Ele é diferente com probabilidade $q = 1 - p$. Se em um determinado dia o tempo é ensolarado, a probabilidade de que ele seja ensolarado n dias depois é denotada por s_n .

- (a) Mostre que, para todo $n \in \mathbb{N}^*$,

$$s_n = (p - q)s_{n-1} + q$$

- (b) Deduza que para todo $n \in \mathbb{N}^*$,

$$s_n = \frac{1}{2}(1 + (p - q)^n).$$

2. (França) Uma nova atração foi inaugurada em um grande parque. Para todo inteiro natural não nulo n , denota-se por $p_n = \mathbb{P}(T_n)$ a probabilidade do evento

T_n : “ocorre um problema técnico no dia n nessa atração”.

Supõe-se que nenhum problema técnico ocorra no momento da entrada em funcionamento, correspondente ao primeiro dia. De acordo com estudos realizados em atrações existentes, supõe-se que:

- se ocorre um problema técnico no dia n , então a probabilidade de que um problema técnico ocorra no dia seguinte é $\frac{3}{5}$;
- se a atração não sofreu nenhum problema técnico no dia n , a probabilidade de que um problema técnico surja no dia seguinte é $\frac{2}{7}$.

- (a) Calcular a probabilidade de que a atração não sofra nenhum problema técnico na primeira semana

(b) Mostre que $p_{n+1} = \frac{11}{35}p_n + \frac{2}{7}$

(c) Calcule $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n$

3. Estamos no século XIV, no castelo de Poitiers. Ele é triangular, ladeado por uma torre em cada vértice: Leste, Norte e Sul. Partindo da torre Leste, o soldado de guarda faz sua ronda sobre a muralha. Em cada vértice, para enganar o inimigo (e o tédio), ele lança uma moeda: se der cara, ele continua no mesmo sentido; se der coroa, ele retorna no sentido oposto.

Supõe-se que a moeda seja equilibrada, e denota-se por p_n a probabilidade de que o n -ésimo vértice pelo qual ele passa seja a torre Leste.

(a) Demonstrar que, para todo natural n ,

$$p_{n+1} = \frac{1}{2}(1 - p_n).$$

(b) Demonstrar que, para todo natural n ,

$$p_{n+1} = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \left(-\frac{1}{2}\right)^n.$$

(c) Calcule $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n$

4. (a) Você lança uma moeda viciada repetidamente. Se $P(\text{cara}) = p$, qual é a probabilidade de que duas caras consecutivas sejam observados antes de observarmos duas coroas consecutivas? Por exemplo, este evento acontece se a sequência observada for CKCKKKCKCC...
- (b) Eu lanço uma moeda viciada n vezes e registro a sequência de caras e coroas. Assuma $P(\text{cara}) = p$ (onde $0 < p < 1$). Seja p_n a probabilidade de que o número de caras seja divisível por 3. Escreva uma equação de recorrências para computar p_n .
- (c) Deduza uma expressão explícita para p_n em função de n .
5. Em um certo concurso, os jogadores possuem habilidades iguais e a probabilidade é $\frac{1}{2}$ de que um dos dois competidores especificados seja o vencedor. Em um grupo de 2^n jogadores, os jogadores são emparelhados aleatoriamente uns contra os outros. Os 2^{n-1} vencedores são novamente emparelhados aleatoriamente, e assim por diante, até que reste um único vencedor. Considere dois competidores especificados, A e B , e defina os eventos $A_i, i \leq n, E$ por:

A_i : A joga em exatamente i concursos.

E : A e B nunca jogam um contra o outro.

(a) Encontre $P(A_i), i = 1, \dots, n$.

(b) Encontre $P(E)$.

(c) Seja $P_n = P(E)$. Mostre que:

$$P_n = \frac{1}{2^n - 1} + \frac{2^n - 2}{2^n - 1} \left(\frac{1}{2}\right)^2 P_{n-1}$$

e use esta fórmula para verificar a resposta obtida na parte (b).

Dica: Encontre $P(E)$ condicionando em qual dos eventos $A_i, i = 1, \dots, n$ ocorre.

Ao simplificar sua resposta, use a identidade algébrica

$$\sum_{i=1}^{n-1} ix^{i-1} = \frac{1 - nx^{n-1} + (n-1)x^n}{(1-x)^2}$$

Para outra abordagem ao resolver este problema, observe que há um total de $2^n - 1$ jogos disputados.

(d) Explique por que $2^n - 1$ jogos são disputados.

Numere esses jogos e deixe B_i denotar o evento em que A e B jogam um contra o outro no jogo $i, i = 1, \dots, 2^n - 1$.

(e) Qual é $P(B_i)$?

(f) Use a parte (e) para encontrar $P(E)$.

6. A probabilidade de obter cara em um único lançamento de uma moeda é p . Suponha que A comece e continue a lançar a moeda até que uma coroa apareça, momento em que B começa a lançar. Então, B continua a lançar até que uma coroa apareça, momento em que A assume o controle, e assim por diante. Seja $P_{n,m}$ a probabilidade de que A acumule um total de n caras antes que B acumule m . Mostre que

$$P_{n,m} = pP_{n-1,m} + (1-p)(1 - P_{m,n})$$

7. Suponha que n ensaios independentes sejam realizados, com o ensaio i sendo um sucesso com probabilidade $\frac{1}{2i+1}$. Seja p_n a probabilidade de que o número total de sucessos resultantes seja um número ímpar.

(a) Encontre p_n para $n = 1, 2, 3, 4, 5$.

(b) Proponha uma conjectura para uma fórmula geral para p_n .

(c) Derive uma fórmula para p_n em termos de p_{n-1} .

(d) Verifique se a sua conjectura na parte (b) satisfaz a fórmula recursiva na parte (c). Como a fórmula recursiva possui uma solução única, isso prova que sua conjectura está correta.

8. Seja Q_n a probabilidade de que nenhuma sequência de 3 caras consecutivas apareça em n lançamentos de uma moeda justa. Mostre que

$$Q_n = \frac{1}{2}Q_{n-1} + \frac{1}{4}Q_{n-2} + \frac{1}{8}Q_{n-3}$$

$$Q_0 = Q_1 = Q_2 = 1$$

Encontre Q_8 .

(*Dica:* Condicione no resultado da primeira coroa).

9. Considere o problema da ruína do jogador, com a exceção de que A e B concordam em jogar no máximo n partidas. Seja $P_{n,i}$ a probabilidade de que A termine com todo o dinheiro quando A começa com i e B começa com $N - i$. Derive uma equação para $P_{n,i}$ em termos de $P_{n-1,i+1}$ e $P_{n-1,i-1}$, e calcule $P_{7,3}, N = 5$.

10. Considere duas urnas, cada uma contendo bolas brancas e pretas. As probabilidades de retirar bolas brancas da primeira e da segunda urna são, respectivamente, p e p' . As bolas são selecionadas sequencialmente com reposição da seguinte forma: com probabilidade α , uma bola é inicialmente escolhida da primeira urna, e com probabilidade $1 - \alpha$, ela é escolhida da segunda urna. As seleções subsequentes são feitas de acordo com a regra de que, sempre que uma bola branca é retirada (e repostada), a próxima bola é retirada da mesma urna; mas quando uma bola preta é retirada, a próxima bola é retirada da outra urna. Seja α_n a probabilidade de que a n -ésima bola seja escolhida da primeira urna.

Mostre que:

$$\alpha_{n+1} = \alpha_n(p + p' - 1) + 1 - p' \quad n \geq 1$$

e use esta fórmula para provar que:

$$\alpha_n = \frac{1 - p'}{2 - p - p'} + \left(\alpha - \frac{1 - p'}{2 - p - p'} \right) (p + p' - 1)^{n-1}$$

Seja P_n a probabilidade de que a n -ésima bola selecionada seja branca. Encontre P_n . Além disso, calcule $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n$ e $\lim_{n \rightarrow \infty} P_n$.

11. *O Problema da Eleição.* Em uma eleição, o candidato A recebe n votos e o candidato B recebe m votos, onde $n > m$. Assumindo que todas as $(n + m)!/n!m!$ ordenações de votos são igualmente prováveis, seja $P_{n,m}$ a probabilidade de que A esteja sempre à frente na contagem dos votos.

(a) Compute $P_{2,1}, P_{3,1}, P_{3,2}, P_{4,1}, P_{4,2}, P_{4,3}$.

(b) Encontre $P_{n,1}, P_{n,2}$.

(c) Com base nos seus resultados, conjecture o valor de $P_{n,m}$.

(d) Derive uma recursão para $P_{n,m}$ em termos de $P_{n-1,m}$ e $P_{n,m-1}$.

(e) Use a parte (d) para verificar sua conjectura na parte (c) por meio de uma prova por indução em $n + m$.

12. Como um modelo simplificado para previsão do tempo, suponha que o tempo (úmido ou seco) amanhã será o mesmo que o tempo hoje com probabilidade p . Mostre que se o tempo está seco em 1º de janeiro, então P_n , a probabilidade de estar seco n dias depois, satisfaz

$$P_n = (2p - 1)P_{n-1} + (1 - p) \quad n \geq 1$$

$$P_0 = 1$$

Prove que

$$P_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(2p - 1)^n \quad n \geq 0$$

13. Uma caixa contém inicialmente 1 bola branca e 1 bola preta. A cada etapa, realiza-se o seguinte procedimento:

- retira-se uma bola ao acaso da caixa;
- devolve-se essa bola à caixa juntamente com outra bola da *mesma cor*.

Após n etapas, seja P_n a probabilidade de que a caixa contenha o mesmo número de bolas brancas e pretas.

- (a) Determine uma recorrência para P_n .
- (b) Calcule explicitamente P_n .