

Quadriláteros Cíclicos e Potência de Ponto

Jamile Falcão

"A beleza da matemática está nas conexões inesperadas."

- Maryam Mirzakhani.

Na aula de hoje, estudaremos ângulos da circunferência e as relações existentes entre eles. A partir dessa análise, avançaremos para a definição e a caracterização dos quadriláteros cíclicos. Por fim, faremos uma introdução ao conceito de **Potência de Ponto**, um tema fundamental que acompanhará vocês ao longo de toda a jornada olímpica. Vamos lá!

Ângulos na Circunferência

Seja ω uma circunferência com centro O . Considere as seguintes definições.

1. Ângulo central: Sejam A e B pontos na circunferência. Então $\angle AOB$ é chamado um "ângulo central" e mede o mesmo que o arco AB que o ângulo está "olhando".
2. Ângulo inscrito: Sejam B , A e C três pontos da circunferência nessa ordem. Então $\angle BAC$ é chamado "ângulo inscrito" na circunferência e mede $(\angle BOC)/2$.
3. Ângulo semi-inscrito ou ângulo de segmento: Sejam $\triangle ABC$ um triângulo inscrito na circunferência ω e P um ponto exterior tal que B e P estão em semiplanos distintos quanto a reta AC . Então, AP é tangente a ω se, e somente se, $\angle PAC = \angle ABC$.

Quadriláteros Cíclicos

Definição: Um quadrilátero cíclico é aquele cujos quatro vértices estão em uma mesma circunferência.

Observação 1: Todo triângulo é cíclico, mas nem todo quadrilátero é cíclico.

Observação 2: O círculo que passa pelos quatro vértices do quadrilátero é chamado *círculo circunscrito* ao quadrilátero.

Teorema 1: Um quadrilátero convexo ABCD, de lados AB, BC, CD e DA, é inscrito se e somente se uma das seguintes condições for satisfeita:

a) $\angle DAB + \angle BCD = 180^\circ$

b) $\angle BAC = \angle BDC$

Prova: Exercício.

Potência de Ponto

Seja Γ uma circunferência de centro O e raio R e um ponto P qualquer.

Definição: A potência do ponto P relativo a Γ como sendo $PO^2 - R^2$

Notação: $Pot_{\Gamma}P = PO^2 - R^2$.

Observação: O sinal da potência de um ponto relativo a uma circunferência é muito importante, pois ele diz qual a posição relativa entre esse ponto e a circunferência. Se $Pot_{\Gamma}P > 0$, o ponto está do lado de fora; se $Pot_{\Gamma}P < 0$, o ponto está do lado de dentro; e se $Pot_{\Gamma}P = 0$ então P está na circunferência.

É preciso notar que potência de ponto é uma ferramenta poderosa para se trabalhar com quadriláteros cíclicos, como você verá nos problemas a seguir. No entanto, o ponto mais legal da potência de ponto (na minha opinião) é que ela permite relacionar um ponto a não apenas uma, mas sim várias circunferências. Para tanto, usaremos eixos e centros radicais.

Definição: Dadas duas circunferências que não possuem o mesmo centro Γ_1 e Γ_2 , o lugar geométrico dos pontos P tais que $Pot_{\Gamma_1}P = Pot_{\Gamma_2}P$ é uma reta r perpendicular a reta que liga o centro de Γ_1 e Γ_2 , denominada eixo radical de Γ_1 e Γ_2 .

Definição: Dadas três circunferências Γ_1 , Γ_2 e Γ_3 cujos centros formam três pontos não colineares, sejam r_1 , r_2 e r_3 os eixos radicais de Γ_1 e Γ_2 , Γ_2 e Γ_3 , Γ_3 e Γ_1 , respectivamente. Então, r_1 , r_2 e r_3 concorrem num ponto P, denominado centro radical de Γ_1 , Γ_2 e Γ_3 .

Exercícios

1. Prove que um trapézio é cíclico e somente se ele é isósceles.
2. Lema: Seja $\triangle ABC$ um triângulo e sejam HA, HB e HC as reflexões de seu ortocentro H pelas retas BC, CA e AB respectivamente. Mostre que HA, HB e HC estão na circunferência (ABC).
3. Lema: Seja $\triangle ABC$ um triângulo, O seu circuncentro e A', B' e C' as reflexões de H sobre os pontos médios de BC, CA e AB respectivamente. Mostre que A', B' e C' são as antípodas de A, B e C em (ABC).
* Antípoda de A e o ponto diametralmente oposto a A.
4. (POTI) Seja M um ponto no interior do quadrilátero convexo ABCD tal que ABMD e paralelogramo. Prove que, se $\angle CBM = \angle CDM$, então $\angle ACD = \angle BCM$.
5. (OBM) Seja $\triangle ABC$ um triângulo acutângulo e D um ponto qualquer sobre o lado BC. Sejam E o simétrico de D em relação a AC e F o simétrico de D em relação a AB. DE intersecta a reta AB em G e DF intersecta a reta AC em H. Demonstre que A, E, F, G, H são concíclicos.
6. (IMO) Seja ABC um triângulo com incentro I. Um ponto P no interior de ABC satisfaz:

$$\angle PBA + \angle PCA = \angle PBC + \angle PCB.$$

Prove que $AP \geq AI$, e que a igualdade ocorre se, e somente se, $P = I$.

7. (TM2) Um triângulo $\triangle ABC$ é construído de modo que sua circunferência circunscrita seja tangente externamente, no ponto C, a uma circunferência ω cujo centro pertence a reta BC. Seja D o segundo

ponto de interseção de ω com a reta BC (distinto de C) e seja ω' a circunferência que passa pelos pontos A, B e D. As circunferências ω e ω' se intersectam em dois pontos distintos D e E. Seja F o ponto de interseção da reta AB com a perpendicular a BC traçada por C. Prove que os pontos D, E e F são colineares.

8. (USAMO) Seja ABC um triângulo. Construa triângulos isósceles BCD, CAE e ABF externamente a ABC de bases BC, CA e AB, respectivamente. Prove que as retas que passam por A, B, C e são perpendiculares a EF, FD e DE, respectivamente, são concorrentes.
9. (USAMO) Dados dois círculos ω_1 e ω_2 que se intersectam em X e Y, seja l_1 uma reta que passa pelo centro de ω_1 , intersectando ω_2 nos pontos P e Q, e seja l_2 uma reta que passa pelo centro de ω_2 intersectando ω_1 nos pontos R e S. Prove que se os pontos P, Q, R, S estão numa circunferência, então o centro dessa circunferência está na reta XY.
10. (IMO): Seja $\triangle ABC$ um triângulo com circuncentro O. Sejam P e Q pontos no interior dos lados AC e AB respectivamente. Sejam K, L e M os pontos médios dos segmentos BP, CQ e PQ respectivamente, e Γ o círculo que passa por K, L e M. Suponha que a reta PQ é tangente ao círculo Γ . Prove que $OP = OQ$.

Referências:

- a) <https://web.evanchen.cc/exams/IMO-2004-notes.pdf>
- b) https://www.obm.org.br/content/uploads/2024/02/Nivel_1_Quadrilateros_ciclicos_e_angulos_na_circunferencia_Gabriella-Morgado_SO2024.pdf
- c) https://www.obm.org.br/content/uploads/2020/02/23_SO_Davi_Medeiros_Potencia_de_Ponto_e_Lemas_Potentes_Nivel_3_compressed.pdf