

Mais do Mesmo

Problema 1. Se $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua e injetiva, então f é estritamente monótona.

Problema 2. Mostre que a única função contínua $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(f(f(x))) = x$ é a função identidade.

Problema 3. (Rioplatense 1999) Sejam $p_1, \dots, p_n$ primos distintos. Considere todos os inteiros positivos que utilizam apenas esses primos (não necessariamente todos) em sua fatoração em números primos, e coloque-os em ordem crescente, formando assim uma sequência infinita

$$a_1 < a_2 < \dots < a_n < \dots$$

Demonstre que, para cada natural c , existe n tal que $a_{n+1} - a_n > c$.

Problema 4. Mostre que $\sum_{p \text{ primo}} \frac{1}{p} = \infty$.

Problema 5. Seja A o conjunto dos naturais que não possuem o algarismo 0 na representação decimal. Mostre que $\sum_{n \in A} \frac{1}{n} < 100$.

Problema 6. (Teste IMO Brasil 2002) Considere $2^m + 1$ funções não-decrescentes $f_1, f_2, \dots, f_{2^m+1} : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$, cada uma delas satisfazendo o seguinte:

$$|f_i(x) - f_i(y)| \leq |x - y|, \forall x, y \in [0, 1].$$

Mostre que existem $i, j \in \{1, 2, \dots, 2^m + 1\}$ tais que $|f_i(x) - f_j(x)| \leq \frac{1}{m}$, $\forall x \in [0, 1]$.

Problema 7. (Rússia 2007) As faces de um cubo $9 \times 9 \times 9$ são particionadas em 486 quadrados da maneira usual. Sua superfície é coberta, sem sobreposição, por 243 tiras de papel 2×1 . Uma tira é dita *dobrada* se não está em apenas uma face. Prove que o número de tiras dobradas é ímpar.

Problema 8. (Rússia) Em um tabuleiro $n \times n$, marcamos os centros de k casas de modo que não há quatro destes pontos que sejam vértices de um retângulo de lados paralelos aos do tabuleiro. Mostre que $k \leq \left\lfloor n \left(\frac{1 + \sqrt{4n-3}}{2} \right) \right\rfloor$.

Problema 9. Seja $G = (V, E)$ um grafo bipartido com $V = A \sqcup B$ e $|A| = |B| = n$. Mostre que se G não possui ciclo de tamanho 4, então $|E| \leq \frac{n}{2}(1 + \sqrt{4n-3})$. Mostre também que a igualdade pode ocorrer para infinitos valores de n .

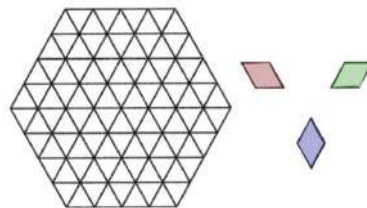
Problema 10. Dado $S = \{1, 2, \dots, n\}$, escolha s subconjuntos de S e sejam $a_1, a_2, \dots, a_s$ suas cardinalidades. Sabe-se que não existem dois subconjuntos escolhidos tais que um contém o outro.

(a) (Lubell-Yamamoto-Meshalkin) Mostre que

$$\frac{1}{\binom{n}{a_1}} + \dots + \frac{1}{\binom{n}{a_s}} \leq 1.$$

(b) (Lema de Sperner) Conclua que $s \leq \binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$.

Problema 11. (Problema dos calissons) Dados um hexágono regular e n inteiro positivo, divida o hexágono em triângulos equiláteros, conforme a figura abaixo. Utilizando peças em formato de losango equilátero (com mesmo lado dos triângulos), devemos cobrir o hexágono, sem superposições. As peças podem ser colocadas em três posições distintas (vermelho, verde e roxo na figura abaixo). Mostre que, independente da cobertura, são utilizadas exatamente n^2 peças em cada posição.



Problema 12. (Rússia 1997) Sejam m, n naturais ímpares. Em um retângulo $m \times n$, são colocados, sem sobreposição, dominós que cobrem todo o tabuleiro, com a exceção do canto superior esquerdo. Um movimento consiste em deslizar um dominó em direção à casa vazia, expondo outra casa. Prove que, independente da disposição inicial dos dominós, sempre é possível realizar uma sequência de movimentos de modo que a casa vazia seja qualquer um dos outros cantos do tabuleiro.

Problema 13. (Conway's soldiers) Considere um tabuleiro infinito no plano cartesiano. Abaixo da linha 1, são colocados soldados nas casas, no máximo um em cada casa, possivelmente infinitos deles no tabuleiro, de modo que pelo menos uma dessas casas fica desocupada. Um movimento consiste no seguinte: se dois soldados estão em casas vizinhas (lado vertical ou horizontal em comum), então um deles pode pular sobre o outro como no jogo de damas, em cujo caso o soldado debaixo morre. Mostre



que, independente de como os soldados sejam colocados e como eles se movimentem, nenhum soldado conseguirá atingir a linha 5.

Problema 14. Sejam $A_1, \dots, A_n, B_1, \dots, B_n$ conjuntos tais que $A_i \cap B_i = \emptyset$ para todo i e $(A_i \cap B_j) \cup (A_j \cap B_i) \neq \emptyset$ para todos $i \neq j$. Mostre que para todo $p \in (0, 1)$ vale:

$$\sum_{i=1}^n p^{|A_i|} (1-p)^{|B_i|} \leq 1.$$

Problema 15. (China West 2002) Seja $n \geq 1$, e sejam $A_1, \dots, A_{n+1} \subset \{1, 2, \dots, n\}$. Mostre que existe conjuntos $I, J \subset \{1, \dots, n+1\}$ disjuntos tais que

$$\bigcup_{k \in I} A_k = \bigcup_{k \in J} A_k.$$

Problema 16. Seja $A = [a_{ij}]$ uma matriz quadrada tal que existe $t > 0$ tal que $a_{ij} = t$ para todo $i \neq j$ e $a_{ii} > t$ para todo i . Mostre que A é invertível.

Problema 17. (Desigualdade de Fisher) Seja $n \geq 1$, e sejam $A_1, \dots, A_k \subset \{1, 2, \dots, n\}$. Assuma que exista t tal que $|A_i \cap A_j| = t$ para todos $i \neq j$. Mostre que $k \leq n$.

Problema 18. Seja n par, e sejam $S_1, \dots, S_n \subset \{1, \dots, n\}$ tais que $|S_i|$ é par para todo i . Mostre que existem $i \neq j$ tais que $|S_i \cap S_j|$ é par. (Este problema generaliza o anterior.)