

Razão cruzada e geometria projetiva

Carlos Shine

1 Razão cruzada

A razão cruzada, como veremos, é bastante versátil e poderosa. Para isso, precisamos defini-la de três formas.

1.1 Pontos em uma reta

Sendo A, B, C, D pontos em uma reta, a razão cruzada desses pontos é

$$(A, B; C, D) = \frac{AC}{BC} \bigg/ \frac{AD}{BD} = \frac{AC \cdot BD}{AD \cdot BC}.$$

Aqui, comprimentos de segmentos têm sinal, ou seja, $AB = -BA$. A orientação escolhida em cada reta não importa, pois se a trocarmos a razão cruzada não muda. Em geral, imaginamos os pontos na ordem $ACBD$ na reta, mas isso não precisa ser seguido, ou seja, a razão cruzada pode ser definida não importando a ordem em que os pontos estão na reta.

Usaremos livremente as propriedades de segmentos orientados $XY + YZ = XZ$ e $XY = ZY - ZX$ (que na verdade são equivalentes) para X, Y, Z colineares em qualquer ordem.

1.2 Retas por um ponto

Sendo a, b, c, d retas com um ponto comum, defina $\angle(x, y)$ como o ângulo (com sinal) entre x e y . Da mesma forma, a orientação não importa (embora o usual seja o sentido anti-horário). A razão cruzada dessas retas é

$$(a, b; c, d) = \frac{\sin \angle(a, c)}{\sin \angle(b, c)} \bigg/ \frac{\sin \angle(a, d)}{\sin \angle(b, d)} = \frac{\sin \angle(a, c) \sin \angle(b, d)}{\sin \angle(a, d) \sin \angle(b, c)}.$$

1.3 Pontos em um círculo

Sendo A, B, C, D pontos em um círculo ω , a razão cruzada desses pontos é

$$(A, B; C, D)_\omega = \frac{AC}{BC} \bigg/ \frac{AD}{BD} = \frac{AC \cdot BD}{AD \cdot BC}.$$

Aqui, como usual, tudo tem sinal. A orientação escolhida em cada círculo não importa (novamente, o usual é o sentido anti-horário), pois se a trocarmos a razão cruzada não muda.

2 Propriedades

2.1 Propriedades básicas

Vamos provar algumas propriedades para pontos em uma reta. Mas é possível adaptar algumas delas para retas por um ponto e pontos no círculo.

Lema 1 (Contas básicas). Se $(A, B; C, D) = r$,

- $(C, D; A, B) = (B, A; D, C) = r$;
- $(B, A; C, D) = (A, B; D, C) = \frac{1}{r}$;
- $(A, B; C, D) + (A, C; B, D) = 1$.

Demonstração. A única demonstração que não é substituição simples é a do último item. Mas é só fazer conta e usar $XZ = XY + YZ$:

$$\begin{aligned} (A, B; C, D) + (A, C; B, D) &= \frac{AC \cdot BD}{AD \cdot BC} + \frac{AB \cdot CD}{AD \cdot CB} = \frac{(AB + BC)(BC + CD) - AB \cdot CD}{AD \cdot BC} \\ &= \frac{BC(AB + BC + CD) + AB \cdot CD - AB \cdot CD}{AD \cdot BC} = \frac{BC \cdot AD}{AD \cdot BC} = 1. \end{aligned}$$

□

2.2 Algumas razões cruzadas importantes

Uma razão cruzada simples mas útil é a razão cruzada 1. De fato, se $(A, B; C, D) = 1$ então $A = B$ ou $C = D$: temos $(A, C; B, D) = 1 - (A, B; C, D) = 0 \iff \frac{AB \cdot CD}{AD \cdot CB} = 0 \iff A = B$ ou $C = D$.

2.3 Quádruplas harmônicas

O outro caso importante é quando a razão cruzada é -1 . Nesse caso, temos

$$\frac{AC}{BC} = -\frac{AD}{BD}.$$

O sinal quer dizer que um dos pontos C, D está no segmento AB e o outro está fora do segmento AB . Também podemos dizer que C e D são *conjugados harmônicos*.

Essa razão aparece muito por diversos motivos que explicaremos mais tarde.

Vamos começar com algumas propriedades básicas.

Lema 2 (Propriedades básicas de quádruplas harmônicas). Se $(A, B; C, D) = -1$, então

- AB é a média harmônica de AC e AD , ou seja,

$$\frac{2}{AB} = \frac{1}{AC} + \frac{1}{AD}.$$

- Sendo O o ponto médio de AB , $OC \cdot OD = OA^2$.
- Os círculos de diâmetros AB e CD são ortogonais.

Demonstração. Lembre que $(A, B; C, D) = -1$ é equivalente a $AC \cdot BD = -AD \cdot BC$.

Em geral, é só fazer conta: para a primeira propriedade,

$$\begin{aligned} AC \cdot BD = -AD \cdot BC &\iff AC \cdot (AD - AB) = -AD \cdot (AC - AB) \\ &\iff 2AC \cdot AD = AB \cdot AC + AD \cdot AB \iff \frac{2}{AB} = \frac{1}{AD} + \frac{1}{AC}. \end{aligned}$$

Para a segunda propriedade, é só continuar a conta: sendo $\frac{AB}{2} = \frac{AO+OB}{2} = OB$,

$$\begin{aligned} \frac{1}{OB} = \frac{1}{AD} + \frac{1}{AC} &\iff \frac{1}{OB} = \frac{1}{OD - OA} + \frac{1}{OC - OA} \\ &\iff -(OA - OC)(OA - OD) = OA(OC + OD - 2OA) \iff OA^2 = OC \cdot OD. \end{aligned}$$

A terceira propriedade é direto de potência de ponto: a potência de A com relação ao círculo de diâmetro CD é $OC \cdot OD = OA^2$, de modo que OA é tangente ao círculo de diâmetro CD . Como O é o ponto médio de AB , os círculos de diâmetros AB e CD são ortogonais. □

Talvez você ache mais rápido provar as propriedades anteriores se usar coordenadas na reta: temos

$$AC \cdot BD = -AD \cdot BC \iff (a-c)(b-d) = -(a-d)(b-c) \iff (a+b)(c+d) = 2ab + 2cd.$$

As duas primeiras propriedades do Lema 2 são obtidas colocando a origem em $a = 0$ e $o = \frac{a+b}{2} = 0$, respectivamente.

2.4 Pontos médios, bissetrizes e pinceis harmônicos

Olhando a primeira propriedade de quádruplas harmônicas, se fizermos $D = \infty^1$, $1/AD = 0$, e obtemos

$$\frac{2}{AB} = 0 + \frac{1}{AC} \iff AB = 2AC,$$

ou seja, C é ponto médio de AB .

A igualdade $\frac{AC}{BC} = -\frac{AD}{BD}$ lembra o teorema das bissetrizes, não? De fato, se P é um ponto fora da reta $ABCD$ e PB e PD são as bissetrizes interna e externa, a igualdade acima é verdadeira; além disso, PB e PD são perpendiculares.

De certo modo, a volta é verdadeira: considere um *pincel harmônico*, ou seja, retas a, b, c, d por um mesmo ponto tais que $(a, b; c, d) = -1$. Se $\angle(c, d) = 90^\circ$, $\sin \angle(b, d) = \sin(\angle(b, c) + 90^\circ) = \cos \angle(b, c)$, $\sin \angle(a, d) = \sin(\angle(a, c) + 90^\circ) = \cos \angle(a, c)$, e

$$\begin{aligned} \frac{\sin \angle(a, c) \sin \angle(b, d)}{\sin \angle(a, d) \sin \angle(b, c)} &= -1 \iff \sin \angle(a, c) \cos \angle(b, c) = -\cos \angle(a, c) \sin \angle(b, c) \\ &\iff \sin(\angle(a, c) + \angle(b, c)) = 0, \end{aligned}$$

que é equivalente a $\angle(a, c) = \angle(c, b)$, ou seja, b é bissetriz de $\angle(a, c)$.

Chegamos então às seguintes propriedades:

Lema 3 (Pontos médios, bissetrizes e razões cruzadas). Razões cruzadas têm relações importantes com pontos médios e bissetrizes.

- Sendo A, B, C colineares, C é ponto médio de AB se, e somente se, $(A, B; C, \infty) = -1$.
- Sendo $(a, b; c, d)$ um pincel harmônico, c é bissetriz de $\angle(a, b)$ se, e somente se, $\angle(c, d) = 90^\circ$.

□

3 Propriedade fundamental e projeções

A razão cruzada é um invariante frequente.

Lema 4 (Razão cruzada é tudo igual). (i) (Retas e pontos) Sendo a, b, c, d retas que passam por um ponto comum P e sendo r uma reta que não passa por P e corta a, b, c, d nos pontos A, B, C, D , respectivamente,

$$(a, b; c, d) = (A, B; C, D).$$

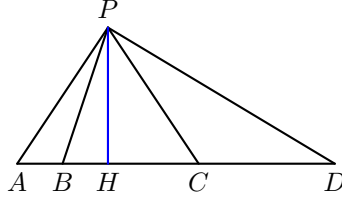
(ii) (Pontos no círculo e retas) Sendo P, A, B, C, D pontos em um círculo ω ,

$$(A, B; C, D)_\omega = (PA, PB; PC, PD),$$

em que a segunda razão cruzada é de retas. Note que P pode ser qualquer ponto no círculo.

Demonstração. A parte (ii) é direta da lei dos senos. A parte (i) sai com a fórmula de área.

¹tecnicamente, há mais pontos do infinito, mas em cada reta há exatamente um ponto do infinito.



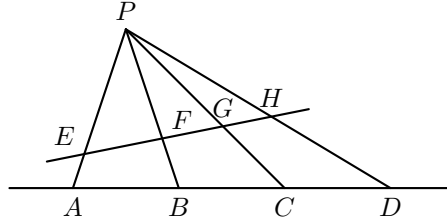
Sendo H a projeção ortogonal de H sobre r ,

$$\begin{aligned} (A, B; C, D) &= \frac{AC \cdot BD}{AD \cdot BC} = \frac{[PAC] \cdot [PBD]}{[PAD] \cdot [PBC]} = \frac{\frac{1}{2}PA \cdot PC \sin \angle(a, c) \cdot \frac{1}{2}PB \cdot PD \sin \angle(b, d)}{\frac{1}{2}PA \cdot PD \sin \angle(a, d) \cdot \frac{1}{2}PB \cdot PC \sin \angle(b, c)} \\ &= \frac{\sin \angle(a, c) \sin \angle(b, d)}{\sin \angle(a, d) \sin \angle(b, c)} = (a, b; c, d). \end{aligned}$$

□

Por causa da propriedade fundamental, podemos transferir razões cruzadas a partir de projeções (ou, mais tecnicamente, *projetividades*).

Podemos denotar a projeção por um ponto P por $P(A, B; C, D) \bar{\cap} (E, F; G, H)$ ou $(A, B; C, D) \stackrel{P}{=} (E, F; G, H)$. É claro que $(A, B; C, D) = (E, F; G, H)$.



Por causa disso, muitas propriedades de razões cruzadas para pontos se transferem para retas e círculos. Por exemplo, se $(a, b; c, d) = 1$ então $a = b$ ou $c = d$.

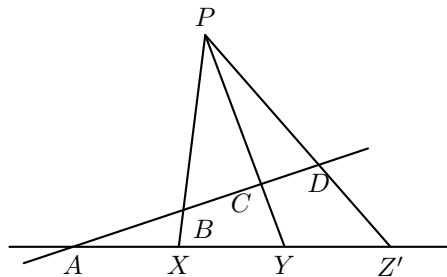
3.1 Transformando igualdade de razões cruzadas em projeção

Se $(A, B; C, D) = (E, F; G, H)$, não necessariamente essas quádruplas são perspectivas (ou seja, AE , BF , CG e DH passam por um mesmo ponto). De fato, é querer demais que *quatro* retas sejam concorrentes.

Mas dá para conseguir um bom critério para *três* retas concorrentes. Que tal?

Lema 5. Sejam A, B, C, D pontos sobre uma reta e A, X, Y, Z pontos sobre outra reta (sim, as duas retas se cortam em A). Os sete pontos são distintos. Então se $(A, B; C, D) = (A, X; Y, Z)$, então $(A, B; C, D) \bar{\cap} (A, X; Y, Z)$. Ou seja, as retas XB , YC e ZD são concorrentes.

Demonstração. Seja P a interseção de XB e YC . Defina Z' como a interseção de PD e a reta AXY .



Da propriedade fundamental, $(A, X; Y, Z) = (A, B; C, D) \stackrel{P}{=} (A, X; Y, Z')$, o que implica

$$\frac{XZ}{AZ} = \frac{XZ'}{AZ'} \iff (X, A; Z, Z') = 1.$$

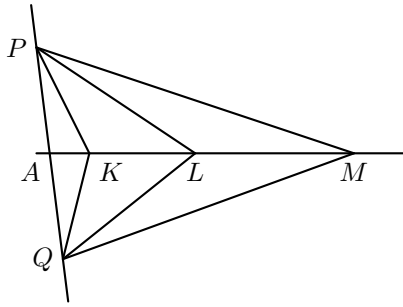
Como $A \neq X$, $Z = Z'$. □

3.2 Um critério para colinearidade

Transferindo a propriedade de pontos para retas temos o seguinte lema, que serve para provar que três pontos são colineares.

Lema 6. Sejam a, b, c, d retas que passam por um ponto e a, x, y, z retas que passam por um outro ponto. As sete retas são distintas. Então se $(a, b; c, d) = (a, x; y, z)$ então $b \cap x$, $c \cap y$ e $d \cap z$ representam pontos colineares.

Demonstração. Sejam K e L as interseções de b, x e c, y , respectivamente. A reta KL corta d em M e z em M' . Seja A a interseção de KL e a . Note que A, K, L, M, M' são colineares.



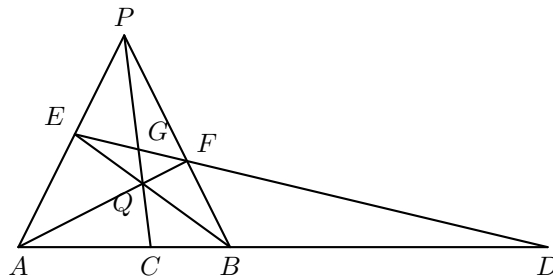
Então $(A, K; L, M) = (a, b; c, d) = (a, x; y, z) = (A, K; L, M')$, o que implica $M = M'$, o que termina a demonstração. □

4 Geometria projetiva via razões cruzadas

Primeiro, vamos ver porque quádruplas e pinceis harmônicos são tão importantes.

Lema 7. Seja C um ponto sobre a reta AB . Considere um ponto P fora de AB e ponto Q sobre PC . As retas AQ e PB se cortam em F e as retas BQ e PA se cortam em E . As retas EF e BC se cortam em D . Sendo G a interseção de PC e EF , $(A, B; C, D) = (E, F; G, D) = -1$.

Demonstração. Você deve conhecer a demonstração com Ceva e Menelaus, mas tem essa só com razões cruzadas!



De fato, é só usar as propriedades:

$$(E, F; G, D) \stackrel{P}{=} (A, B; C, D) \stackrel{Q}{=} (F, E; G, D).$$

Mas $(F, E; G, D) = \frac{1}{(E, F; G, D)}$, logo, como $E \neq F$ e $D \neq G$, $(E, F; G, D) \neq 1$, de modo que

$$(E, F; G, D) = \frac{1}{(E, F; G, D)} \iff (E, F; G, D) = -1.$$

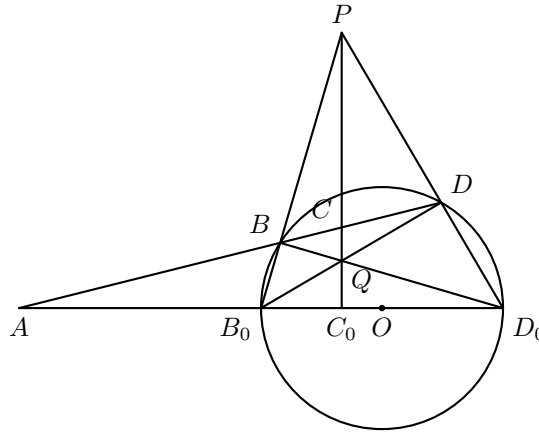
É claro que $(A, B; C, D) = -1$ também. □

4.1 Polar e polo via razões cruzadas

Usando um círculo de referência ω , podemos definir polar.

Lema 8. Sejam ω um círculo e A um ponto que não está sobre ω . Construa uma reta por A que corta ω em B e D . Seja C o conjugado harmônico de A com relação a B e D . Então todos os pontos C construídos dessa forma estão sobre uma reta a . Essa reta a é a *polar* de A , e A é o *polo* da reta a .

Demonstração. Construa a reta AO , sendo O o centro de ω . Essa reta corta ω em B_0 e D_0 . Sendo ABD uma reta que corta ω em B e D , com C sendo o conjugado harmônico de A com relação a B e D , o ponto C está sobre a reta que passa por P , interseção de BB_0 e DD_0 , e Q , interseção de BD_0 e DB_0 .



Mas, sendo B_0D_0 diâmetro, B_0D e D_0B são alturas de PB_0D_0 . Logo Q é o ortocentro de PB_0D_0 , e CC_0 é perpendicular a B_0D_0 . Como B_0 , C_0 e D_0 são fixados (C_0 é o conjugado harmônico de A), □

Há alguns corolários importantes: como A e C são conjugados harmônicos, a polar de C passa por A . Com isso, provamos a dualidade (La Hire): se um ponto P está na polar de Q , então Q está na polar de P .

Também, como provamos que se $(A, C_0; B_0, D_0) = -1$ então os círculos de diâmetros AC_0 e B_0D_0 são ortogonais, então se A está fora de ω , sua reta polar passa pelos pontos de tangência das retas por A a ω .

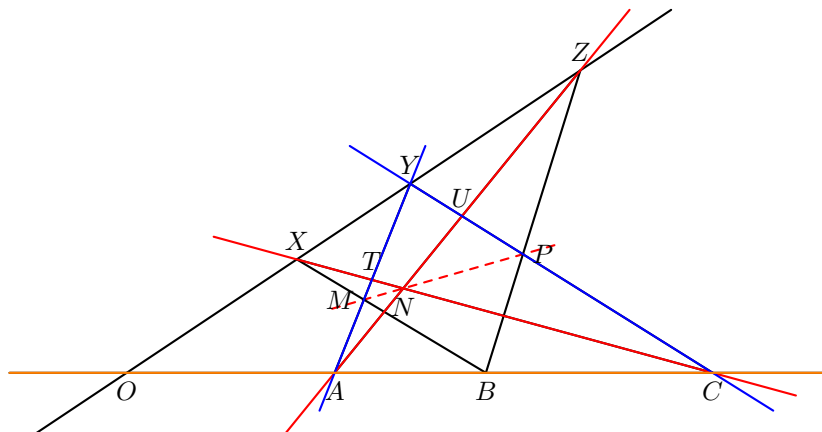
Finalmente, para completar a definição, para valer La Hire para pontos P sobre ω , a polar de P é a tangente a ω por P .

5 Alguns teoremas clássicos via razões cruzadas

Muitos dos teoremas a seguir têm demonstrações até melhores, mas são boas oportunidades para treinar.

Como eles são conhecidos, vamos direto às demonstrações.

5.1 Teorema de Pappus



A ideia é provar que, digamos, MP , AZ e CX são concorrentes. Vamos achar um sétimo ponto para usar o lema de projeção. Um candidato natural é Y (ou B), que está nas retas AY e CY . Usando as ideias do lema, queremos então provar que

$$(Y, M; A, T) = (Y, P; U, C),$$

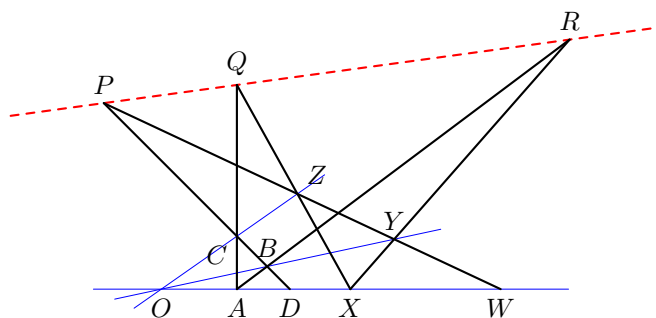
em que T é a interseção de CX e AY e U é a interseção de AZ e CY .

Projetando tudo sobre $OABC$, temos

$$(Y, M; A, T) \stackrel{X}{=} (O, B; A, C) \stackrel{Z}{=} (Y, P; U, C).$$

Isso termina a demonstração.

5.2 Teorema de Desargues



Se AX , BY e CZ são concorrentes em O , a ideia é provar que P , Q e R são colineares. Uma maneira é mostrar, por exemplo, que

$$(AX, AP; AQ, AR) = (XA, XP; XQ, XR).$$

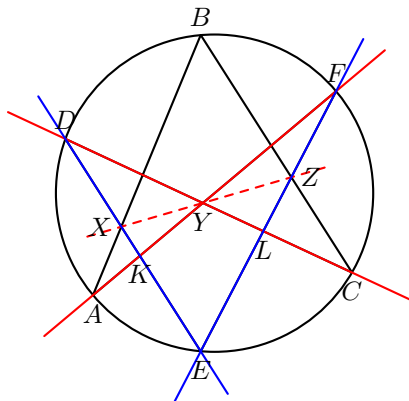
Vamos projetar tudo por X em PBC e por A em PYZ . Sejam D e W as interseções de PB e PY com OA , respectivamente. Então

$$(AX, AP; AQ, AR) = (D, P; C, B) \stackrel{O}{=} (W, P; Z, Y) = (XW, XP; XQ, XR).$$

Como as retas AX e XW coincidem, P , Q e R , interseções de AP, XP , AQ, XQ e AR, XR , são colineares.

Se P , Q e R são colineares, aplicando o que acabamos de provar aos triângulos QAX e PBY mostra que $QA \cap PB = \{C\}$, $QX \cap PY = \{Z\}$ e $AX \cap BY$ são colineares, ou seja, AX , BY e CZ são concorrentes.

5.3 Teorema de Pascal



Vamos provar que, por exemplo, XZ , CD e AF são concorrentes, usando como sétimo ponto E . Assim, sejam K e L as interseções de DE com AF e de EF com CD .

Os dois pontos do círculo que parecem ser naturais para projetar são A e C . De fato,

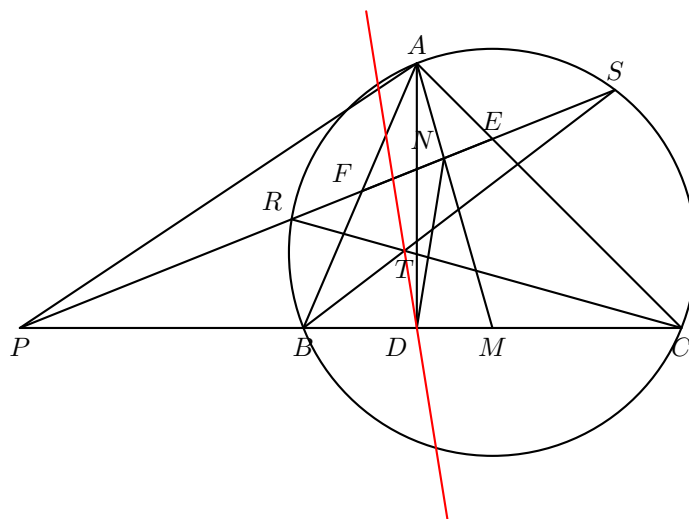
$$(AD, AF; AB, AE) = (CD, CF; CB, CE) \iff (D, K; X, E) = (L, F; Z, E).$$

Como E é comum, as retas $DL = CD$, $KF = AF$ e XZ são concorrentes, ou seja, X , Y e Z são colineares.

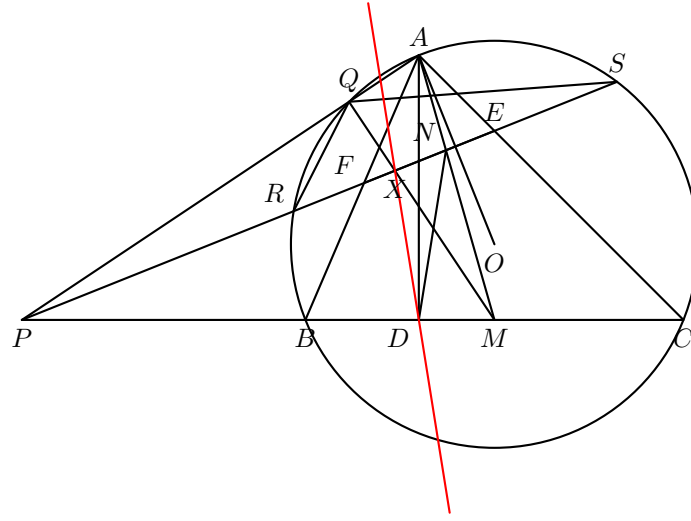
6 Problema 2, OBM 2025

Seja ABC um triângulo acutângulo com $AB < AC$ e seja Γ sua circunferência circunscrita. Defina M como o ponto médio do lado BC , e D , E e F como os pés das alturas relativas aos lados BC , AC e AB , respectivamente. Tome o ponto N como a interseção de EF e AM . Sejam R , S as interseções de EF e Γ , de forma que R esteja no arco menor AB de Γ e S esteja no arco menor AC de Γ . Além disso, suponha que BS e CR se encontram no ponto T . Mostre que DA é bissetriz do ângulo $\angle TDN$.

Solução. Defina P como a interseção de RS e BC .



Primeiro, note que $(B, C; P, D) = -1$, pois as alturas AD , BE e CF são concorrentes. Além disso, T também está na polar de P (construção da polar só com a régua). Com isso, a polar de P é DT e podemos limpar um pouco a figura. Sejam Q a interseção de AP e Γ , e X a interseção de DT e RS .



Por outro lado, como ABC e AEF são semelhantes e AD e AO são conjugados isogonais, $AO \perp EF$, o que implica $AR = AS$. Com isso, $\angle RQP = \angle ASR = \angle ARS = \angle AQS$, ou seja, QP é bissetriz externa de $\angle RQS$. Por outro lado, como X pertence à polar de P , $(QP, QX; QR, QS) = (P, X; R, S) = -1$, logo QX é bissetriz interna de $\angle RQS$, de modo que $\angle AQX = 90^\circ$.

É bem conhecido que, sendo H o ortocentro de ABC , $QH \perp AQ$: de fato, sendo P o centro radical dos circuncírculos de AEF (de diâmetro AH), $BCEF$ e Γ , $AQFE$ é cíclico, de modo que $\angle AQH = 90^\circ$. Agora, $AH = 2OM$, de modo que HM corta AO no ponto diametralmente oposto a A em Γ . Com isso, H, M, Q e X são colineares.

Agora é só projetar: sendo XT a polar de P ,

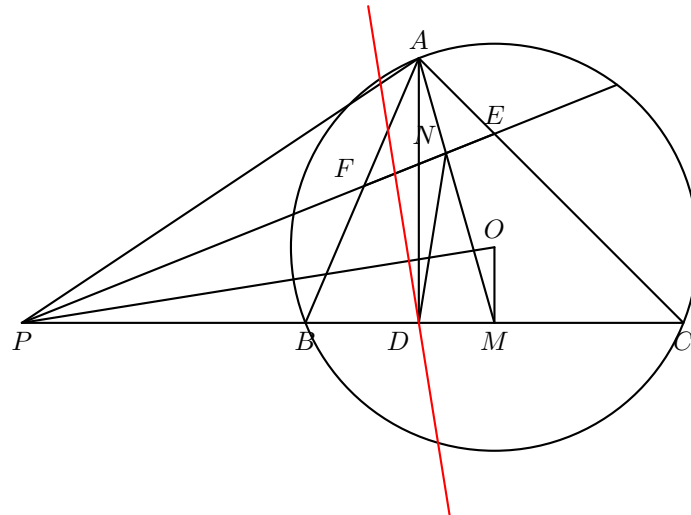
$$-1 = (XT, XP; XA, XQ) = (D, P; XA \cap BC, M) \stackrel{A}{=} (AD \cap RS, P; X, N) = (DA, DP; DT, DN),$$

e como $AD \perp DP$, DA bissecta $\angle TDN$. □

Pareceu complicado? Os pontos Q e X parecem carteados? Pois bem, dá para simplificar bem a solução se a gente não for purista e se dispuser a fazer umas continhas bem simples.

Solução (É importante não ser purista). Como antes, seja P a interseção de RS e BC .

Como na solução anterior, T está na polar de P e $(P, D; B, C) = -1$ implica D estar na polar de P . Assim, TD é a polar de P . Logo $OP \perp TD$, e $\angle ADT = \angle OPM$, cuja tangente é $\frac{OM}{MP}$. Limpando a figura temos:



Nossa missão é então provar que $\text{tg } \angle ADN = \frac{OM}{OP}$. Mas essa tangente não é difícil de calcular:

$$\text{tg } \angle ADN = \frac{\sin \angle ADN}{\cos \angle ADN} = \frac{\sin \angle ADN}{\sin \angle MDN} = \frac{[AND]/(AD \cdot DN)}{[MND]/(DM \cdot DN)} = \frac{AN \cdot DM}{MN \cdot AD}.$$

Agora, lembrando que $\angle AEF = \angle B$, $\angle FEM = \angle A$ e $EM = EM = BM = CM$ (M é o circuncentro de $BCEF$),

$$\frac{AN}{MN} = \frac{[ANE]}{[MNE]} = \frac{AE \cdot EN \sin B}{EM \cdot EN \sin A} = \frac{2AE \cdot AC}{BC^2}.$$

Com isso,

$$\text{tg } \angle ADN = \frac{2AE \cdot AC \cdot DM}{BC^2 \cdot AD},$$

e queremos provar que

$$\frac{2AE \cdot AC \cdot DM}{BC^2 \cdot AD} = \frac{OM}{PM}.$$

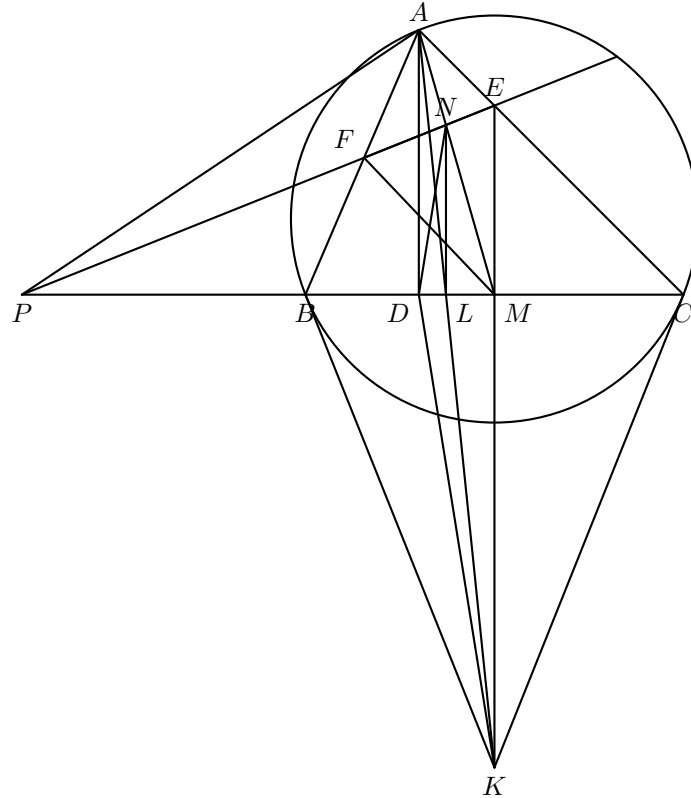
Mas sabemos que $(P, D; B, C) = -1$, de onde $DM \cdot PM = BM^2$. Sendo H o ortocentro de ABC , a conta acima se reduz a

$$AE \cdot AC = 2OM \cdot AD \iff AE \cdot AC = AH \cdot AD,$$

que é conhecido. □

Mais uma solução, sem trigonometria.

Solução (Rafael Filipe). Sejam K o polo de BC e P a interseção de BC e RS .



Como nas soluções anteriores, DT é a polar de P . Como P está sobre BC , por dualidade (ou La Hire), K está sobre DT .

Agora, as figuras $ABKC$ e $AEMC$ são semelhantes (conhecido – calcule ângulos para ver que M é o ponto de EF no circuncírculo de AEF), logo

$$\frac{AN}{AM} = \frac{AL}{AK}.$$

Isso implica ANL e AMK semelhantes, logo NL e MK são paralelos, ou seja, $NL \perp BC$. Queremos $\angle NKL = \angle MDK$, que é o mesmo que NDL e KDM semelhantes, ou melhor, ainda, queremos

$$\frac{NL}{DL} = \frac{KM}{DM} \iff \frac{NL}{MK} = \frac{DL}{DM}.$$

Mas isso é fácil: das semelhanças entre ANL e AMK e entre ADM e NLM ,

$$\frac{NL}{MK} = \frac{AN}{NM} = \frac{DL}{DM}.$$

7 Problemas

1. Seja $ABCD$ um quadrilátero convexo, P a interseção das retas AB e CD , Q a interseção das retas AD e BC e O a interseção das diagonais AC e BD . Prove que se $\angle POQ$ é um ângulo reto então PO é bissetriz de $\angle AOD$ e QO é bissetriz de $\angle AOB$.
2. (Um clássico) Prove o *teorema da borboleta*: seja AB uma corda de um círculo e M seu ponto médio. Duas cordas CD e EF passam por M . As cordas CE e DF cortam AB em P e Q . Prove que M é também ponto médio de PQ .
3. Seja Γ um círculo e A um ponto exterior a Γ . As retas tangentes a Γ que passam por A tocam Γ em B e C . Seja M o ponto médio de AB . O segmento MC corta Γ novamente em D e a reta AD corta Γ novamente em E . Sendo $AB = a$ e $BC = b$, calcular CE em função de a e b .
4. Seja ω o circuncírculo do triângulo ABC e O seu circuncentro. Por C , construímos uma reta tangente a ω que intersecta AB em M . Uma reta por M e perpendicular a OM intersecta os prolongamentos de BC e AC em P e Q , respectivamente. Mostre que $PM = MQ$.
5. Seja ABC um triângulo acutângulo e H seu ortocentro. As retas BH e CH cortam AC e AB em D e E , respectivamente. O circuncírculo de ADE corta o circuncírculo de ABC em $F \neq A$. Provar que as bissetrizes internas de $\angle BFC$ e $\angle BHC$ se cortam em um ponto sobre o segmento BC .
6. Os pontos A, B, C, D, E estão em um círculo ω e P está fora do círculo de modo que PB e PD são tangentes a ω , P, A e C são colineares e DE é paralelo a AC . Prove que BE bissecta AC .
7. Seja M_1 um ponto sobre o lado AB do quadrilátero $ABCD$. Seja M_2 a interseção de DM_1 e BC , M_3 a interseção de AM_2 e CD , M_4 a interseção de BM_3 e DA , e assim por diante. Prove que $M_{13} = M_1$.
8. Um quadrilátero $ABCD$ está inscrito em um círculo k , onde AB é maior que CD e AB não é paralelo a CD . O ponto M é a interseção das diagonais AC e BD , e a perpendicular de M a AB intersecta o segmento AB no ponto E . Se EM bissecta o ângulo CED , prove que AB é um diâmetro de k .
9. Sejam H e M o ortocentro de um triângulo acutângulo ABC e o ponto médio de BC , respectivamente. A circunferência de diâmetro AH intersecta AB e AC nos pontos D e E , respectivamente. O ponto P é definido como o encontro de AH com DE e a reta que passa por H e é perpendicular a AH intersecta DM no ponto Q . Prove que P, Q e B são colineares.

10. No quadrilátero cíclico $ABCD$, sejam E a interseção de AD e BC , com C entre B e E , e F a interseção de AC e BD . Seja M o ponto médio de CD e $N \neq M$ um ponto no circuncírculo de ABM tal que $\frac{AM}{MB} = \frac{AN}{BN}$. Prove que E , F e N são colineares.
11. Para um triângulo ABC , Γ é a circunferência circunscrita e D é um ponto no prolongamento de AB por A . Os pontos $E \in \Gamma$ e $F \in \Gamma$ são tais que DE e DF são tangentes a Γ e EF corta AC em $T \neq C$. O ponto P , diferente de B e de C , é um ponto no arco BC , que não contém A , e PD corta Γ em $Q \neq P$. Seja $X \neq Q$ o ponto de interseção de BQ e DT , e PT corta Γ em $Y \neq P$. Prove que C , X e Y são colineares.
12. Seja $ABCD$ um quadrilátero inscrito em um círculo ω , tal que existe um ponto P sobre o prolongamento de AC tal que as retas PB e PD são tangentes a ω . A reta tangente a ω que passa por C corta a reta PD em Q e a reta AD em R . Seja E o segundo ponto de interseção de AQ e ω . Prove que B , E e R são colineares.