

Razão cruzada e geometria projetiva – soluções dos problemas

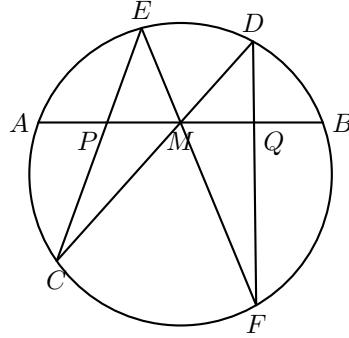
Carlos Shine

1. Seja $ABCD$ um quadrilátero convexo, P a interseção das retas AB e CD , Q a interseção das retas AD e BC e O a interseção das diagonais AC e BD . Prove que se $\angle POQ$ é um ângulo reto então PO é bissetriz de $\angle AOD$ e QO é bissetriz de $\angle AOB$.

Solução. Esse problema sai direto do fato de que $(OP, OA; OQ, OC) = -1$.

2. (Um clássico) Prove o *teorema da borboleta*: seja AB uma corda de um círculo e M seu ponto médio. Duas cordas CD e EF passam por M . As cordas CE e DF cortam AB em P e Q . Prove que M é também ponto médio de PQ .

Solução. Sabemos que, no círculo, $(DA, DC; DB, DF) = (EA, EC; EB, EF)$.

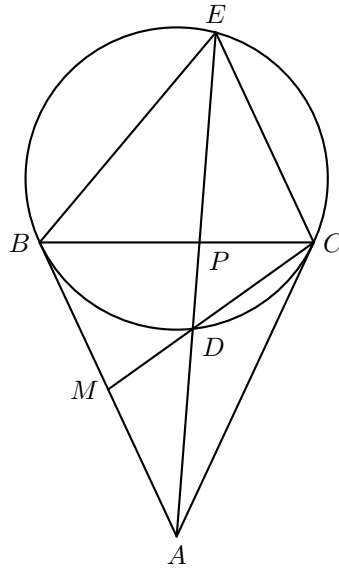


Aí $(A, M; B, Q) = (A, P; B, M)$ e é só fazer conta:

$$\frac{AB \cdot QM}{AQ \cdot BM} = \frac{AB \cdot PM}{AM \cdot BP} \iff \frac{AM + MQ}{MQ} = \frac{BM + PM}{PM} \iff PM = QM.$$

3. Seja Γ um círculo e A um ponto exterior a Γ . As retas tangentes a Γ que passam por A tocam Γ em B e C . Seja M o ponto médio de AB . O segmento MC corta Γ novamente em D e a reta AD corta Γ novamente em E . Sendo $AB = a$ e $BC = b$, calcular CE em função de a e b .

Solução. Seja P a interseção de BC e AE .



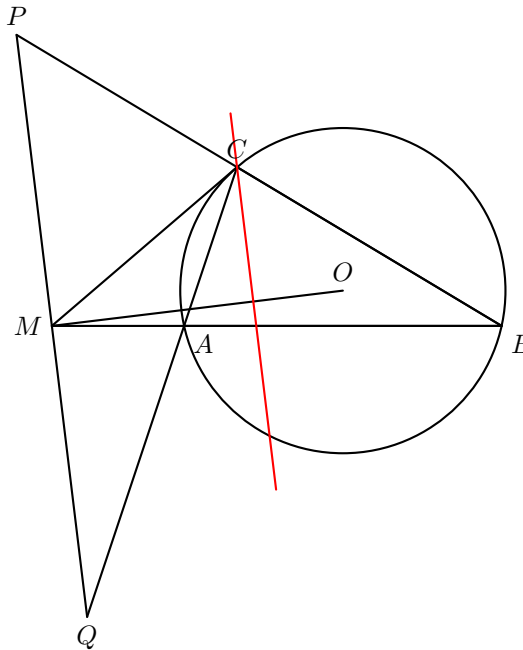
Então já sabemos que $(E, D; P, A) = -1 \iff (CE, CD; CP, CA) = -1 \iff (CE \cap AB, M; B, A) = -1$. Como M é ponto médio de AB , CE é paralelo a AB .

Logo $\angle ECB = \angle ABC = \angle BEC$, de modo que BCE é isósceles com $\angle ECB = \angle BEC = \angle ABC = \angle ACB$. Logo BCE e ABC são semelhantes, e

$$\frac{CE}{BC} = \frac{BC}{AB} \iff CE = \frac{b^2}{a}.$$

4. Seja ω o circuncírculo do triângulo ABC e O seu circuncentro. Por C , construímos uma reta tangente a ω que intersecta AB em M . Uma reta por M e perpendicular a OM intersecta os prolongamentos de BC e AC em P e Q , respectivamente. Mostre que $PM = MQ$.

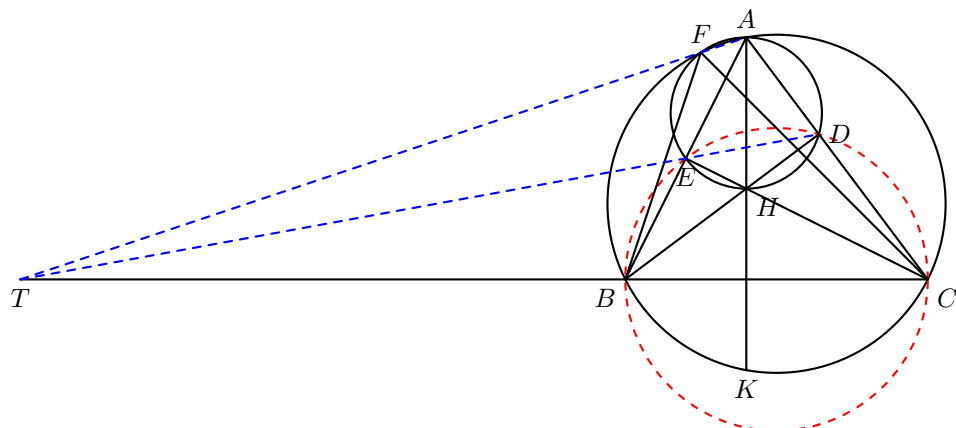
Solução. Trace a polar m de M . Como CM é tangente ao círculo, $C \in m$, e sendo $OM \perp PQ$, PQ é paralela a m .



O problema acaba imediatamente notando que $(CM, m; CA, CB) = -1$ e projetando por C : $(M, C_\infty, Q, P) = -1$.

5. Seja ABC um triângulo acutângulo e H seu ortocentro. As retas BH e CH cortam AC e AB em D e E , respectivamente. O circuncírculo de ADE corta o circuncírculo de ABC em $F \neq A$. Provar que as bissetrizes internas de $\angle BFC$ e $\angle BHC$ se cortam em um ponto sobre o segmento BC .

Solução. Sabemos que o círculo de diâmetro BC passa por D e E , logo os eixos radicais AF , DE e BC se cortam no centro radical T .



Seja $K \neq A$ a interseção de AH e o circuncírculo de ABC . Então K é a reflexão de H em BC , de modo que $BK = BH$ e $CK = CH$.

O ponto T é o conjugado harmônico de $AH \cap BC$. Assim

$$-1 = (AT, AK; AB, AC) = (F, K; B, C) \implies \frac{FB}{FC} = -\frac{KB}{KC} = \frac{BH}{BC},$$

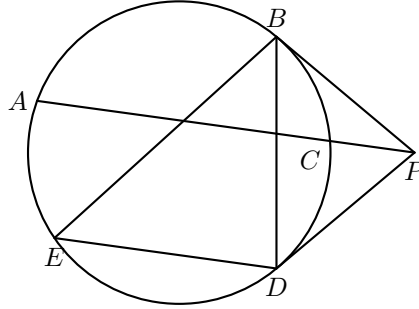
o que termina o problema.

6. Os pontos A, B, C, D, E estão em um círculo ω e P está fora do círculo de modo que PB e PD são tangentes a ω , P, A e C são colineares e DE é paralelo a AC . Prove que BE bissecta AC .

Solução. Temos

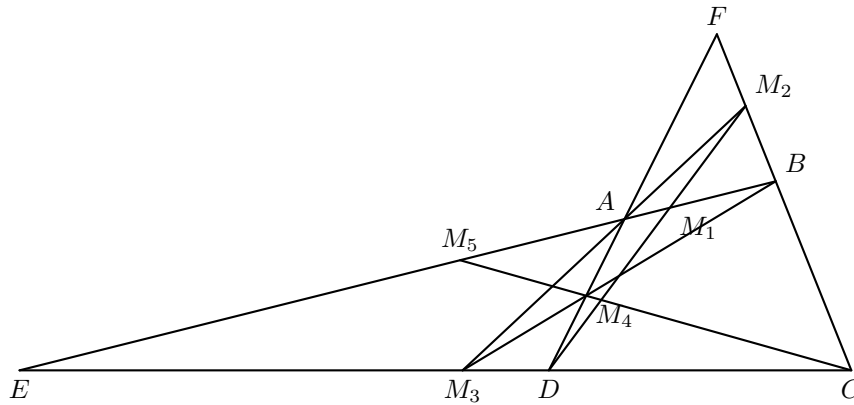
$$-1 = (A, C; BD \cap AP, P) \stackrel{B}{=} (A, C; D, B) = (EA, EC; ED, EB),$$

logo sendo ED paralelo a AC , EB bissecta AC .



7. Seja M_1 um ponto sobre o lado AB do quadrilátero $ABCD$. Seja M_2 a interseção de DM_1 e BC , M_3 a interseção de AM_2 e CD , M_4 a interseção de BM_3 e DA , e assim por diante. Prove que $M_{13} = M_1$.

Solução. Sejam E e F as interseções de AB e CD e AD e BC , respectivamente.



Então

$$(E, A; B, M_1) \stackrel{D}{=} (C, F; B, M_2) \stackrel{A}{=} (C, D; E, M_3) \stackrel{B}{=} (F, D; A, M_4) \stackrel{C}{=} (B, E; A, M_5).$$

A cada quatro iterações, rodamos $E, A, B \rightarrow B, E, A$; logo, depois de três rodadas, ou seja, doze interações, voltamos ao lugar, ou seja, $(E, A; B, M_1) = (E, A; B, M_{13})$. Com isso, $M_{13} = M_1$.

8. Um quadrilátero $ABCD$ está inscrito em um círculo k , onde AB é maior que CD e AB não é paralelo a CD . O ponto M é a interseção das diagonais AC e BD , e a perpendicular de M a AB intersecta o segmento AB no ponto E . Se EM bissecta o ângulo CED , prove que AB é um diâmetro de k .

Solução. Já temos de cara que $(AB, EM; ED, EC) = -1$. Projetando sobre CD , e sendo P a interseção de AB e CD e R a interseção de EM e CD , temos $(P, R; D, C) = -1$. Logo R, Q, M e, portanto, E , estão na polar de P .

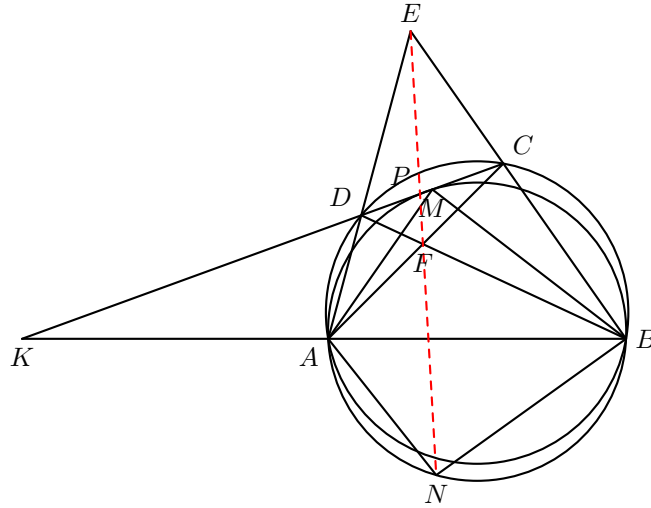
Colocando a origem em M na reta numerada BC , de modo que $c = -b$, temos que provar que

$$c(t - b) = t(f - b) \iff -bt + b^2 = tf - bt \iff b^2 = ft.$$

Mas isso é verdade pois $(T, F; B, C) = -1$.

10. No quadrilátero cíclico $ABCD$, sejam E a interseção de AD e BC , com C entre B e E , e F a interseção de AC e BD . Seja M o ponto médio de CD e $N \neq M$ um ponto no circuncírculo de ABM tal que $\frac{AM}{MB} = \frac{AN}{BN}$. Prove que E, F e N são colineares.

Solução. É sempre bom considerar a segunda interseção entre reta e círculo. No caso, sejam P a segunda interseção de CD e o circuncírculo de ABM e K a interseção de AB e CD .



Por potência de ponto, $KP \cdot KM = KA \cdot KB = KC \cdot KD$, de modo que P é o conjugado harmônico de K com relação a CD , ou seja, $(K, P; C, D) = -1$. Com isso, P pertence à reta EF . Além disso, $(K, EF \cap AB; A, B) = -1$.

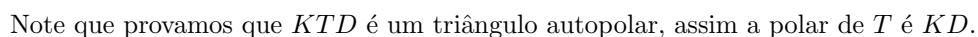
Por outro lado, como $\frac{AM}{BM} = \frac{AN}{BN}$, $(M, N; A, B) = -1$. Projetando sobre AB temos

$$(PM, PN; PA, PB) = -1 \iff (K, PN \cap AB; A, B) = -1.$$

Portanto $EF \cap AB = PN \cap AB$, ou seja, E, F e N são colineares.

11. Para um triângulo ABC , Γ é a circunferência circunscrita e D é um ponto no prolongamento de AB por A . Os pontos $E \in \Gamma$ e $F \in \Gamma$ são tais que DE e DF são tangentes a Γ e EF corta AC em $T \neq C$. O ponto P , diferente de B e de C , é um ponto no arco BC , que não contém A , e PD corta Γ em $Q \neq P$. Seja $X \neq Q$ o ponto de interseção de BQ e DT , e PT corta Γ em $Y \neq P$. Prove que C, X e Y são colineares.

Solução. Como EF é a polar de D , sejam R e S as interseções de DT e Γ (para aproveitarmos que $(D, T; R, S) = -1$). Agora, como $-1 = (D, T; R, S) \stackrel{A}{=} (B, C; R, S)$, projetando por S em BC , temos que $(B, C; RS \cap BC, U) = -1$, em que U é a interseção de BC com a tangente por S . Se projetarmos por R obtemos $(B, C; RS \cap BC, V) = -1$, em que V é a interseção de BC com a tangente por R . Logo $U = V$, ou seja, o polo K de RS pertence a BC . Como D pertence a $k = RS$, K pertence a $d = EF$. Com isso, K é a interseção de BC e EF .



Mas a polar de $QY \cap PZ$ é a reta que passa por T , interseção de QZ e PY , e D , interseção de YZ e PQ , ou seja, $k = TD$. Logo $QY \cap PZ$ é na verdade K .

12. Seja $ABCD$ um quadrilátero inscrito em um círculo ω , tal que existe um ponto P sobre o prolongamento de AC tal que as retas PB e PD são tangentes a ω . A reta tangente a ω que passa por C corta a reta PD em Q e a reta AD em R . Seja E o segundo ponto de interseção de AQ e ω . Prove que B , E e R são colineares.

The diagram illustrates a geometric construction involving a circle and a horizontal line. The circle has points A, B, C, D, E on its circumference. A horizontal line contains points T, X, C, Q, R in order from left to right. Point A is at the top of the circle. Lines connect A to B, C, D, E . Lines connect T to B, C, D, E . Lines connect R to B, C, D, E . A dashed blue line connects T and D . A dashed red line connects R and B . A point P is located below the horizontal line, with lines connecting it to C and Q .

Com isso, $(T, C; X, R) = -1$. Além disso, AC é a polar de T . Como P pertence a essa polar, T pertence à polar de P , que é BD .

Sendo $E' \neq B$ a interseção BR e ω , projetando $(T, C; X, R)$ em ω por B obtemos $(D, C; A, E') = -1$. Isso combinado com $(D, C; A, E) = -1$ prova que $E' = E$, o que acaba o problema.