Language: **Portuguese**

Day: **1**

Sábado, 11 de Abril de 2026

Problema 1. Um tabuleiro 2026×2026 é dito *bordeaux* se pelo menos uma das suas 2026^2 casas estiver colorida de vermelho. Uma região retangular composta por casas é dita *ímparmente retangular* se contiver uma quantidade ímpar de casas coloridas de vermelho. Determine o maior inteiro positivo M tal que, em todo tabuleiro bordeaux 2026×2026, exista uma região ímparmente retangular com pelo menos M casas.

Observação: Uma região retangular contém todo o seu interior e possui lados paralelos aos lados do tabuleiro.

Problema 2. Dado um inteiro positivo n, Maria começa a jogar com o número 1 escrito em um quadro. Quantas vezes quiser, ela pode fazer o seguinte: escolher um inteiro j, tal que $1 \leq j \leq n$, e substituir o número V no quadro pelo número $j \cdot R\left(\frac{V}{j}\right)$. Aqui, $R(x)$ denota o inteiro mais próximo de x; se x estiver a mesma distância dois inteiros consecutivos, o valor é arredondado para cima. Por exemplo, $R(1,3) = 1$ e $R(1,5) = R(1,8) = 2$.

a) Mostre que, para cada n dado, existe um inteiro positivo B tal que Maria nunca consegue escrever um número maior que B no quadro.

b) Para cada n, seja $f(n)$ o maior número que se pode escrever no quadro após uma quantidade finita de substituições. Mostre que existe um inteiro positivo N tal que para todo $n \geq N$ temos que 2026 divide $f(n)$.

Problema 3. Seja $\mathbb{R}$ o conjunto dos números reais. Determine todas as funções $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tais que para todos números reais x, y temos:

$$f((f(x) + f(y))^2) = (x + y)f(x + y).$$

Language: Português

Tempo: 4 horas e 30 minutos
Cada problema vale 7 pontos

Domingo, 12 de Abril de 2026

Problema 4. Seja $1 = a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \dots$ uma sequência infinita de números reais tal que $a_n = a_{2n} + a_{2n+1}$, para todo inteiro positivo n. Seja $r = 2026^{2026}$. Mostre que

$$\frac{1}{r} \leq a_r \leq \frac{2}{r+1}.$$

Problema 5. Seja ABC um triângulo acutângulo com $AC > AB$. Denote por ω o seu circuncírculo e por O o seu circuncentro. Seja K a interseção das tangentes a ω nos pontos B e C. O circuncírculo do triângulo ABK intersecta a reta BC novamente em $Z \neq B$. Seja L o ponto médio de KZ. Seja X a interseção das retas KZ e AB. Seja V o ponto no circuncírculo de ABL, situado no mesmo semiplano de BC que o ponto A, tal que OV é perpendicular a KZ. Mostre que LV é perpendicular a CX.

Problema 6. Sejam p um número primo e n um inteiro positivo tal que p **não** divide n. Denotamos por k a quantidade de divisores positivos de n, e por $1 = d_1 < d_2 < \cdots < d_k = n$ os seus divisores positivos. Para $i = 1, 2, \dots, k$, seja c_i a quantidade de divisores positivos ℓ de d_i^2 tais que $d_i - \ell$ é divisível por p. Mostre que

$$(p-1)(c_1 + c_2 + \cdots + c_k) \geq k^2.$$