

# The 17<sup>th</sup> Romanian Master of Mathematics Competition

Dia 1: 25 de fevereiro de 2026, Bucareste

Idioma: Português

**Problema 1.** Seja  $n$  um inteiro positivo. Alice desenha um triângulo de área 1 no quadro. Em seguida, ela desenha triângulos adicionais realizando  $n$  operações em sequência. Em cada operação, ela escolhe um triângulo desenhado  $\Delta$  que não contenha pontos marcados em seu interior, marca um ponto  $P$  em seu interior e desenha três triângulos menores ligando  $P$  a cada vértice de  $\Delta$  por meio de um segmento.

Após a realização dessas  $n$  operações, Bob escolhe três triângulos distintos desenhados  $\Delta_1$ ,  $\Delta_2$  e  $\Delta_3$  que não contenham pontos marcados em seus interiores de modo que  $\Delta_2$  compartilhe um lado com  $\Delta_1$  e outro com  $\Delta_3$ . Em função de  $n$ , determine a maior constante  $c$  para a qual Bob pode garantir em sua escolha que a soma das áreas de  $\Delta_1$ ,  $\Delta_2$  e  $\Delta_3$  é pelo menos  $c$ , independentemente das escolhas de Alice.

**Problema 2.** Seja  $p \geq 11$  um primo. Suponha que, se  $a$  e  $b$  são inteiros tais que  $1 \leq a < b \leq p - 3$ , então  $b! - a!$  não é divisível por  $p$ . Prove que  $p - 5$  é divisível por 8.

**Problema 3.** Seja  $\mathcal{S}$  um subconjunto finito de  $\mathbb{R}^3$ . Prove que existem três polinômios  $P(x, y, z)$ ,  $Q(x, y, z)$  e  $R(x, y, z)$  com coeficientes reais tais que uma tripla de números reais  $(a, b, c)$  pertence a  $\mathcal{S}$  se, e somente se, o sistema de equações

$$P(x, y, z) = a,$$

$$Q(x, y, z) = b,$$

$$R(x, y, z) = c,$$

não possui solução com  $x$ ,  $y$  e  $z$  reais.

Duração: 4 horas e 30 minutos

Cada problema vale 7 pontos

# The 17<sup>th</sup> Romanian Master of Mathematics Competition

Dia 2: 26 de fevereiro de 2026, Bucareste

Idioma: Português

**Problema 4.** Para  $m$  inteiro positivo, seja  $\varphi(m)$  o número de inteiros positivos menores ou iguais a  $m$  e coprimos com  $m$ . Defina  $\varphi_0(m) = m$  e, para cada inteiro positivo  $k$ ,  $\varphi_k(m) = \varphi(\varphi_{k-1}(m))$ . Para  $n \geq 3$  inteiro, prove que

$$\varphi_0(2^n - 3) \cdot \varphi_1(2^n - 3) \cdot \varphi_2(2^n - 3) \cdot \dots \cdot \varphi_n(2^n - 3)$$

possui no máximo  $n$  divisores primos distintos.

**Problema 5.** Seja  $ABC$  um triângulo com  $AB < AC$  e  $O$  o seu circuncentro. Seja  $XYZT$  um paralelogramo no interior do triângulo  $ABC$  tal que

$$\begin{aligned}\angle AXB &= \angle AZC, & \angle AZB &= \angle AXC, \\ \angle AYB &= \angle ATC, & \angle ATB &= \angle AYC.\end{aligned}$$

Prove que as diagonais  $XZ$  e  $YT$  do paralelogramo se intersectam na circunferência circunscrita a  $BOC$ .

**Problema 6.** Seja  $k > 1$  um inteiro, e seja  $S$  o conjunto de todas as  $(k+1)$ -uplas de inteiros  $X = (x_1, \dots, x_{k+1})$  tais que  $1 \leq x_1 < \dots < x_{k+1} \leq k^2 + 1$ . Se  $\sigma$  é uma permutação dos números  $1, 2, \dots, k^2 + 1$ , dizemos que um elemento  $X$  de  $S$  é  $\sigma$ -legal se a sequência  $\sigma(x_1), \sigma(x_2), \dots, \sigma(x_{k+1})$  é monótona.

Se  $X = (x_1, \dots, x_{k+1})$  é um elemento de  $S$ , prove que

$$\min_{1 \leq i \leq k} \left\lfloor \frac{x_i}{i} \right\rfloor + \min_{2 \leq i \leq k+1} \left\lfloor \frac{k^2 + 2 - x_i}{k + 2 - i} \right\rfloor \geq k + 1$$

se, e somente se, existe uma permutação  $\sigma$  para a qual  $X$  é a única  $(k+1)$ -upla  $\sigma$ -legal em  $S$ .

Duração: 4 horas e 30 minutos  
Cada problema vale 7 pontos