

VII Competição Elon Lages Lima

Gabarito

Instruções:

- Marque apenas uma alternativa em cada questão.
- Não é permitido o uso de calculadoras, aparelhos eletrônicos ou quaisquer consultas a notas ou livros.
- Ao terminar, entregue esta prova (com os rascunhos) e o cartão de respostas ao (a) professor(a) aplicador(a).
- Data e horário de aplicação: 29/05/26, das 14h às 15h30 (horário de Brasília).
- Lembre-se de que, ao participar da OBM, o aluno se compromete a não divulgar conteúdo das questões até a publicação do gabarito no site da OBM.
- Pontuação das questões

01 a 05	06 a 10	11 a 15
3 pontos	4 pontos	5 pontos

Questão 1.

Sejam $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ duas funções reais de variável real e deriváveis.

Se $f(a) = 2, f'(a) = 1, g(a) = -1$ e $g'(a) = 2$, podemos afirmar que o valor de

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x)f(a) - g(a)f(x)}{x - a} \text{ é igual a:}$$

- (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5

Resposta: **E**.

Solução. Esse limite é uma indeterminação do tipo $\frac{0}{0}$. Aplicando a regra de l'Hôpital temos que

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x)f(a) - g(a)f(x)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{g'(x)f(a) - g(a)f'(x)}{(x - a)'} = g'(a)f(a) - g(a)f'(a) = 2 \times 2 - (-1) \times 1 = 5. \quad \square$$

Outra maneira: Note que

$$g(x)f(a) - g(a)f(x) = g(x)f(a) - g(a)f(a) + g(a)f(a) - g(a)f(x) = [g(x) - g(a)]f(a) - g(a)[f(x) - f(a)].$$

$$\text{Logo } \lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x)f(a) - g(a)f(x)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \left[\frac{g(x) - g(a)}{x - a} \cdot f(a) - g(a) \cdot \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \right].$$

Como f e g são deriváveis o limite de cada parcela existe separadamente e então segue que

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x)f(a) - g(a)f(x)}{x - a} = g'(a)f(a) - g(a)f'(a) = 2 \times 2 - (-1) \times 1 = 5. \quad \square$$

Questão 2.

Se a, b e c são números reais positivos tais que $a \geq 3$ e $ab + ac + bc = 16$, então o menor valor possível de $2a + b + c$ é:

- (A) 10 (B) 12 (C) 16 (D) 18 (E) 20

Resposta: **A**.

Solução. A partir da condição dada, $(a + b)(a + c) = a^2 + ab + bc + ca = a^2 + 16 \geq 3^2 + 16 = 25$.

Então segue que $2a + b + c = (a + b) + (a + c) \geq 2\sqrt{(a + b)(a + c)} \geq 2\sqrt{25} = 10$,

na qual a igualdade ocorre quando $a = 3, a + b = a + c$ e $ab + bc + ca = 16$, ou seja, $a = 3$ e $b = c = 2$.

Portanto, o valor mínimo de $2a + b + c$ é 10. □

Questão 3.

Seja $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(1) = 2027$ e, para $n > 1$, $f(1) + f(2) + \dots + f(n) = n^2 \cdot f(n)$.

Qual o valor de $f(2026)$?

- (A) 1 (B) $\frac{1}{2026}$ (C) $\frac{1}{2027}$ (D) $\frac{1}{1013}$ (E) $\frac{2026}{2027}$

Resposta: **D**.

Solução. Da equação dada, temos

$$n^2 \cdot f(n) = (f(1) + f(2) + \dots + f(n-1)) + f(n) = (n-1)^2 f(n-1) + f(n),$$

$$\text{ou seja, } f(n-1) = f(n) \cdot \frac{n+1}{n-1}.$$

$$\text{Logo, } \frac{f(n)}{f(1)} = \frac{f(n)}{f(n-1)} \cdot \frac{f(n-1)}{f(n-2)} \cdot \dots \cdot \frac{f(2)}{f(1)} = \frac{n-1}{n+1} \cdot \frac{n-2}{n} \cdot \dots \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{(n+1)n}.$$

$$\text{Portanto, } f(2026) = \frac{2f(1)}{2027 \cdot 2026} = \frac{1}{1013}. \quad \square$$

Questão 4.

Qual o primeiro algarismo após a vírgula da representação decimal de $\sqrt{9 \cdot 100^2 + 4 \cdot 100}$?

- (A) 4 (B) 5 (C) 6 (D) 7 (E) 8

Resposta: **C**.

Solução. Temos que $300 < \sqrt{9 \cdot 100^2 + 4 \cdot 100} < \sqrt{9 \cdot 100^2 + 6 \cdot 100 + 1} = 301$.

$$\text{Além disso, } \sqrt{9 \cdot 100^2 + 4 \cdot 100} - 300 = \frac{400}{\sqrt{9 \cdot 100^2 + 4 \cdot 100} + 300}.$$

$$\text{Como } 0,6 < \frac{400}{601} < \frac{400}{\sqrt{9 \cdot 100^2 + 4 \cdot 100} + 300} < \frac{400}{600} = 0,666\dots,$$

segue que o primeiro dígito após a vírgula é 6. □

Questão 5.

Se $\omega^3 = 1$ e $\omega \neq 1$, então $\frac{1+5\omega+9\omega^2}{\omega^2+5+9\omega} + \frac{2+3\omega+5\omega^2}{5+2\omega+3\omega^2}$ é igual a:

- (A) -1 (B) -2ω (C) 2ω (D) 0 (E) 1

Resposta: **A**.

Solução. Temos que

$$\frac{1+5\omega+9\omega^2}{\omega^2+5+9\omega} = \frac{\omega(\omega^2+5+9\omega)}{\omega^2+5+9\omega} = \omega \quad \text{e} \quad \frac{2+3\omega+5\omega^2}{5+2\omega+3\omega^2} = \frac{\omega^2(2\omega+3\omega^2+5)}{(5+2\omega+3\omega^2)} = \omega^2.$$

$$\text{Portanto, } \frac{1+5\omega+9\omega^2}{\omega^2+5+9\omega} + \frac{2+3\omega+5\omega^2}{5+2\omega+3\omega^2} = \omega + \omega^2 = -1. \quad \square$$

Questão 6.

Se $x \in \mathbb{R}$ e $\lfloor x \rfloor$ é o maior inteiro menor ou igual a x , a parte fracionária de x é definida por $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$.

Por exemplo, $\{3, 14\} = 0, 14$.

A soma de todas as soluções reais e positivas da equação $\{2\{3\{4x\}\}\} = x$ é igual a:

- (A) 1 (B) 5 (C) 10 (D) 11 (E) 23

Resposta: **D**.

Solução. Note que, se $a \in \mathbb{Z}$, então $\{a\{b\}\} = \{a(b - \lfloor b \rfloor)\} = \{ab\}$, portanto a igualdade dada e a seguinte igualdade $\{24x\} = x$ são equivalentes.

As soluções desta última igualdade são $0, \frac{1}{23}, \frac{2}{23}, \dots, \frac{22}{23}$, logo a soma de todas as soluções é igual a 11. \square

Questão 7.

A soma $S = \sum_{n=0}^{2026} (-1)^n \frac{n^2 + n + 1}{n!}$ é igual a:

- (A) 0 (B) $\frac{2027}{2026!}$ (C) $\frac{1}{2027!}$ (D) $\frac{2026}{2025!}$ (E) 3

Resposta: **B**.

Solução. Para $n \in \mathbb{N}$, temos $\frac{n^2 + n + 1}{n!} = \frac{n+1}{n!} + \frac{n^2}{n!} = \frac{n+1}{n!} + \frac{n}{(n-1)!}$ ($0! = 1$ por convenção).

Então $(-1)^n \frac{n^2 + n + 1}{n!} = (-1)^n \frac{n+1}{n!} + (-1)^n \frac{n}{(n-1)!} = (-1)^n \frac{n+1}{n!} - (-1)^{n-1} \frac{n}{(n-1)!}$.

Segue que:

$$1 + \sum_{n=1}^{2026} (-1)^n \frac{n^2 + n + 1}{n!} = 1 + \sum_{n=1}^{2026} \left[(-1)^n \frac{n+1}{n!} - (-1)^{n-1} \frac{n}{(n-1)!} \right] = 1 + \frac{2027}{2026!} - 1 = \frac{2027}{2026!}. \quad \square$$

Questão 8.

Considere a matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. A soma dos elementos da matriz A^{2026} é igual a:

- (A) -8104 (B) -6075 (C) 0 (D) 1013 (E) 6078

Resposta **B**.

Solução. Seja $N = A - I$. Daí, $N = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Como $N^2 = 0$, segue que $A^n = (I + N)^n = I + nN$.

Portanto, $A^{2026} = I + 2026 \cdot N$. A resposta é $-3 \cdot 2026 + 3 = -6075$. \square

Questão 9.

Sobre a soma $\sum_{k=1}^{10} k \binom{10}{k}^2$, podemos afirmar que:

- (A) Não é um múltiplo de 19.
- (B) Não é um múltiplo de 17.
- (C) É maior do que 2160^2 .
- (D) É divisível por exatamente 6 números primos distintos.
- (E) É um múltiplo de 100.

Resposta: **D**.

Solução. Como $k \binom{n}{k} = n \binom{n-1}{k-1}$, temos que

$$\sum_{k=1}^n k \binom{n}{k}^2 = \sum_{k=1}^n n \binom{n-1}{k-1} \binom{n}{k} = n \sum_{k=1}^n \binom{n-1}{k-1} \binom{n}{n-k} = n \binom{2n-1}{n-1},$$

em que utilizamos a identidade de Vandermonde na última igualdade. Assim segue que

$$\sum_{k=1}^{10} k \binom{10}{k}^2 = 10 \binom{19}{9} = \frac{10 \cdot 19!}{10!9!} = 20 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19.$$

Portanto, a alternativa correta é a letra (D). Note que (c) é descartado, uma vez que

$$11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19 = (12^2 - 1)(18^2 - 1) < (12 \cdot 18)^2 = 216^2. \quad \square$$

Questão 10.

A integral $\int_0^{\pi} \frac{e^x \cos^2 x - e^x \sin(2x)}{e^x \cos^2 x + 1} dx$ é igual a:

- (A) $\ln\left(\frac{e^{-\pi} + 1}{2}\right)$
- (B) $\ln\left(\frac{e^{\pi} + 1}{2}\right)$
- (C) $\ln\left(\frac{e^{\pi} - 1}{2}\right)$
- (D) $\ln\left(\frac{e^{\pi}}{2}\right)$
- (E) $\ln\left(\frac{e^{-\pi}}{2}\right)$

Resposta: **B**.

Solução. Notemos que $f(x) = e^x \cos^2 x + 1 \Rightarrow f'(x) = e^x \cos^2 x + e^x \cdot 2 \cos x (-\sin x) = e^x \cos^2 x - e^x \sin(2x)$.

Logo, o integrando é uma função da forma $g(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}$, com $f(x) > 0$, para todo $x \in \mathbb{R}$, assim segue que

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln(f(x)) + k, \text{ com } k \in \mathbb{R}.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} \frac{e^x \cos^2 x - e^x \sin(2x)}{e^x \cos^2 x + 1} dx &= \ln(e^x \cos^2 x + 1) \Big|_0^{\pi} = \ln(e^{\pi} \cos^2 \pi + 1) - \ln(e^0 \cdot \cos^2 0 + 1) = \\ &= \ln(e^{\pi} \cdot (-1)^2 + 1) - \ln(1 \cdot 1^2 + 1) = \ln\left(\frac{e^{\pi} + 1}{2}\right). \end{aligned} \quad \square$$

Questão 11.

Considere uma sequência de sacos S_1, S_2, S_3, \dots tal que o saco S_1 contém duas fichas pretas e uma ficha branca, enquanto cada um dos demais sacos contém uma ficha preta e uma ficha branca.

Retira-se ao acaso uma ficha do saco S_1 , colocando-a no saco S_2 . Em seguida, retira-se ao acaso uma ficha do saco S_2 , colocando-a no saco S_3 , e assim sucessivamente. Para cada $k \in \mathbb{N}$, seja B_k o evento “a ficha retirada do saco S_k é branca” e seja $p_k = P(B_k)$, onde $P(B_k)$ representa a probabilidade do evento B_k ocorrer.

Então, $\lim_{k \rightarrow \infty} p_k$ é igual a:

- (A) $\frac{1}{3}$ (B) $\frac{2}{3}$ (C) $\frac{1}{2}$ (D) $\frac{1}{4}$ (E) $\frac{1}{7}$

Resposta: **C**.

Solução. Se retirarmos uma ficha branca de S_1 , passamos a ter 2 em S_2 para um total de 3 fichas em S_2 , logo $P(B_2 | B_1) = \frac{2}{3}$.

Se retirarmos uma ficha preta de S_1 , temos 1 ficha branca em S_2 , e 3 fichas em S_2 , logo $P(B_2 | \overline{B_1}) = \frac{1}{3}$.

O raciocínio permanece o mesmo se estivermos na retirada n : $P(B_{n+1} | B_n) = \frac{2}{3}$ e $P(B_{n+1} | \overline{B_n}) = \frac{1}{3}$.

Por outro lado, $p_{n+1} = P(B_{n+1})$, portanto $p_{n+1} = P(B_{n+1} | B_n) \cdot P(B_n) + P(B_{n+1} | \overline{B_n}) \cdot P(\overline{B_n})$, ou seja,

$$p_{n+1} = \frac{2}{3}p_n + \frac{1}{3}(1 - p_n) \text{ de onde vem } p_{n+1} = \frac{1}{3}p_n + \frac{1}{3}.$$

Substitui-se na relação de recorrência que define p_n :

$$p_{n+1} = \frac{1}{3}p_n + \frac{1}{3}, \quad q_{n+1} + \frac{1}{2} = \frac{1}{3}q_n + \frac{1}{6} + \frac{1}{3} \iff q_{n+1} = \frac{1}{3}q_n, \text{ logo } q_n \text{ é geométrica.}$$

Como $p_1 = \frac{1}{3}$, temos $q_1 = \frac{1}{3} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{6}$ de onde vem $q_n = -\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{3^{n-1}} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3^n}$ e finalmente $p_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3^n}$

Portanto, $\lim_{k \rightarrow \infty} p_k = \frac{1}{2}$. □

Questão 12.

O valor da integral $\int_{-1}^1 \frac{x + 1 + \sqrt{1 + x^2}}{2(1 + x^2)(1 + \sqrt{1 + x^2})} dx$ é:

- (A) 0 (B) 1 (C) $\frac{\pi}{4}$ (D) $\frac{\pi}{2}$ (E) π

Resposta: **C**.

Solução. Seja $g(x) = \frac{x + 1 + \sqrt{1 + x^2}}{2(1 + x^2)(1 + \sqrt{1 + x^2})}$. Note que $g(x) + g(-x) = \frac{1}{1 + x^2}$.

Portanto, $\int_{-1}^1 g(x) dx = \int_0^1 g(x) dx + \int_0^1 g(-x) dx = \int_0^1 \frac{dx}{1 + x^2} = \frac{\pi}{4}$. □

Questão 13.

Sejam $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ a função definida por $f(x) = x^3 + x - 8$ e f^{-1} a função inversa de f .

Sobre a equação $2f(x) + 3f^{-1}(x) = 10$ podemos afirmar que:

- (A) Possui uma única solução no intervalo $[0, 1]$.
- (B) Possui uma única solução no intervalo $[3, 5]$.
- (C) Possui uma única solução no intervalo $[-1, 1]$.
- (D) Possui exatamente duas soluções distintas no intervalo $[0, 3]$.
- (E) Possui uma única solução no intervalo $[1, 2]$.

Resposta: **E**.

Solução. A função f é derivável e $f'(x) = 3x^2 + 1 > 0$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

Logo f é estritamente crescente em \mathbb{R} .

Como f é contínua no intervalo \mathbb{R} , estritamente crescente, com limite $-\infty$ em $-\infty$ e limite $+\infty$ em $+\infty$, segue que f é bijetiva.

Consideremos a aplicação $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto 2f(x) + 3f^{-1}(x)$.

Como f e f^{-1} são estritamente crescentes, segue que g é estritamente crescente em \mathbb{R} .

Logo, a equação $g(x) = 10$, de incógnita $x \in \mathbb{R}$, admite no máximo uma solução.

Observamos que: $f(2) = 2^3 + 2 - 8 = 2$, logo $f^{-1}(2) = 2$.

Assim segue que $g(2) = 2f(2) + 3f^{-1}(2) = 2 \cdot 2 + 3 \cdot 2 = 10$, o que mostra que 2 é solução.

Finalmente, a equação proposta admite uma única solução: $x = 2$. □

Questão 14.

Sejam $x_1, x_2, \dots, x_{2026} \in \mathbb{R}$ tais que

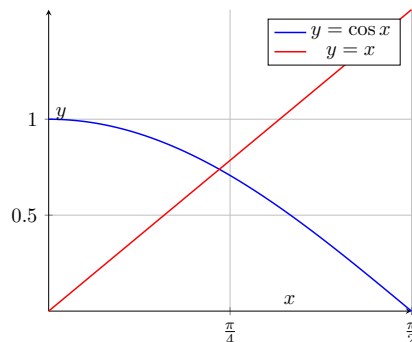
$$\begin{cases} \cos x_1 = x_2 \\ \cos x_2 = x_3 \\ \cos x_3 = x_4 \\ \vdots \\ \cos x_{2025} = x_{2026} \\ \cos x_{2026} = x_1 \end{cases}$$

Com relação ao sistema de equações acima podemos assegurar que:

- (A) Possui infinitas soluções no intervalo $[0, \frac{\pi}{2}]$.
- (B) Possui exatamente 2026 soluções distintas no intervalo $[0, \frac{\pi}{2}]$.
- (C) Possui exatamente 1013 soluções no intervalo $[0, 2\pi]$.
- (D) Não possui soluções no intervalo $[0, \frac{\pi}{2}]$.
- (E) Possui solução única no intervalo $[0, \frac{\pi}{2}]$.

Resposta: **E**.

Solução. Note que a equação $\cos x = x$ possui uma solução $x = a$ no intervalo $[0, \frac{\pi}{2}]$ (ponto de interseção dos gráficos das funções $y = \cos x$ e $y = x$ representados abaixo!)



Além disso, note que tomando $x_0 = x_1 = \dots = x_{2026} = a$, é uma solução do sistema, pois

$$\begin{cases} \cos a = a \\ \cos a = a \\ \vdots \\ \cos a = a \\ \cos a = a \end{cases}$$

Por fim, vamos mostrar que essa solução é única.

De fato, como $0 < a < \frac{\pi}{2}$, se $x_{i+1} = \cos x_i$ para $i \in \{1, 2, \dots, 2025\}$, então segue que $0 < x_i < 1 < \frac{\pi}{2}$, se supusermos, por absurdo, que existe uma outra solução tal que $x_1 = b$ e $0 \neq b \in [0, \frac{\pi}{2}]$, teríamos

$$x_1 = b, x_2 = \cos b, x_3 = \cos x_2, \dots, \cos x_{2026} = b$$

Nesse caso, $|a - b| = |\cos a - \cos x_{2026}| < |a - x_{2026}| = |\cos a - \cos x_{2025}| < |a - x_{2025}| < \dots < |a - b|$, o que é uma contradição!

Portanto, a nossa suposição inicial de que existisse uma nova solução $b \neq a$ é falsa, o que nos permite concluir que o sistema de equações possui solução única. \square

Questão 15.

Seja $f(x) = e^{2x} \sin(3x)$ e $f^{(2026)}(x)$ a sua derivada de ordem 2026.

Qual o resto da divisão de $f^{(2026)}(0)$ por 5?

- (A) 2 (B) 4 (C) 6 (D) 7 (E) 8

Resposta: **A**.

Solução. Temos que $f(x) = e^{2x} \sin(3x) = e^{2x} \cdot \frac{e^{3ix} - e^{-3ix}}{2i} = \frac{e^{(2+3i)x} - e^{(2-3i)x}}{2i}$.

Logo, para $n \geq 0$, segue que $f^{(n)}(x) = \frac{(2+3i)^n e^{(2+3i)x} - (2-3i)^n e^{(2-3i)x}}{2i}$.

Portanto devemos obter o resto da divisão por 5 de $f^{(2026)}(0) = \frac{(2+3i)^{2026} - (2-3i)^{2026}}{2i}$

Temos que $(2+3i)^5 \equiv 2^5 + (3i)^5 \equiv 2 + 3i \pmod{5}$.

Logo $(2+3i)^4 \equiv 1 \pmod{5}$, já que $2+3i$ e $5 = (2+i)(2-i)$ são primos entre si em $\mathbb{Z}[i]$.

Analogamente, $(2-3i)^4 \equiv 1 \pmod{5}$.

Como $2026 \equiv 2 \pmod{4}$, $(2+3i)^{2026} - (2-3i)^{2026} \equiv (2+3i)^2 - (2-3i)^2 \equiv 4i \pmod{5}$.

Portanto, $f^{(2026)}(0) = \frac{(2+3i)^{2026} - (2-3i)^{2026}}{2i} \equiv 2 \pmod{5}$. □