

5ª COMPETIÇÃO JACOB PALIS JÚNIOR DE MATEMÁTICA 2026

Nível 1 (6º ou 7º ano do Ensino Fundamental)

Nome	
------	--

Instruções:

- Marque apenas uma alternativa em cada questão.
- Não é permitido o uso de calculadoras, aparelhos eletrônicos ou quaisquer consultas a notas ou livros.
- Ao terminar, entregue esta prova (com os rascunhos) e o cartão de respostas ao (a) professor(a) aplicador(a).
- Data e horário de aplicação: 29/05/26, das 14:00 às 15:30 (Horário de Brasília).
- Lembre-se de que, ao participar da Competição Jacob Palis, o aluno se compromete a não divulgar conteúdo das questões até a publicação do gabarito no site da OBM.
- Pontuações dos problemas

01 a 05	06 a 10	11 a 15
3 pontos	4 pontos	5 pontos

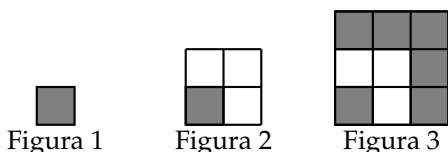
1. Um retângulo 20×26 é formado por quadradinhos 1×1 . Após retirarmos todos os quadradinhos da borda ficamos com um retângulo menor. Qual é o perímetro desse novo retângulo?

- (A) 84 (B) 86 (C) 88 (D) 90 (E) 92

2. Uma data $d/m/a$ é dita *dividata* quando o ano a escrito com dois algarismos é um divisor do produto $d \cdot m$. Por exemplo, $29/5/26$ não é uma dividata, pois 26 não divide $29 \cdot 5$, mas $26/5/26$ e $13/10/26$ são dividatas. Há quantas dividatas no ano de 2026?

- (A) 12 (B) 15 (C) 16 (D) 18 (E) 24

3. Temos uma sequência de figuras. A figura 1 tem um quadradinho cinza. A figura 2 é a figura 1 com uma camada de quadradinhos brancos. A figura 3 é a figura 2 com uma camada de quadradinhos cinzas. Esse padrão segue se repetindo adicionando à figura $n - 1$ uma camada de quadradinhos com a cor oposta da última adicionada.



Seguindo esse padrão, a figura 2026 tem quantos quadradinhos brancos a mais que quadradinhos cinzas?

- (A) 2024 (B) 2026 (C) 2028 (D) 4048 (E) 4052

4. Um número de quatro dígitos $abcd$ é dito *reduzível* quando a fração $\frac{ab}{cd}$ é reduzível. Caso contrário, o número é dito *irreduzível*. Por exemplo, 2010 é reduzível, pois $\frac{20}{10} = \frac{2}{1}$. Por outro lado 2011 é irreduzível, pois $\frac{20}{11}$ é irreduzível. Quantos números de 2010 até 2099 (incluindo 2010 e 2099) são irreduzíveis?

- (A) 27 (B) 30 (C) 36 (D) 40 (E) 45

5. A loja de móveis Matematicamas decidiu fazer uma promoção diferente. Cada produto tem dois valores inteiros positivos distintos menores que 100 na etiqueta e o cliente pode escolher um deles para ser o preço em reais e o outro para ser o desconto em porcentagem. Dados os números, o que devemos fazer para pagar o menor preço em cada produto nessa promoção?

- (A) Devemos escolher o menor número como o preço e o maior como desconto.
 (B) Devemos escolher o maior número como o preço e o menor como desconto.
 (C) A ordem não importa, pois o preço é sempre o mesmo.
 (D) A resposta depende dos valores específicos dos números e não apenas de qual é maior.
 (E) Se algum número for maior que 90, então esse deve ser o número do desconto, e se os dois forem maiores que 90, então qualquer escolha vai resultar no mesmo valor.

6. Antônio e Bianca brincam de um jogo de minas. Antônio coloca algumas minas em um tabuleiro, mas em vez de informar suas posições, apenas indica para cada linha e para cada coluna se a quantidade de minas presentes naquela linha ou coluna é par (*P*) ou ímpar (*I*), conforme o exemplo nas figuras 1 e 2 a seguir.

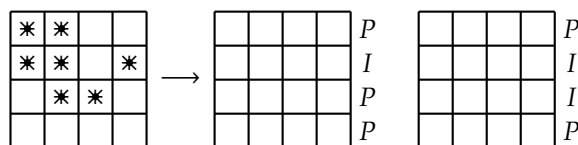


Figura 1

Figura 2

Figura 3

De quantas maneiras Antônio pode colocar as minas no tabuleiro de modo que Bianca receba a informação da figura 3 acima?

- (A) 0 (B) 1 (C) 16 (D) 64 (E) 512

7. Zé Roberto tinha dois filhos (Umberto e Doisberto) e hoje nasceu seu terceiro filho (Tresberto). Nesse momento, Tresberto tem 0 anos e a soma das idades de Umberto e Doisberto é igual à metade da idade de Zé Roberto. Zé Roberto notou que daqui a vários anos completos a soma das idades dos três filhos será exatamente igual à sua. No momento em que isso acontecer, Tresberto terá

- (A) metade da idade atual de Zé Roberto.
 (B) um terço da idade atual de Zé Roberto.
 (C) um quarto da idade atual de Zé Roberto.
 (D) um quinto da idade atual de Zé Roberto.
 (E) um sexto da idade atual de Zé Roberto.

8. Existem quantos números de 4 algarismos menores que 2026 que não possuem algarismos repetidos e a soma dos algarismos é igual à soma dos algarismos de 2026?

- (A) 1 (B) 7 (C) 13 (D) 19 (E) 25

9. Um número é dito *papapa* quando a soma de quaisquer três algarismos consecutivos dele é par. Por exemplo, 2026 é papapa, pois $2 + 0 + 2$ e $0 + 2 + 6$ são pares. Há quantos números papapas de 5 algarismos?

- (A) 10000 (B) 10625 (C) 11250 (D) 11875 (E) 12500

10. Em um jardim há dois canteiros de flores: *A* e *B*. O jardineiro que cuida dos canteiros se programou para regar os canteiros segundo as seguintes regras:

- No máximo um dos canteiros é regado a cada dia;
- O canteiro *A* é sempre regado a cada 5 dias;
- O canteiro *B* é regado a cada 3 dias, com exceção de quando o dia de regá-lo é igual a um dia de regar o canteiro *A*. Nesse caso, ele é regado no dia seguinte, ou seja, após 4 dias.

Se o canteiro *A* foi regado no dia primeiro de janeiro de 2026 e o canteiro *B* no dia 2 de janeiro de 2026, quantas vezes o canteiro *B* é regado em 2026?

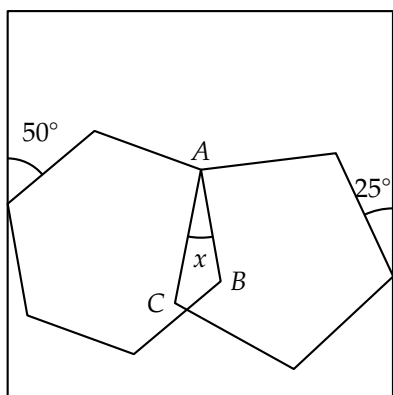
- (A) 120 (B) 115 (C) 110 (D) 105 (E) 100

11. Uma pulga parte da origem $(0, 0)$, pulando de ponto em ponto. A pulga dá pulos movendo duas unidades na horizontal ou vertical e três unidades na direção perpendicular. Qual é a quantidade mínima de pulos que a pulga precisa dar para chegar ao ponto $(1, 0)$?

- (A) 3 (B) 4 (C) 5 (D) 6 (E) 7

12. Na figura a seguir temos um hexágono regular e um pentágono regular dentro de um quadrado. O hexágono tem um vértice sobre um lado do quadrado, o pentágono também tem um vértice sobre um lado do quadrado e o hexágono e o pentágono compartilham o vértice *A*. Um lado do hexágono forma um ângulo de 50° com um lado do quadrado e um lado do pentágono forma um ângulo de 25° com um lado do quadrado. Determine a medida em graus do ângulo x entre os lados *AB* do hexágono e *AC* do pentágono destacado na figura.

Você pode querer utilizar que cada ângulo interno do polígono regular de n lados tem medida $\frac{(n-2)180^\circ}{n}$.



- (A) 18° (B) 21° (C) 24° (D) 26° (E) 27°

13. Os inteiros positivos *distintos* a, b, c, d satisfazem

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{c} + \frac{1}{d}.$$

Qual é o menor valor possível para o máximo dentre os números a, b, c, d ?

- (A) 6 (B) 10 (C) 12 (D) 20 (E) 24

14. De quantas formas podemos colocar os números de 1 a 9 cada um exatamente uma vez num quadradinho de um tabuleiro 3×3 de modo que cada quadradinho tenha exatamente um número, cada quadradinho que tenha um vizinho abaixo possua um número maior que esse vizinho e que cada quadradinho que tenha um vizinho à esquerda possua um número maior que esse vizinho? (Quadrados são vizinhos se possuem um lado em comum).

- (A) 20 (B) 24 (C) 30 (D) 40 (E) 42

15. Uma sequência de figuras é construída da seguinte maneira:

- Iniciamos com um hexágono regular de área 810 cm^2 .
- Para cada hexágono da figura anterior, removemos uma "estrela" do seu interior, e 6 triângulos equiláteros, deixando 6 hexágonos regulares congruentes.

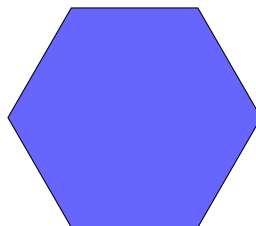


Figura 1

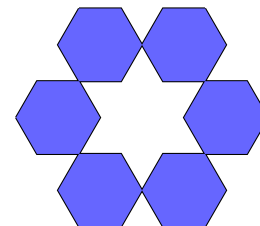


Figura 2

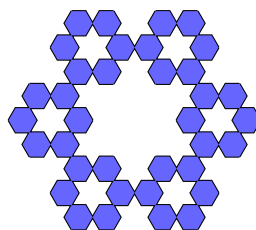


Figura 3

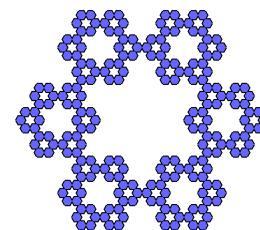


Figura 4

Qual é a área da Figura 4?

- (A) 180 cm^2 (B) 240 cm^2 (C) 270 cm^2 (D) 300 cm^2 (E) 320 cm^2

5ª COMPETIÇÃO JACOB PALIS JÚNIOR DE MATEMÁTICA 2026

Nível 2 (8º ou 9º anos do Ensino Fundamental)

Nome	
------	--

Instruções:

- Marque apenas uma alternativa em cada questão.
- Não é permitido o uso de calculadoras, aparelhos eletrônicos ou quaisquer consultas a notas ou livros.
- Ao terminar, entregue esta prova (com os rascunhos) e o cartão de respostas ao (a) professor(a) aplicador(a).
- Data e horário de aplicação: 29/05/26, das 14:00 às 15:30 (horário de Brasília).
- Lembre-se de que, ao participar da Competição Jacob Palis, o aluno se compromete a não divulgar conteúdo das questões até a publicação do gabarito no site da OBM.
- Pontuações dos problemas

01 a 05	06 a 10	11 a 15
3 pontos	4 pontos	5 pontos

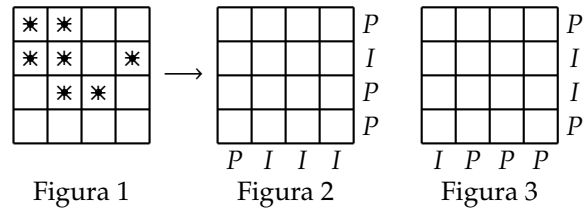
1. Zé Roberto tinha dois filhos (Umberto e Doisberto) e hoje nasceu seu terceiro filho (Tresberto). Nesse momento, Tresberto tem 0 anos e a soma das idades de Umberto e Doisberto é igual à metade da idade de Zé Roberto. Zé Roberto notou que daqui a vários anos completos a soma das idades dos três filhos será exatamente igual à sua. No momento em que isso acontecer, Tresberto terá

(A) metade da idade atual de Zé Roberto.
 (B) um terço da idade atual de Zé Roberto.
 (C) um quarto da idade atual de Zé Roberto.
 (D) um quinto da idade atual de Zé Roberto.
 (E) um sexto da idade atual de Zé Roberto.

2. Um número de quatro dígitos $abcd$ é dito *reduzível* quando a fração $\frac{ab}{cd}$ é reduzível. Caso contrário, o número é dito *irreduzível*. Por exemplo, 2010 é reduzível, pois $\frac{20}{10} = \frac{2}{1}$. Por outro lado 2011 é irreduzível, pois $\frac{20}{11}$ é irreduzível. Quantos números de 2010 até 2099 (incluindo 2010 e 2099) são irreduzíveis?

(A) 27 (B) 30 (C) 36 (D) 40 (E) 45

3. Antônio e Bianca brincam de um jogo de minas. Antônio coloca algumas minas em um tabuleiro, mas em vez de informar suas posições, apenas indica para cada linha e para cada coluna se a quantidade de minas presentes naquela linha ou coluna é par (*P*) ou ímpar (*I*), conforme o exemplo nas figuras 1 e 2 a seguir.

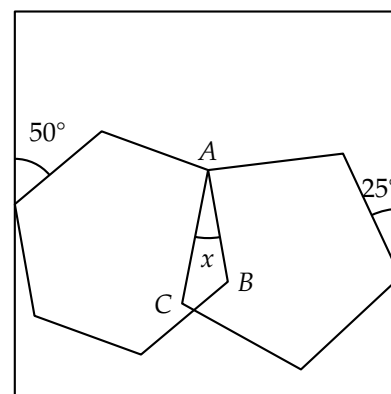


De quantas maneiras Antônio pode colocar as minas no tabuleiro de modo que Bianca receba a informação da figura 3 acima?

(A) 0 (B) 1 (C) 16 (D) 64 (E) 512

4. Na figura a seguir temos um hexágono regular e um pentágono regular dentro de um quadrado. O hexágono tem um vértice sobre um lado do quadrado, o pentágono também tem um vértice sobre um lado do quadrado e o hexágono e o pentágono compartilham o vértice *A*. Um lado do hexágono forma um ângulo de 50° com um lado do quadrado e um lado do pentágono forma um ângulo de 25° com um lado do quadrado. Determine a medida em graus do ângulo x entre os lados *AB* do hexágono e *AC* do pentágono destacado na figura.

Você pode querer utilizar que cada ângulo interno do polígono regular de n lados tem medida $\frac{(n-2)180^\circ}{n}$.



(A) 18° (B) 21° (C) 24° (D) 26° (E) 27°

5. Em um jardim há dois canteiros de flores: *A* e *B*. O jardineiro que cuida dos canteiros se programou para regar os canteiros segundo as seguintes regras:

- No máximo um dos canteiros é regado a cada dia;
- O canteiro *A* é sempre regado a cada 5 dias;

- O canteiro B é regado a cada 3 dias, com exceção de quando o dia de regá-lo é igual a um dia de regar o canteiro A . Nesse caso, ele é regado no dia seguinte, ou seja, após 4 dias.

Se o canteiro A foi regado no dia primeiro de janeiro de 2026 e o canteiro B no dia 2 de janeiro de 2026, quantas vezes o canteiro B é regado em 2026?

- (A) 120 (B) 115 (C) 110 (D) 105 (E) 100

6. Uma pulga parte da origem $(0,0)$, pulando de ponto em ponto. A pulga dá pulos movendo duas unidades na horizontal ou vertical e três unidades na direção perpendicular. Qual é a quantidade mínima de pulos que a pulga precisa dar para chegar ao ponto $(1,0)$?

- (A) 3 (B) 4 (C) 5 (D) 6 (E) 7

7. João gosta de inventar operações diferentes com números inteiros positivos. Ele agora criou uma operação que apaga o dígito mais significativo do número e soma o dobro desse dígito na segunda casa vizinha dessa casa decimal. Por exemplo, para 2026 a operação gera 66, pois primeiro apagamos o 2 à esquerda e depois somamos o dobro dele no outro 2. Para 3254 a operação gera o 314, pois primeiro apagamos o 3 e depois somamos o dobro dele no 5, e tem um “vai um” para as centenas, que vira 3. Partindo de um número de 3 ou mais algarismos João repete a operação até obter um número com menos de 3 algarismos. Se João partiu de um número n de três algarismos e obteve no fim o número 5, quantos são os possíveis valores de n ?

- (A) 10 (B) 11 (C) 90 (D) 99 (E) 100

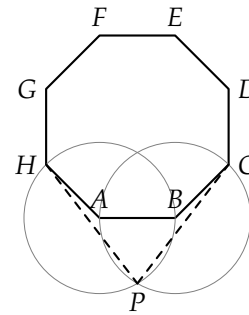
8. Um número é dito *papapa* quando a soma de quaisquer três algarismos consecutivos dele é par. Por exemplo, 2026 é papapa, pois $2 + 0 + 2$ e $0 + 2 + 6$ são pares. Há quantos números papapas de 5 algarismos?

- (A) 10000 (B) 10250 (C) 10350 (D) 11250 (E) 12500

9. O número $N = 333 \dots 333$ é composto por 2026 algarismos 3. Calcule o resto na divisão de N por 7.

- (A) 3 (B) 5 (C) 4 (D) 1 (E) 6

10. Considere o octógono regular $ABCDEFGH$, e as circunferências ω_1 e ω_2 de centros A e B , respectivamente, ambas de raio AB . As circunferências ω_1 e ω_2 se intersectam no ponto P , externo ao octógono. A medida do ângulo $\angle CPH$, em graus, é:



- (A) 75 (B) 80 (C) 85 (D) 90 (E) 100

11. Os inteiros positivos **distintos** a, b, c, d satisfazem

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{c} + \frac{1}{d}.$$

Qual é o menor valor possível para o máximo dentre os números a, b, c, d ?

- (A) 6 (B) 10 (C) 12 (D) 20 (E) 24

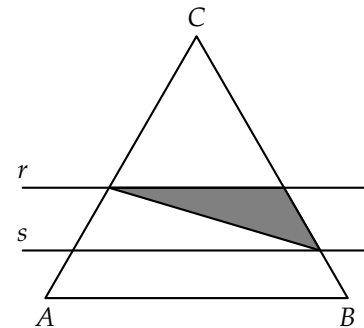
12. Quantos subconjuntos não vazios de $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ são tais que o produto de seus elementos é um quadrado perfeito?

- (A) 31 (B) 55 (C) 63 (D) 87 (E) 127

13. Os inteiros x e y são tais que $x^2 - 3xy - 4y^2 + x - 4y$ é um número primo. Esse primo não pode ser igual a

- (A) 5 (B) 11 (C) 47 (D) 67 (E) 2027

14. Seja ABC um triângulo equilátero de área 1, e r e s duas retas paralelas a AB que dividem o triângulo ABC em três regiões de mesma área. Qual é a área destacada?



- (A) $\frac{1}{6}$ (B) $\frac{\sqrt{3}}{6}$ (C) $\frac{\sqrt{2}-1}{3}$ (D) $\frac{\sqrt{3}-1}{3}$ (E) $\frac{\sqrt{5}-1}{6}$

15. O primeiro dígito não-nulo da direita para a esquerda na representação decimal do produto

$$1 \times 2 \times 3 \times \dots \times 2026$$

é igual a

- (A) 0 (B) 2 (C) 4 (D) 6 (E) 8

5ª COMPETIÇÃO JACOB PALIS JÚNIOR DE MATEMÁTICA 2026

Nível 3 (1º, 2º ou 3º ano do Ensino Médio)

Nome	
------	--

Instruções:

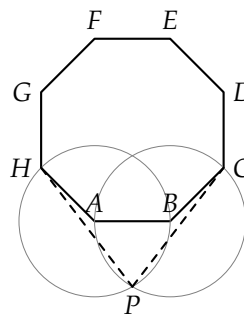
- Marque apenas uma alternativa em cada questão.
- Não é permitido o uso de calculadoras, aparelhos eletrônicos ou quaisquer consultas a notas ou livros.
- Ao terminar, entregue esta prova (com os rascunhos) e o cartão de respostas ao (a) professor(a) aplicador(a).
- Data e horário de aplicação: 29/05/26, das 14:00 às 15:30 (horário de Brasília).
- Lembre-se de que, ao participar da Competição Jacob Palis, o aluno se compromete a não divulgar conteúdo das questões até a publicação do gabarito no site da OBM.
- Pontuações dos problemas

01 a 05	06 a 10	11 a 15
3 pontos	4 pontos	5 pontos

1. Zé Roberto tinha dois filhos (Umberto e Doisberto) e hoje nasceu seu terceiro filho (Tresberto). Nesse momento, Tresberto tem 0 anos e a soma das idades de Umberto e Doisberto é igual à metade da idade de Zé Roberto. Zé Roberto notou que daqui a vários anos completos a soma das idades dos três filhos será exatamente igual à sua. No momento em que isso acontecer, Tresberto terá

- (A) metade da idade atual de Zé Roberto.
 (B) um terço da idade atual de Zé Roberto.
 (C) um quarto da idade atual de Zé Roberto.
 (D) um quinto da idade atual de Zé Roberto.
 (E) um sexto da idade atual de Zé Roberto.

2. Considere o octógono regular $ABCDEFGH$, e as circunferências Γ_1 e Γ_2 de centros A e B , respectivamente, ambas de raio AB . Seja P a interseção de Γ_1 e Γ_2 externa ao octógono. A medida do ângulo $\angle CPH$, em graus, é:



- (A) 75 (B) 80 (C) 85 (D) 90 (E) 100

3. Um número é dito *papapa* quando a soma de quaisquer três algarismos consecutivos dele é par. Por exemplo, 2026 é papapa, pois $2 + 0 + 2$ e $0 + 2 + 6$ são pares. Há quantos números papapas de 5 algarismos?

- (A) 10000 (B) 10250 (C) 10350 (D) 11250 (E) 12500

4. Em um jardim há dois canteiros de flores: A e B . O jardineiro que cuida dos canteiros se programou para regar os canteiros segundo às seguintes regras:

- No máximo um dos canteiros é regado a cada dia;
- O canteiro A é sempre regado a cada 5 dias;
- O canteiro B é regado a cada 3 dias, com exceção de quando o dia de regá-lo é igual a um dia de regar o canteiro A . Nesse caso, ele é regado no dia seguinte, ou seja, após 4 dias.

Se o canteiro A foi regado no dia primeiro de janeiro de 2026 e o canteiro B no dia 2 de janeiro de 2026, quantas vezes o canteiro B é regado em 2026?

- (A) 120 (B) 115 (C) 110 (D) 105 (E) 100

5. Uma pulga parte da origem $(0, 0)$, pulando de ponto em ponto. A pulga dá pulos movendo duas unidades na horizontal ou vertical e três unidades na direção perpendicular. Qual é a quantidade mínima de pulos que a pulga precisa dar para chegar ao ponto $(1, 0)$?

- (A) 3 (B) 4 (C) 5 (D) 6 (E) 7

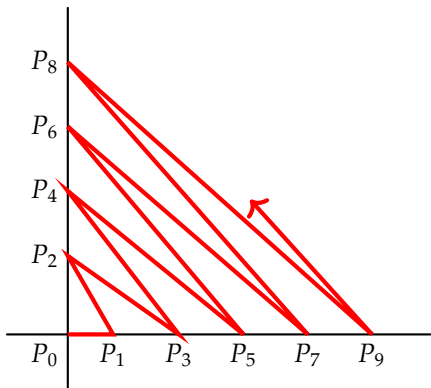
6. Seja z um número complexo tal que a parte real de z^2 é maior ou igual a zero. Sendo i a unidade imaginária, o valor mínimo de $|z + i|$ é igual a

- (A) $\frac{1}{2}$ (B) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (C) 1 (D) $\sqrt{2}$ (E) 2

7. Os inteiros x e y são tais que $x^2 - 3xy - 4y^2 + x - 4y$ é um número primo. Esse primo não pode ser igual a

- (A) 5 (B) 11 (C) 47 (D) 67 (E) 2027

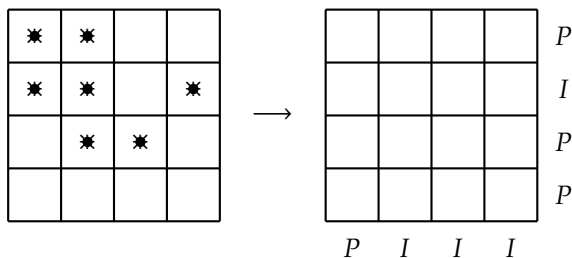
8. Uma formiga se encontra inicialmente no ponto P_0 , que é a interseção de duas retas perpendiculares. Ela caminha 1 metro em uma das retas até chegar no ponto P_1 . Após isso, ela caminha 2 metros em linha reta até encontrar o ponto P_2 na outra reta. Ela repete esse processo, sempre caminhando k metros em linha reta até chegar na outra reta no ponto P_k . O início do caminho está em $P_0P_1P_2 \dots$ na figura a seguir, com $P_0P_1 = 1$, $P_1P_2 = 2$, e assim por diante.



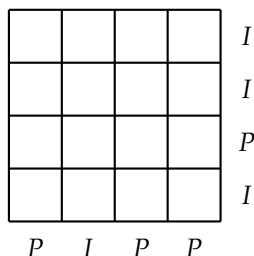
A distância de P_0 até P_{288} , em metros, é:

- (A) 204 (B) 216 (C) 226 (D) 232 (E) 264

9. Esmeralda e Jade brincam de um jogo de minas. Esmeralda coloca algumas minas em um tabuleiro, mas ao invés de informar suas posições, apenas indica para cada linha e para cada coluna se a quantidade de minas presentes naquela linha ou coluna é par (P) ou ímpar (I), conforme o exemplo:



De quantas maneiras Esmeralda pode colocar as minas no tabuleiro de modo que Jade receba a informação abaixo?



- (A) 0 (B) 1 (C) 16 (D) 256 (E) 512

10. Sejam $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ e ω_4 circunferências, todas com mesmo centro O e raios respectivamente medindo 2, 3, 5 e x , com $x > 5$. O quadrado $ABCD$ tem A sobre ω_1 , B sobre ω_2 , C sobre ω_4 e D sobre ω_3 . O valor de x é

- (A) $\sqrt{30}$ (B) $4\sqrt{2}$ (C) 6 (D) $2\sqrt{5}$ (E) $4\sqrt{3}$

11. O polinômio $P(x) = x^8 + ax^4 + b$, com a, b constantes reais, é divisível por $Q(x) = x^2 + 2x + 3$. Qual é o valor de $|a - b|$?

- (A) 64 (B) 65 (C) 66 (D) 67 (E) 68

12. As faces de um tetraedro têm todas arestas de medidas 8, 10 e 12. A maior distância entre duas arestas reversas do tetraedro é

- (A) $\sqrt{20}$ (B) $\frac{15\sqrt{7}}{4}$ (C) $2\sqrt{10}$ (D) $\frac{5\sqrt{7}}{2}$ (E) $3\sqrt{10}$

13. Quantas são as funções f dos inteiros nos inteiros tais que, para todo x inteiro, $f(x + 12) = f(x)$ e, para todos x, y inteiros, não necessariamente distintos, $f(xy) = f(x)f(y)$?

- (A) 8 (B) 9 (C) 10 (D) 12 (E) 24

14. Três números reais a, b, c com $0 \leq a, b, c \leq 1$ são sorteados ao acaso, nessa ordem. Qual é a probabilidade de que cada número seja maior do que a média aritmética dos números anteriores?

- (A) $\frac{1}{12}$ (B) $\frac{1}{6}$ (C) $\frac{1}{4}$ (D) $\frac{1}{2}$ (E) $\frac{2}{3}$

15. Sejam a, b e c lados de um triângulo. É bem conhecido que

$$E = \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b}$$

é pelo menos $\frac{3}{2}$. Por outro lado, E

- (A) é sempre menor que $\frac{5}{3}$.
 (B) é sempre menor que 2, podendo ser maior que $\frac{5}{3}$.
 (C) é sempre menor que $\frac{5}{2}$, podendo ser maior que 2.
 (D) é sempre menor que 3, podendo ser maior que $\frac{5}{2}$.
 (E) pode assumir valores arbitrariamente grandes.

5ª COMPETIÇÃO JACOB PALIS JÚNIOR DE MATEMÁTICA

Nível 1 (6º ou 7º ano do Ensino Fundamental)

Respostas

1. A	2. D	3. B	4. C	5. A
6. A	7. C	8. E	9. C	10. C
11. C	12. B	13. C	14. E	15. B

Nível 2 (8º ou 9º ano do Ensino Fundamental)

Respostas

1. C	2. C	3. A	4. B	5. C
6. C	7. A	8. D	9. D	10. A
11. C	12. C	13. B	14. C	15. B

Nível 3 (Ensino Médio)

Respostas

1. C	2. A	3. D	4. C	5. C
6. B	7. B	8. A	9. E	10. A
11. D	12. E	13. C	14. C	15. B

5ª COMPETIÇÃO JACOB PALIS JÚNIOR DE MATEMÁTICA

Nível 1 (6º ou 7º ano do Ensino Fundamental)

Respostas

1. A	2. D	3. B	4. C	5. A
6. A	7. C	8. E	9. C	10. C
11. C	12. B	13. C	14. E	15. B

Soluções

1. Alternativa A

Como retiramos todos os quadradinhos da borda cada lado diminuiu em 2 e obtemos um retângulo 18×24 . O perímetro é $2 \cdot 18 + 2 \cdot 24 = 84$.

2. Alternativa D

Veja que $26 = 2 \cdot 13$. Para termos uma dividata $d \cdot m$ precisa ser múltiplo de 13. Como o m é no máximo 12 e d é no máximo 31 temos d múltiplo de 13 e $d = 13$ ou $d = 26$. Se $d = 26$, então m pode ser qualquer valor de 1 a 12 e temos 12 dividatas. Se $d = 13$, então m precisa ser par e temos 6 dividatas. Portanto, são $12 + 6 = 18$ dividatas.

3. Alternativa B

Veja que cada camada tem exatamente 2 quadradinhos a mais que a camada anterior, basta imaginar que desloca em diagonal e adiciona 2 quadradinhos nos extremos. Na figura 2026 temos 1013 camadas cinzas e 1013 camadas brancas. Como cada camada branca tem 2 quadradinhos a mais que a camada cinza anterior, temos no total $1013 \cdot 2 = 2026$ quadradinhos brancos a mais do que cinzas.

4. Alternativa C

Como $20 = 2^2 \cdot 5$ sabemos que um número $20cd$ é redutível se, e somente se, cd é divisível por 2 ou 5. Em outras palavras, quando d for par ou 5. Portanto, o número $20cd$ é irredutível quando $d = 1, 3, 7$ ou 9 . De 2010 até 2099 há 9 blocos de dezenas e cada tem 4 irredutíveis resultando em $9 \cdot 4 = 36$ números irredutíveis.

5. Alternativa A

Digamos que os números são a e b com a menor que b . Se escolhermos a como preço e b como desconto, então teremos $a(1 - \frac{b}{100}) = a - \frac{ab}{100}$. Analogamente, se b for preço e a desconto, então teremos $b - \frac{ab}{100}$. Como a é menor que b , então obtemos menor valor quando a é o preço e b o desconto.

6. Alternativa A

Há 0 maneiras de colocar as minas, pois se houvesse uma forma, então ao somar as quantidades nas linhas teríamos uma quantidade par de minas $P + I + I + P = P$ e ao somar as quantidades nas colunas teríamos uma quantidade ímpar de minas $I + P + P + P = I$.

7. Alternativa C

Sejam x e y as idades de Umberto e Doisberto no momento em que Tresberto nasceu, de modo que Zé Roberto tem $2x + 2y$ anos. Depois de z anos, esses três filhos de Zé Roberto terão $z, x + z$ e $y + z$ anos e o pai terá $2x + 2y + z$ anos. A soma das idades dos filhos é igual à idade do pai quando

$$z + (x + z) + (y + z) = 2x + 2y + z \iff 2z = x + y.$$

Nessa situação, a idade de Zé Roberto é $2(x + y) = 4z$, ou seja, Tresberto tem um quarto da idade de Zé Roberto.

8. Alternativa E

A soma dos algarismos de 2026 é $2 + 0 + 2 + 6 = 10$.

Nos anos 2000 temos apenas 2017, pois o algarismo das centenas tem que ser zero, o das dezenas é no máximo 2 e não pode ser 2 para ser menor que 2026.

Agora vejamos os números de 1000 até 1999. Se tivermos um algarismo 0, então devemos completar com dois diferentes com soma 9. Temos as possibilidades 1027, 1036 e 1045. Se não tivermos 0, então a soma mínima é $1 + 2 + 3 + 4 = 10$ e só temos essa possibilidade 1234. Cada uma dessas possibilidades deve ser multiplicada por $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$, pois temos 1 nas unidades de milhar, 3 opções nas centenas, 2 nas dezenas e 1 nas unidades. Por exemplo, a possibilidade 1027 gera os números 1027, 1072, 1207, 1270, 1702 e 1720.

Portanto, são $1 + 4 \cdot 6 = 25$ números.

9. Alternativa C

Podemos escolher o algarismo das dezenas de milhares de 9 maneiras (não pode ser zero) e o algarismo dos milhares de 10 maneiras. Cada um dos próximos algarismos podem ser escolhidos de 5 maneiras, pois se a soma dos dois anteriores é par o próximo algarismo é par (0, 2, 4, 6 ou 8) e se a soma é ímpar o próximo algarismo é ímpar (1, 3, 5, 7 ou 9).

Com isso, há $9 \cdot 10 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 11250$ números papapa de cinco algarismos.

10. Alternativa C

A cada ciclo de dez dias, o canteiro A é regado nos dias 1 e 6 e o canteiro B é regado nos dias 2, 5, 8. A próxima vez do canteiro B é no dia 2 do próximo ciclo, pois ele não pode ser regado no dia 1 de ciclo algum, pois nesse dia A é regado.

Assim, o canteiro B é regado três vezes a cada dez dias. Dividindo o ano de 2026, que tem $365 = 36 \cdot 10 + 5$ dias, em 36 ciclos e meio ciclo, concluímos que o canteiro B é regado $36 \cdot 3 + 2 = 110$ vezes.

11. Alternativa C

Classifique os movimentos da pulga como *horizontal* se o movimento na horizontal tem 3 unidades e *vertical* caso contrário, ou seja, o movimento na vertical tem 3 unidades. Note que os movimentos podem ser feitos em qualquer ordem, de modo que os movimentos na horizontal podem ser feitos primeiro.

Como queremos nos mover, no total, 1 unidade para a horizontal, a quantidade de movimentos horizontais é ímpar. Com isso, após os movimentos horizontais, a pulga está acima ou abaixo do seu destino final.

Além disso, o movimento total na vertical é nulo, logo a quantidade de movimentos verticais é par. Como esses movimentos devem compensar o quanto a pulga está acima ou abaixo, há pelo menos dois movimentos a mais para um dos lados, resultando em um deslocamento vertical nesses movimentos de pelo menos $2 \cdot 3 = 6$ unidades. De qualquer forma, há pelo menos 2 movimentos verticais.

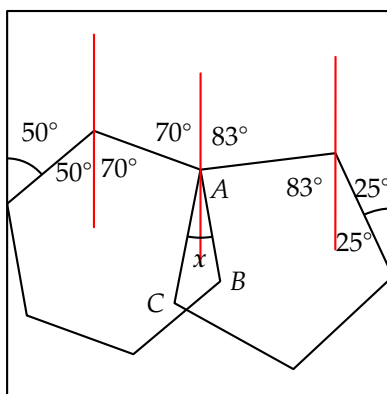
Voltando aos movimentos horizontais, como eles movimentam 2 unidades na vertical precisamos de pelo menos $6/2 = 3$ movimentos horizontais, dando um total de $2 + 3 = 5$ movimentos.

É possível chegar a (1, 0) com 5 pulos:

$$(0, 0) \rightarrow (3, 2) \rightarrow (0, 4) \rightarrow (-3, 6) \rightarrow (-1, 3) \rightarrow (1, 0).$$

12. Alternativa B

Os ângulos internos do hexágono e do pentágono são $\frac{(6-2)180^\circ}{6} = 120^\circ$ e $\frac{(5-2)180^\circ}{5} = 108^\circ$, respectivamente. Traçando retas verticais no ponto A e nos vértices vizinhos de A nos polígonos podemos usar ângulos alternos internos dos dois lados.



Dessa forma, temos no pentágono um ângulo 25° e outro $108^\circ - 25^\circ = 83^\circ$ e no hexágono um ângulo de 50° e outro de $120^\circ - 50^\circ = 70^\circ$. Usando mais duas vezes ângulos alternos internos, concluímos que o ângulo no A para cima é de $70^\circ + 83^\circ = 153^\circ$. Veja que em torno do A temos ângulos que somam 360° e podemos determinar x : $70 + 83 + 108 - x + x + 120 - x = 360 \Leftrightarrow 381 - x = 360 \Leftrightarrow x = 21^\circ$.

13. Alternativa C

Veja que 12 é uma resposta possível, pois $\frac{1}{2} + \frac{1}{12} = \frac{7}{12} = \frac{1}{3} + \frac{1}{4}$.

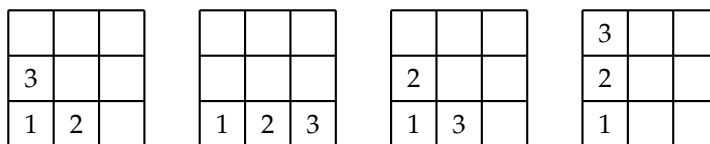
Vamos provar por eliminação que 6 e 10 não são possíveis. Suponha que a é o menor dos números. O b precisa ser o maior, pois se $b < c$ (ou $b < d$) então $\frac{1}{a} > \frac{1}{d}$ e $\frac{1}{b} > \frac{1}{c}$ e não pode ocorrer igualdade.

Se $b = 6$, então a seria 1, 2 ou 3, pois entre a e b tem os valores distintos de c e d . Testando temos $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{7}{6}, \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ ou $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$. Para funcionar um desses resultados deveria ser $\frac{1}{c} + \frac{1}{d} = \frac{c+d}{cd}$. No caso $a = 1$ a maior soma possível é $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} < \frac{7}{6}$, no caso $a = 2$ a maior soma possível é $\frac{1}{3} + \frac{1}{4} < \frac{2}{3}$ e no caso $a = 3$ a maior soma possível é $\frac{1}{4} + \frac{1}{5} < \frac{1}{2}$.

Se $b = 10$, então $1 \leq a \leq 7$. Nesse caso $\frac{1}{a} + \frac{1}{10} = \frac{10+a}{10a}$. As possibilidades são $\frac{11}{10}, \frac{12}{20} = \frac{3}{5}, \frac{13}{30}, \frac{14}{40} = \frac{7}{20}, \frac{15}{50} = \frac{3}{10}, \frac{16}{60} = \frac{4}{15}$ e $\frac{17}{70}$. Em todas elas 5 divide o denominador da fração irredutível. Se $\frac{1}{c} + \frac{1}{d} = \frac{c+d}{cd}$ for igual a um deles, então 5 divide cd e temos $c = 5$ ou $d = 5$ (o único múltiplo de 5 menor que 10). Isso já elimina as possibilidades com $a \geq 5$. Fazendo um deles (c ou d) igual a 5 a outra fração seria $\frac{11}{10} - \frac{1}{5} = \frac{9}{10}, \frac{3}{5} - \frac{1}{5} = \frac{2}{5}, \frac{13}{30} - \frac{1}{5} = \frac{7}{30}$ ou $\frac{7}{20} - \frac{1}{5} = \frac{3}{20}$. Nenhum deles tem numerador 1, então $b = 10$ não funciona.

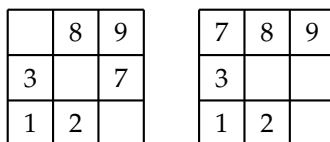
14. Alternativa E

Comecemos observando que 1 só pode estar no canto inferior esquerdo, já que não pode ter vizinhos abaixo ou à esquerda. O 2 só pode estar ao lado do 1, na casa de cima ou da direita. Em seguida, temos o 3 na outra casa vizinha do 1 ou na sequência do 2. Temos 4 casos.



Podemos usar as ideias análogas para 9, 8 e 7 no canto oposto. Vamos analisar o tipo (A) em que 8 e 7 são vizinhos de 9 e o tipo (B) em que 9, 8 e 7 estão em sequência.

No primeiro caso com tipo (A) temos 2 formas de colocar 8 e 7 e depois $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ formas de completar 4, 5 e 6 na diagonal principal. São 12 formas de completar o tabuleiro. No primeiro caso com tipo (B) há 2 formas de colocar 9, 8 e 7 em sequência (linha ou coluna). Nas casas que sobram 6 fica no canto superior esquerdo livre e temos 2 formas de completar 4 e 5. Portanto, são $2 \cdot 2 = 4$ formas de completar o tabuleiro. No total o primeiro caso gera $12 + 4 = 16$ tabuleiros.

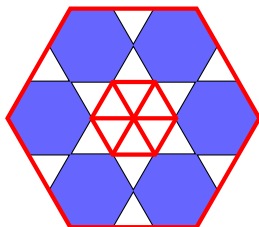


No segundo caso com tipo (A) temos 4 formas de completar o tabuleiro (usando a ideia do primeiro caso tipo (B)). No segundo caso com tipo (B) temos 1 forma de completar, pois tem que colocar 7, 8 e 9 em linha e, por fim, 4, 5 e 6 na linha central. O segundo caso gera $4 + 1 = 5$ tabuleiros.

O terceiro caso é análogo ao primeiro e tem mais 16 tabuleiros e o quarto caso é análogo ao segundo e tem mais 5 tabuleiros. Concluimos que são $16 + 5 + 16 + 5 = 42$ formas diferentes de preencher o tabuleiro.

15. Alternativa B

Vamos estudar o que acontece com a área no primeiro passo. Podemos considerar um hexágono central congruente aos 6 nas bordas. Em seguida, temos mais 12 triângulos ao redor que tem área igual a 2 hexágonos. Portanto, a área da primeira figura é equivalente a $6 + 1 + 2 = 9$ hexágonos do segundo passo. Concluimos que da primeira para a segunda figura a área é multiplicada por $\frac{6}{9} = \frac{2}{3}$.



Nos passos seguintes a área é multiplicada pelo mesmo fator, pois o processo é repetido em cada hexágono menor. Portanto, a área final é $810 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{810 \cdot 8}{27} = 240 \text{ cm}^2$.

5ª COMPETIÇÃO JACOB PALIS JÚNIOR DE MATEMÁTICA

Nível 2 (8º ou 9º ano do Ensino Fundamental)

Respostas

1. C	2. C	3. A	4. B	5. C
6. C	7. A	8. D	9. D	10. A
11. C	12. C	13. B	14. C	15. B

Soluções

1. Alternativa C

Sejam x e y as idades de Umberto e Doisberto no momento em que Tresberto nasceu, de modo que Zé Roberto tem $2x + 2y$ anos. Depois de z anos, esses três filhos de Zé Roberto terão z , $x + z$ e $y + z$ anos e o pai terá $2x + 2y + z$ anos. A soma das idades dos filhos é igual à idade do pai quando

$$z + (x + z) + (y + z) = 2x + 2y + z \iff 2z = x + y.$$

Nessa situação, a idade de Zé Roberto é $2(x + y) = 4z$, ou seja, Tresberto tem um quarto da idade de Zé Roberto.

2. Alternativa C

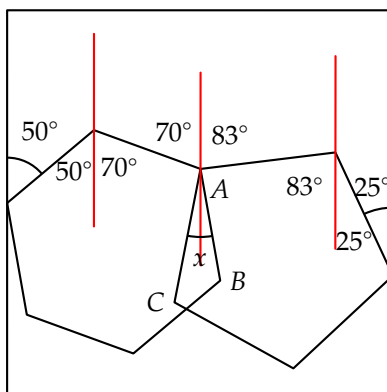
Como $20 = 2^2 \cdot 5$ sabemos que um número $20cd$ é redutível se, e somente se, cd é divisível por 2 ou 5. Em outras palavras, quando d for par ou 5. Portanto, o número $20cd$ é irredutível quando $d = 1, 3, 7$ ou 9 . De 2010 até 2099 há 9 blocos de dezenas e cada tem 4 irredutíveis resultando em $9 \cdot 4 = 36$ números irredutíveis.

3. Alternativa A

Há 0 maneiras de colocar as minas, pois se houvesse uma forma, então ao somar as quantidades nas linhas teríamos uma quantidade par de minas $P + I + I + P = P$ e ao somar as quantidades nas colunas teríamos uma quantidade ímpar de minas $I + P + P + P = I$.

4. Alternativa B

Os ângulos internos do hexágono e do pentágono são $\frac{(6-2)180^\circ}{6} = 120^\circ$ e $\frac{(5-2)180^\circ}{5} = 108^\circ$, respectivamente. Traçando retas verticais no ponto A e nos vértices vizinhos de A nos polígonos podemos usar ângulos alternos internos dos dois lados.



Dessa forma, temos no pentágono um ângulo 25° e outro $108^\circ - 25^\circ = 83^\circ$ e no hexágono um ângulo de 50° e outro de $120^\circ - 50^\circ = 70^\circ$. Usando mais duas vezes ângulos alternos internos, concluímos que o ângulo no A para cima é de $70^\circ + 83^\circ = 153^\circ$. Veja que em torno do A temos ângulos que somam 360° e podemos determinar x : $70 + 83 + 108 - x + x + 120 - x = 360 \iff 381 - x = 360 \iff x = 21^\circ$.

5. Alternativa C

A cada ciclo de dez dias, o canteiro A é regado nos dias 1 e 6 e o canteiro B é regado nos dias 2, 5, 8. A próxima vez do canteiro B é no dia 2 do próximo ciclo, pois ele não pode ser regado no dia 1 de ciclo algum, pois nesse dia A é regado.

Assim, o canteiro B é regado três vezes a cada dez dias. Dividindo o ano de 2026, que tem $365 = 36 \cdot 10 + 5$ dias, em 36 ciclos e meio ciclo, concluímos que o canteiro B é regado $36 \cdot 3 + 2 = 110$ vezes.

6. Alternativa C

Classifique os movimentos da pulga como *horizontal* se o movimento na horizontal tem 3 unidades e *vertical* caso contrário, ou seja, o movimento na vertical tem 3 unidades. Note que os movimentos podem ser feitos em qualquer ordem, de modo que os movimentos na horizontal podem ser feitos primeiro.

Como queremos nos mover, no total, 1 unidade para a horizontal, a quantidade de movimentos horizontais é ímpar. Com isso, após os movimentos horizontais, a pulga está acima ou abaixo do seu destino final.

Além disso, o movimento total na vertical é nulo, logo a quantidade de movimentos verticais é par. Como esses movimentos devem compensar o quanto a pulga está acima ou abaixo, há pelo menos dois movimentos a mais para um dos lados, resultando em um deslocamento vertical nesses movimentos de pelo menos $2 \cdot 3 = 6$ unidades. De qualquer forma, há pelo menos 2 movimentos verticais.

Voltando aos movimentos horizontais, como eles movimentam 2 unidades na vertical precisamos de pelo menos $6/2 = 3$ movimentos horizontais, dando um total de $2 + 3 = 5$ movimentos.

É possível chegar a $(1, 0)$ com 5 pulos:

$$(0, 0) \rightarrow (3, 2) \rightarrow (0, 4) \rightarrow (-3, 6) \rightarrow (-1, 3) \rightarrow (1, 0).$$

7. Alternativa A

Como terminou no 5, antes do 5, João obteve um número de 3 algarismos abc . Nota que a a operação realizada a partir desse número corresponde a

$$10b + c + 2a = 5.$$

Como a, b, c são algarismos, vemos que as únicas opções são $abc = 201$ ou $abc = 103$.

Para $abc = 201$, note que $10b + c + 2a \leq 10 \cdot 9 + 9 + 2 \cdot 9 = 117$. Logo, 201 não pode ter vindo de outro número com 3 algarismos, de modo que nesse caso ele começou com 201.

Para $abc = 103$, ou ele começou no 103 ou ele obteve 103 a partir de um outro número de 3 algarismos def , de modo que

$$10e + f + 2d = 103.$$

Observe que se $e \leq 7$, então $10e + f + 2d \leq 70 + 9 + 2 \cdot 9 < 100$ e não pode dar 103. Logo, $e = 8$ ou $e = 9$. Se $e = 8$, temos $f + 2d = 23$ e testando obtemos os números 985, 887, 789. Se $e = 9$, temos $f + 2d = 13$ e testando obtemos os números 691, 593, 495, 397, 299.

Portanto, no total temos $1 + 1 + 3 + 5 = 10$.

8. Alternativa C

Podemos escolher o algarismo das dezenas de milhares de 9 maneiras (não pode ser zero) e o algarismo dos milhares de 10 maneiras. Cada um dos próximos algarismos podem ser escolhidos de 5 maneiras, pois se a soma dos dois anteriores é par o próximo algarismo é par (0, 2, 4, 6 ou 8) e se a soma é ímpar o próximo algarismo é ímpar (1, 3, 5, 7 ou 9).

Com isso, há $9 \cdot 10 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 11250$ números papapa de cinco algarismos.

9. Alternativa D

Temos que

$$N = 3 \cdot 10^{2025} + 3 \cdot 10^{2024} + \dots + 3 \cdot 10^1 + 3 = 3(10^{2025} + 10^{2024} + \dots + 10^1 + 1) = 3 \cdot \left(\frac{10^{2026} - 1}{10 - 1} \right) = \frac{10^{2026} - 1}{3}.$$

Agora note que

$$10^1 \equiv 3 \pmod{7},$$

$$10^2 \equiv 2 \pmod{7},$$

$$10^3 \equiv 6 \pmod{7},$$

$$10^4 \equiv 4 \pmod{7},$$

$$10^5 \equiv 5 \pmod{7},$$

$$10^6 \equiv 1 \pmod{7}.$$

Portanto, como $2026 = 6 \cdot 337 + 4$, segue que $10^{2026} \equiv 4 \pmod{7}$. Dessa forma, como $3 \cdot 5 \equiv 1 \pmod{7}$, podemos escrever

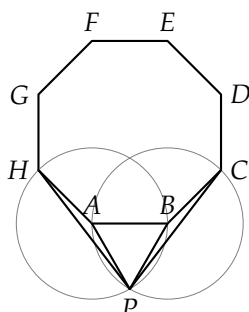
$$N = \frac{10^{2026} - 1}{3} \equiv 5(10^{2026} - 1) \equiv 5(4 - 1) \equiv 1 \pmod{7}.$$

Logo, o resto é 1.

10. Alternativa A

Temos $AP = AH = AB = BC = BP$, de modo que os triângulos APH e BPC são isósceles e o triângulo ABP é equilátero (além de ser também isósceles). Com isso, lembrando que o ângulo interno do octógono regular mede 135° ,

$$\angle CPH = \angle CPB + \angle BPC + \angle APH = \frac{180^\circ - \angle PBC}{2} + 60^\circ + \frac{180^\circ - \angle PAH}{2} = 240^\circ - (360^\circ - 60^\circ - 135^\circ) = 75^\circ.$$



11. Alternativa C

Veja que 12 é uma resposta possível, pois $\frac{1}{2} + \frac{1}{12} = \frac{7}{12} = \frac{1}{3} + \frac{1}{4}$.

Vamos provar por eliminação que 6 e 10 não são possíveis. Suponha que a é o menor dos números. O b precisa ser o maior, pois se $b < c$ (ou $b < d$) então $\frac{1}{a} > \frac{1}{d}$ e $\frac{1}{b} > \frac{1}{c}$ e não pode ocorrer igualdade.

Se $b = 6$, então a seria 1, 2 ou 3, pois entre a e b tem os valores distintos de c e d . Testando temos $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{7}{6}, \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ ou $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$. Para funcionar um desses resultados deveria ser $\frac{1}{c} + \frac{1}{d} = \frac{c+d}{cd}$. No caso $a = 1$ a maior soma possível é $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} < \frac{7}{6}$, no caso $a = 2$ a maior soma possível é $\frac{1}{3} + \frac{1}{4} < \frac{2}{3}$ e no caso $a = 3$ a maior soma possível é $\frac{1}{4} + \frac{1}{5} < \frac{1}{2}$.

Se $b = 10$, então $1 \leq a \leq 7$. Nesse caso $\frac{1}{a} + \frac{1}{10} = \frac{10+a}{10a}$. As possibilidades são $\frac{11}{10}, \frac{12}{20} = \frac{3}{5}, \frac{13}{30}, \frac{14}{40} = \frac{7}{20}, \frac{15}{50} = \frac{3}{10}, \frac{16}{60} = \frac{4}{15}$ e $\frac{17}{70}$. Em todas elas 5 divide o denominador da fração irredutível. Se $\frac{1}{c} + \frac{1}{d} = \frac{c+d}{cd}$ for igual a um deles, então 5 divide cd e temos $c = 5$ ou $d = 5$ (o único múltiplo de 5 menor que 10). Isso já elimina as possibilidades com $a \geq 5$. Fazendo um deles (c ou d) igual a 5 a outra fração seria $\frac{11}{10} - \frac{1}{5} = \frac{9}{10}, \frac{3}{5} - \frac{1}{5} = \frac{2}{5}, \frac{13}{30} - \frac{1}{5} = \frac{7}{30}$ ou $\frac{7}{20} - \frac{1}{5} = \frac{3}{20}$. Nenhum deles tem numerador 1, então $b = 10$ não funciona.

12. Alternativa C

Como 1, 4, 9 são quadrados, podemos colocá-los ou não nos subconjuntos sem restrição alguma.

Veja que 5 e 10 devem entrar juntos, por conta do fator 5. Da mesma forma, 3 e 6 devem entrar juntos, por conta do fator 3. O 7 não pode entrar, pois não há outro número com fator 7.

Agora veja se um dentre os pares 5, 10 ou 3, 6 entram, devemos colocar algum outro número com quantidade ímpar de fatores 2, pois ganhamos um fator 2 com o 6 ou o 10. Nesse caso, podemos colocar o 2 ou o 8. Com isso, não é difícil listar todas as opções:

$$\{2, 3, 6\}, \{3, 6, 8\}, \{5, 8, 10\}, \{2, 5, 10\}.$$

Mas ainda podemos colocar os pares 3, 6 e 5, 10 juntos. Nesse caso não precisamos acertar o fator 2, mas podemos colocar 2 e 8, desde que coloquemos os dois. Então obtemos as opções

$$\{3, 5, 6, 10\}, \{2, 3, 5, 6, 8, 10\}.$$

Se não colocarmos nenhum dos pares 3, 6 e 5, 10, ainda temos as opções $\{\}$ e $\{2, 8\}$.

Portanto, no total temos $4 + 2 + 2 = 8$ maneiras de inserir os números não quadrados no subconjunto. Como para os quadrados temos 2^3 opções, temos $2^3 \cdot 8 = 64$ subconjuntos. Mas veja que estamos incluindo o caso vazio, quando escolhemos não acrescentar nenhum dos quadrados ao conjunto $\{\}$. Logo, são $64 - 1 = 63$ subconjuntos.

13. Alternativa B

Sendo $x^2 - 3xy - 4y^2 + x - 4y = (x - 4y)(x + y + 1) = p$ primo, a diferença dos fatores pode ser

$$p - 1 = (x + y + 1) - (x - 4y) = 5y + 1,$$

$$\begin{aligned}
1 - p &= (x + y + 1) - (x - 4y) = 5y + 1, \\
(-p) - (-1) &= (x + y + 1) - (x - 4y) = 5y + 1, \\
(-1) - (-p) &= (x + y + 1) - (x - 4y) = 5y + 1.
\end{aligned}$$

Com isso, $p = -5y$ ou $p = 5y + 2$ e então esse primo não pode ser 11.

14. Alternativa C

Sejam P e Q as interseções da reta r com os lados AC e BC , respectivamente. Sabemos que a razão entre as áreas é igual ao quadrado da razão de semelhança. Logo, sendo a área do triângulo PQC igual a $\frac{1}{3}$ e $AB = L$, concluímos que

$$\left(\frac{PQ}{AB}\right)^2 = \frac{1}{3} \Rightarrow PQ = \frac{L\sqrt{3}}{3}.$$

Sendo H a altura do triângulo ABC relativa ao lado AB e h a do triângulo PQC em relação ao lado PQ , da mesma forma obtemos

$$h = \frac{H\sqrt{3}}{3}.$$

Sendo R e S as interseções da reta s com AC e BC , respectivamente, d a distância entre as retas r e s e sabendo que a área de RSC é $\frac{2}{3}$, de modo análogo a anteriormente, obtemos

$$\left(\frac{h+d}{H}\right)^2 = \frac{2}{3} \Rightarrow d = \frac{H\sqrt{6}}{3} - h = \frac{H\sqrt{6}}{3} - \frac{H\sqrt{3}}{3} \Rightarrow d = \frac{H\sqrt{3}(\sqrt{2}-1)}{3}.$$

Portanto, a área desejada é

$$\frac{PQ \cdot d}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{L\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{H\sqrt{3}(\sqrt{2}-1)}{3} = \left(\frac{LH}{2}\right) \cdot \left(\frac{\sqrt{2}-1}{3}\right) = \frac{\sqrt{2}-1}{3}.$$

15. Alternativa B

O número de fatores 5 em $2026!$ é

$$\left\lfloor \frac{2026}{5} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2026}{25} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2026}{125} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2026}{625} \right\rfloor = 405 + 81 + 16 + 3 = 505.$$

Logo, $2026! = 10^{505} \cdot N$, onde N é inteiro coprimo com 5. O último algarismo não nulo de $2026!$ é então o último algarismo de N .

Note que

$$\begin{aligned}
\frac{2026!}{5^{505}} &\equiv \frac{(1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9)^{202} \cdot (1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 6) \cdot (5 \cdot 10 \cdot 15 \cdot \dots \cdot 2025)}{5^{505}} \pmod{10} \\
&\equiv \frac{6^{202} \cdot 4 \cdot (5 \cdot 10 \cdot 15 \cdot \dots \cdot 2025)}{5^{505}} \equiv 4 \cdot \frac{5^{405} \cdot 405!}{5^{505}} = 4 \cdot \frac{405!}{5^{100}} \pmod{10}.
\end{aligned}$$

Repetindo o procedimento feito para $2026!$, temos que

$$\begin{aligned}
\frac{405!}{5^{100}} &\equiv \frac{(1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9)^{40} \cdot (1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4) \cdot (5 \cdot 10 \cdot 15 \cdot \dots \cdot 405)}{5^{100}} \pmod{10} \\
&\equiv \frac{6^{40} \cdot 4 \cdot 5^{81} \cdot 81!}{5^{100}} \equiv 4 \cdot \frac{81!}{5^{19}} \pmod{10}.
\end{aligned}$$

Novamente, temos que

$$\frac{81!}{5^{19}} \equiv \frac{(1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9)^8 \cdot 1 \cdot (5 \cdot 10 \cdot 15 \cdot \dots \cdot 80)}{5^{19}} \equiv \frac{6^8 \cdot 5^{16} \cdot 16!}{5^{19}} \equiv 6 \cdot \frac{16!}{5^3} \pmod{10}.$$

Finalmente, temos que

$$\frac{16!}{5^3} \equiv \frac{(1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9) \cdot (1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 6) \cdot (5 \cdot 10 \cdot 15)}{5^3} \equiv 6 \cdot 4 \cdot 3! \equiv 4 \pmod{10}.$$

Portanto, juntando tudo, obtemos

$$2^{505}N \equiv \frac{2026!}{5^{505}} \equiv 4 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 4 \equiv 4 \pmod{10}.$$

Olhando o período das potências de 2 módulo 10, vemos que elas repetem a cada 4. Como $505 = 4 \cdot 126 + 1$, segue que $2^{505} \equiv 2^1 \equiv 2 \pmod{10}$. Portanto:

$$2N \equiv 4 \pmod{10} \Rightarrow N \equiv 2 \pmod{5}.$$

Logo, $N = 10k + 2$ ou $N = 10k + 7$. Como N é par, segue que $N = 10k + 2$, ou seja, o último algarismo é 2.

5ª COMPETIÇÃO JACOB PALIS JÚNIOR DE MATEMÁTICA

Nível 3 (Ensino Médio)

Respostas

1. C	2. A	3. D	4. C	5. C
6. B	7. B	8. A	9. E	10. A
11. D	12. E	13. C	14. C	15. B

Soluções

1. Alternativa C

Sejam x e y as idades de Umberto e Doisberto no momento em que Tresberto nasceu, de modo que Zé Roberto tem $2x + 2y$ anos. Depois de z anos, esses três filhos de Zé Roberto terão z , $x + z$ e $y + z$ anos e o pai terá $2x + 2y + z$ anos. A soma das idades dos filhos é igual à idade do pai quando

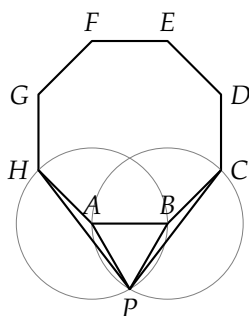
$$z + (x + z) + (y + z) = 2x + 2y + z \iff 2z = x + y.$$

Nessa situação, a idade de Zé Roberto é $2(x + y) = 4z$, ou seja, Tresberto tem um quarto da idade de Zé Roberto.

2. Alternativa A

Temos $AP = AH = AB = BC = BP$, de modo que os triângulos APH e BPC são isósceles e o triângulo ABP é equilátero (além de ser também isósceles). Com isso, lembrando que o ângulo interno do octógono regular mede 135° ,

$$\angle CPH = \angle CPB + \angle BPC + \angle APH = \frac{180^\circ - \angle PBC}{2} + 60^\circ + \frac{180^\circ - \angle PAH}{2} = 240^\circ - (360^\circ - 60^\circ - 135^\circ) = 75^\circ.$$



3. Alternativa D

Podemos escolher o algarismo das dezenas de milhares de 9 maneiras (não pode ser zero) e o algarismo dos milhares de 10 maneiras. Cada um dos próximos algarismos podem ser escolhidos de 5 maneiras, pois se a soma dos dois anteriores é par o próximo algarismo é par (0, 2, 4, 6 ou 8) e se a soma é ímpar o próximo algarismo é ímpar (1, 3, 5, 7 ou 9).

Com isso, há $9 \cdot 10 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 11250$ números papapa de cinco algarismos.

4. Alternativa C

A cada ciclo de dez dias, o canteiro A é regado nos dias 1 e 6 e o canteiro B é regado nos dias 2, 5, 8. A próxima vez do canteiro B é no dia 2 do próximo ciclo, pois ele não pode ser regado no dia 1 de ciclo algum, pois nesse dia A é regado.

Assim, o canteiro B é regado três vezes a cada dez dias. Dividindo o ano de 2026, que tem $365 = 36 \cdot 10 + 5$ dias, em 36 ciclos e meio ciclo, concluímos que o canteiro B é regado $36 \cdot 3 + 2 = 110$ vezes.

5. Alternativa C

Classifique os movimentos da pulga como *horizontal* se o movimento na horizontal tem 3 unidades e *vertical* caso contrário, ou seja, o movimento na vertical tem 3 unidades. Note que os movimentos podem ser feitos em qualquer ordem, de modo que os movimentos na horizontal podem ser feitos primeiro.

Como queremos nos mover, no total, 1 unidade para a horizontal, a quantidade de movimentos horizontais é ímpar. Com isso, após os movimentos horizontais, a pulga está acima ou abaixo do seu destino final.

Além disso, o movimento total na vertical é nulo, logo a quantidade de movimentos verticais é par. Como esses movimentos devem compensar o quanto a pulga está acima ou abaixo, há pelo menos dois movimentos a mais para um dos lados, resultando em um deslocamento vertical nesses movimentos de pelo menos $2 \cdot 3 = 6$ unidades. De qualquer forma, há pelo menos 2 movimentos verticais.

Voltando aos movimentos horizontais, como eles movimentam 2 unidades na vertical precisamos de pelo menos $6/2 = 3$ movimentos horizontais, dando um total de $2 + 3 = 5$ movimentos.

É possível chegar a $(1, 0)$ com 5 pulos:

$$(0, 0) \rightarrow (3, 2) \rightarrow (0, 4) \rightarrow (-3, 6) \rightarrow (-1, 3) \rightarrow (1, 0).$$

6. Alternativa B

Seja $z = a + bi$, com $a, b \in \mathbb{R}$ Temos que

$$z^2 = (a + bi)^2 = (a^2 - b^2) + 2abi \Rightarrow \operatorname{Re}(z^2) = a^2 - b^2 \geq 0 \Rightarrow a^2 \geq b^2.$$

Portanto:

$$|z + i| = |a + (b + 1)i| = \sqrt{a^2 + (b + 1)^2} \geq \sqrt{b^2 + (b + 1)^2} = \sqrt{2b^2 + 2b + 1}.$$

Queremos então minimizar $2b^2 + 2b + 1$. Calculando o y do vértice, obtemos que o valor mínimo dessa função é dado por

$$y_v = -\frac{(2^2 - 4 \cdot 2 \cdot 1)}{4 \cdot 2} = \frac{1}{2}.$$

Logo:

$$|z + i| \geq \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

A igualdade ocorre, por exemplo para $z = \frac{1-i}{2}$. Nesse caso, a parte real de z^2 é 0 e o módulo é $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

7. Alternativa B

Seja $x^2 - 3xy - 4y^2 + x - 4y = (x - 4y)(x + y + 1) = p$ primo, a diferença dos fatores pode ser

$$p - 1 = (x + y + 1) - (x - 4y) = 5y + 1,$$

$$1 - p = (x + y + 1) - (x - 4y) = 5y + 1,$$

$$(-p) - (-1) = (x + y + 1) - (x - 4y) = 5y + 1,$$

$$(-1) - (-p) = (x + y + 1) - (x - 4y) = 5y + 1.$$

Com isso, $p = -5y$ ou $p = 5y + 2$ e então esse primo não pode ser 11.

8. Alternativa A

Pelo enunciado e pelo Teorema de Pitágoras, temos:

$$OP_1^2 = 1^2$$

$$2^2 = OP_1^2 + OP_2^2$$

$$OP_2^2 + OP_3^2 = 3^2$$

$$4^2 = OP_3^2 + OP_4^2$$

$$\vdots$$

$$288^2 = OP_{277}^2 + OP_{288}^2$$

Somando as equações, obtemos:

$$2^2 + 4^2 + 6^2 + \dots + 288^2 = 1^2 + 3^2 + 5^2 + \dots + 287^2 + OP_{288}^2$$

$$\Leftrightarrow OP_{288}^2 = 288^2 - 287^2 + \dots + 2^2 - 1^2$$

$$\iff OP_{288}^2 = (288 + 287)(288 - 287) + \dots + (2 + 1)(2 - 1)$$

$$\iff OP_{288}^2 = 288 + 287 + \dots + 2 + 1 = \frac{289 \cdot 288}{2} = 289 \cdot 144$$

$$\iff OP_{288} = 17 \cdot 12 = 204 \text{ m}$$

9. Alternativa E

Considere as casas que formam um tabuleiro 3×3 no canto superior direito. Cada casa pode ou não ter mina, num total de $2^9 = 512$ possibilidades. As casas da direita de cada uma das três primeiras linhas estão determinadas, pois elas ajustam a informação de Esmeralda quanto à paridade da quantidade de bombas. O mesmo vale para as três casas de baixo das três primeiras colunas.

					I
		S		T	I
					P
	U				I
P	I	P	P		

Sejam S , T e U as quantidade de minas no tabuleiro 3×3 , nas casas da direita das três linhas de cima e nas casas de baixo das três colunas da esquerda, respectivamente. Então $S + T$ é par (soma de dois ímpares e um par), $S + U$ é ímpar (soma de um ímpar e dois pares), o que implica $(S + T) - (S + U) = T - U$ ser ímpar, ou seja, T e U têm paridades diferentes. Com isso, como as informações na última linha e na última coluna são diferentes, é possível preencher a última casa com um valor condizente.

Logo há 512 tabuleiros possíveis para Esmeralda. Esse resultado independe da informação passada para Jade, desde que a soma das paridades das linhas seja igual à soma das paridades das colunas.

10. Alternativa A

O problema é resolvido com o seguinte lema:

Seja $ABCD$ um paralelogramo e P um ponto qualquer do plano. Então $PA^2 + PC^2 = PB^2 + PD^2$.

Usamos geometria analítica para provar esse lema. Sejam $A = (0, 0)$, $B = (a, 0)$, $C = (a + c, b)$ e $D = (c, b)$. Assim, sendo $P = (x, y)$,

$$PA^2 + PC^2 = x^2 + y^2 + (x - a - c)^2 + (y - b)^2 = 2x^2 + 2y^2 - 2(a + c)x - 2by$$

e

$$PB^2 + PD^2 = (x - a)^2 + y^2 + (x - c)^2 + (y - b)^2 = 2x^2 + 2y^2 - 2(a + c)x - 2by,$$

e o resultado segue.

Assim, aplicando o lema ao ponto O e ao quadrado $ABCD$,

$$OA^2 + OC^2 = OB^2 + OD^2 \iff 2^2 + x^2 = 3^2 + 5^2 \iff x = \sqrt{30}.$$

11. Alternativa D

Seja r uma raiz de $Q(x) = x^2 + 2x + 3$, ou seja, $r = -1 \pm \sqrt{2}i$,

$$\begin{aligned} r^2 = -2r - 3 &\implies r^4 = 4r^2 + 12r + 9 = 4(-2r - 3) + 12r + 9 = 4r - 3 \\ &\implies r^8 = 16r^2 - 24r + 9 = 16(-2r - 3) - 24r + 9 = -56r - 39. \end{aligned}$$

Como $x^8 + ax^4 + b$ é divisível por $Q(x)$,

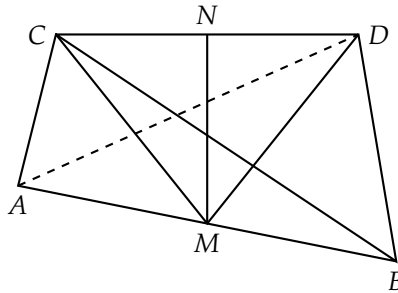
$$r^8 + ar^4 + b = -56r - 39 + a(4r - 3) + b = (4a - 56)r + b - 3a - 39.$$

Agora, sendo r complexo não real,

$$\begin{cases} 4a - 56 = 0 \\ b - 3a - 39 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a = 14 \\ b = 81 \end{cases} \implies |a - b| = 67.$$

12. Alternativa E

Seja a, b, c uma permutação de 8, 10, 12. Desenhe o tetraedro com uma aresta AB de medida a no plano horizontal e a aresta reversa CD paralela ao plano horizontal. Como ABC e ABD têm arestas a, b, c , podemos supor que $AC = b$ e $BC = c$. Nos triângulos ABD e BCD , $BD \neq BC = c$ e $BD \neq AB = a$, logo $BD = b$ e, conseqüentemente, $AD = c$. Finalmente, no triângulo BCD com $BC = c$ e $BD = b$, $CD = a$.



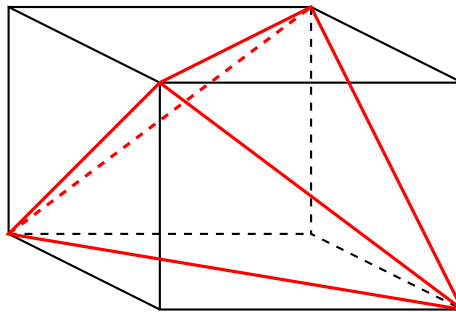
Sejam M o ponto médio de AB e N o ponto médio de CD . Os segmentos CM e DM são medianas com relação a AB , logo CDM é isósceles com $CD = a$ e $CM = DM = m_a$. Em particular, MN é perpendicular a CD . Analogamente, MN é perpendicular a AB , e a distância entre AB e CD é igual a

$$MN = \sqrt{DM^2 - DN^2} = \sqrt{m_a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{2b^2 + 2c^2 - a^2}{4} - \frac{a^2}{4}} = \sqrt{\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2}}.$$

Como queremos a maior distância, escolhemos $a = 8$, $b = 10$ e $c = 12$, obtendo

$$\sqrt{\frac{10^2 + 12^2 - 8^2}{2}} = 3\sqrt{10}.$$

Outra solução: Considere o paralelepípedo cujos vértices alternados são os vértices do tetraedro e sejam x, y e z suas dimensões.



Então

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 8^2 \\ x^2 + z^2 = 10^2 \\ y^2 + z^2 = 12^2 \end{cases} \iff \begin{cases} x^2 = \frac{8^2 + 10^2 - 12^2}{2} = 10 \\ y^2 = \frac{8^2 + 12^2 - 10^2}{2} = 54 \\ z^2 = \frac{10^2 + 12^2 - 8^2}{2} = 90 \end{cases}$$

As distâncias entre as arestas reversas do tetraedro são, então, $\sqrt{10}$, $\sqrt{54} = 3\sqrt{2}$ e $\sqrt{90} = 3\sqrt{10}$, sendo a maior $3\sqrt{10}$.

13. Alternativa C

A função f é periódica com um período igual a 12, de modo que só é necessário definir $f(x)$ para $0 \leq x \leq 11$. Temos $f(0) = f(x)f(0)$ para todo x , de modo que $f(0) = 0$ ou $f(x) = 1$ para todo x .

Por outro lado, $f(x) = f(x)f(1)$. Se existe x tal que $f(x) \neq 0$ então $f(1) = 1$. Assim, $f(x) = 0$ para todo x ou $f(1) = 1$.

Considere então o caso em que $f(0) = 0$ e $f(1) = 1$. Agora note que $f(x) = f(r)$, em que r é o resto da divisão de x por 12. Com isso, estudamos os seguintes casos:

- $f(4) = f(16) = f(4)f(4) \iff f(4) = 0$ ou $f(4) = 1$. Logo $f(2) = 0$ ou $f(2) = -1$ ou $f(2) = 1$;

- $f(3)f(3)f(3) = f(3)f(9) = f(27) = f(3) \iff f(3) = 0$ ou $f(3) = -1$ ou $f(3) = 1$;
- $0 = f(12) = f(2)f(6) = f(3)(f(2))^2 \iff f(2) = 0$ ou $f(3) = 0$. Com isso, $f(6) = 0$.
- $f(11) = f(35) = f(5)f(7)$, ou seja, $f(11)$ é determinado por $f(5)$ e $f(7)$.
- Se n é composto, $f(n)$ é determinado pelos valores de $f(p)$, em que p são os primos divisores de n . Ou seja, em princípio basta calcular $f(2)$, $f(3)$, $f(5)$ e $f(7)$.

Vamos aos casos: temos as duas funções $f(x) = 0$, $f(x) = 1$ e:

- se $f(2) \neq 0$, $f(3) = 0$, $f(20) = f(8) \iff f(4)f(5) = f(8) \iff f(5) = f(2)$ e $f(14) = f(2) \iff f(2)f(7) = f(2) \iff f(7) = 1$, ou seja, só $f(2)$ determina toda a função. Há duas funções nessas condições.
- se $f(3) \neq 0$, $f(2) = 0$, $f(15) = f(3) \iff f(5)f(3) = f(3) \iff f(5) = 1$ e $f(21) = f(9) \iff f(3)f(7) = (f(3))^2 \iff f(7) = f(3)$. Só $f(3)$ determina toda a função. Há duas funções nessas condições.
- se $f(2) = f(3) = 0$, há duas escolhas para $f(5)$, pois $f(5)^2 = f(25) = f(1) = 1$, e duas escolhas para $f(7)$, pois $f(7)^2 = f(49) = f(1) = 1$. Há $2 \cdot 2 = 4$ funções.

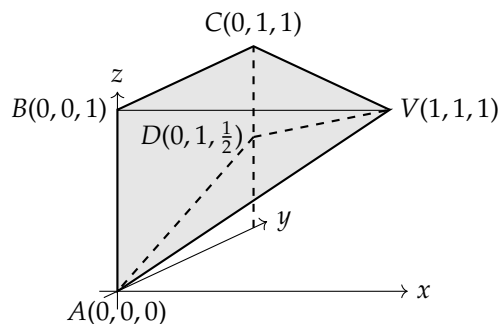
Assim, há $2 + 2 + 2 + 4 = 10$ funções nas condições do enunciado.

14. Alternativa C

Devemos ter $b > a$ e $c > \frac{a+b}{2}$. Representando graficamente os pontos (a, b, c) , obtemos um espaço amostral com volume $1^3 = 1$.

A condição $a < b$ com $0 \leq a, b \leq 1$ delimita um prisma com base no triângulo com vértices $(0, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ e $(1, 1, 0)$ e altura 1. Assim, queremos o volume da parte do prisma que está acima do plano $z = \frac{x+y}{2}$.

Esse plano corta a base inferior $z = 0$ no ponto $(0, 0, 0)$, a face lateral $x = 0$ na reta $y = 2z$ (passando por $(0, 0, 0)$ e $(0, 1, \frac{1}{2})$), a face lateral $y = 1$ na reta $z = \frac{x+1}{2} \iff x = 2z - 1$ (passando por $(0, 1, \frac{1}{2})$ e $(1, 1, 1)$), a face lateral $x = y$ na reta (t, t, t) , $t \in \mathbb{R}$ (passando por $(0, 0, 0)$ e $(1, 1, 1)$), e a base superior $z = 1$ no ponto $(1, 1, 1)$.



Com isso, o volume do evento é o de uma pirâmide de base $ABCD$ e vértice V . A altura da pirâmide é $VC = 1$ e a base tem área $\frac{(AB+CD)BC}{2} = \frac{(1+\frac{1}{2})1}{2} = \frac{3}{4}$, logo seu volume é $\frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot 1 = \frac{1}{4}$.

A probabilidade é, então,

$$\frac{V_{\text{evento}}}{V_{\text{espaço amostral}}} = \frac{\frac{1}{4}}{1} = \frac{1}{4}.$$

15. Alternativa B

Sendo a, b, c lados de um triângulo, existem reais positivos x, y, z tais que $a = y + z$, $b = z + x$ e $c = x + y$ (x, y e z são as distâncias entre os vértices e os pontos de tangência do incírculo nos lados que contêm os respectivos vértices). Assim,

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} = \frac{y+z}{2x+y+z} + \frac{z+x}{x+2y+z} + \frac{x+y}{x+y+2z} < \frac{y+z}{x+y+z} + \frac{z+x}{x+y+z} + \frac{x+y}{x+y+z} = 2.$$

Por outro lado, para um triângulo com lados 1, 1 e t , com t bem pequeno

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} = \frac{2}{1+t} + \frac{t}{2} = 2 + \frac{t^2-t}{2t+2},$$

que pode ficar arbitrariamente próximo de 2.