



PRIMEIRO DIA
9 de setembro de 2026

Problema 1.

Sejam $a_1, a_2, \dots, a_{1000}$ os 1000 números inteiros de 1 até 1000 em alguma ordem. Para quais valores de a_1 podemos garantir que existe pelo menos um inteiro positivo k , $1 \leq k \leq 1000$, tal que $\underbrace{a_1 + a_2 + \dots + a_k}_{k \text{ parcelas}}$ é um múltiplo de 3?

Problema 2.

Seja $\mathbb{Z}^+$ o conjunto dos inteiros positivos. Determine se existe uma função bijetiva $f : \mathbb{Z}^+ \rightarrow \mathbb{Z}^+$ que satisfaz todas as seguintes condições:

- (i) n divide $f(1) + f(2) + \dots + f(n)$ para todo inteiro positivo n ;
- (ii) $f(1) + f(2) + \dots + f(n) \leq n^2$ para todo inteiro positivo n ;
- (iii) $f(1) + f(2) + \dots + f(n) = n^2$ para infinitos inteiros positivos n .

Nota: Uma função $f : \mathbb{Z}^+ \rightarrow \mathbb{Z}^+$ é *bijetiva* se cada inteiro positivo aparece exatamente uma vez na lista infinita $f(1), f(2), f(3), \dots$.

Problema 3.

Mafalda sonha que faz uma viagem interestelar acompanhada de seus amigos, e na sua viagem, descobre uma sala com forma de cubo na qual 2026 alfajores flutuam, sem se mover. Em seguida, escolhe um vértice do cubo no qual coloca todos seus amigos. Cada amigo deve viajar até o vértice oposto do cubo, movendo-se somente em direções paralelas às suas arestas e sempre se afastando do vértice do qual todos saíram. Pelo caminho, cada amigo recolhe os alfajores que estejam na sua rota.

Qual é o número mínimo de amigos que Mafalda necessita para garantir que é possível recolher todos os alfajores que estavam no cubo?

Nota: Considere que os alfajores e os amigos são pontos no espaço.

Duração da prova: 4 horas e 30 minutos
Cada problema vale 7 pontos

SEGUNDO DIA
10 de setembro de 2026

Problema 4.

Uma sequência $a_1, a_2, a_3, \dots$ de inteiros maiores que zero é *portenha* se satisfaz todas as seguintes condições:

- (i) $a_1 < a_2 < a_3 < \dots$;
- (ii) $2a_n - n$ é um quadrado perfeito para todo inteiro $n \geq 1$;
- (iii) $a_{n-1} + a_n \leq n^2$ para todo inteiro $n \geq 2$.

Determine todas as sequências portenhas.

Problema 5.

Seja ABC um triângulo acutângulo tal que $AB > AC$ inscrito numa circunferência Γ . Seja X um ponto variável sobre o arco AC de Γ que não contém B , com X diferente de A e C . A reta AX corta a reta BC no ponto P . A reta paralela a AB que passa por P e a reta tangente a Γ que passa por B se cortam em D . A reta paralela a AC que passa por P e a reta tangente a Γ que passa por C se cortam em E . Demonstre que o circuncentro do triângulo XDE está sobre uma reta fixa quando X varia sobre o arco AC de Γ .

Nota: O circuncentro de um triângulo é o centro da circunferência que passa por seus três vértices.

Problema 6.

Determine todos os números inteiros $n > 1$ para os quais existem uma permutação $d_1, \dots, d_k$ de todos os divisores positivos de n e um polinômio $P(x)$ com coeficientes inteiros tais que

$$P(d_j) = d_{j+1} \quad \text{para todo } 1 \leq j \leq k-1.$$

Duração da prova: 4 horas e 30 minutos
Cada problema vale 7 pontos