

48ª OLIMPIÁDA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA

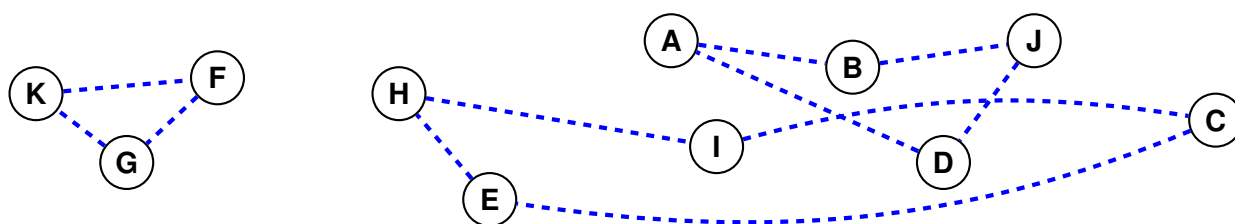
Fase Única – Nível 2 (8º ou 9º ano)

PRIMEIRO DIA



1. Maria possui n ilhas. Alguns pares de ilhas distintas são ligados por rotas marítimas, nas quais circulam navios em ambos os sentidos. Cada ilha pertence a exatamente duas rotas e não há duas rotas entre o mesmo par de ilhas.

Um *ciclo* é um trajeto de um navio que começa e termina na mesma ilha não repetindo ilhas nem rotas, exceto pela ilha inicial. No mapa abaixo, há os ciclos $F - G - K - F$, $A - B - J - D - A$ e $C - E - H - I - C$. Ciclos que diferem apenas pela ilha inicial ou pelo sentido são considerados iguais. Por exemplo, os ciclos $F - G - K - F$ e $G - F - K - G$ são iguais.



Maria quer modificar as rotas até que um navio possa navegar de qualquer ilha a qualquer outra através das rotas. A cada mês, ela escolhe quatro ilhas distintas X, Y, Z, W tais que existam as rotas $X - Y$ e $Z - W$, mas não existam as rotas $X - Z$ nem $Y - W$. As rotas $X - Y$ e $Z - W$ serão então removidas e substituídas pelas novas rotas $X - Z$ e $Y - W$.

(a) Considerando o caso $n = 11$ com o mapa de rotas acima, Maria fará as seguintes substituições:

	Mês 1	Mês 2	Mês 3
Rotas Excluídas	$F - G, H - E$	$I - C, G - K$	$A - B, F - H$
Rotas Adicionadas	$F - H, G - E$	$I - G, C - K$	$A - F, B - H$

Qual a quantidade de ciclos após cada substituição?

- (b) Para um n qualquer, explique por que, em qualquer mês da reformulação, as rotas poderão ser divididas em ciclos de modo que cada rota e cada ilha pertençam a exatamente um deles.
- (c) Em um mapa inicial qualquer com $n = 2026$ e 314 ciclos, qual é o menor número de meses necessário para Maria cumprir seu objetivo? Você deve demonstrar por que essa quantidade é suficiente e por que não é possível com uma quantidade menor.

2. Seja ABC um triângulo acutângulo com ortocentro H . Sejam P e Q pontos nos interiores dos lados AB e AC , respectivamente, tais que $\angle PHQ = 90^\circ$. Seja X um ponto tal que BX é paralelo a PH e CX é paralelo a QH . Mostre que HX e PQ são perpendiculares.

3. Seja n um inteiro positivo. Determine, em função de n , o menor número real c tal que, para todo número real $x \geq c$, temos

$$\lfloor x\sqrt{n} \rfloor > \lfloor x\sqrt{n-1} \rfloor > \dots > \lfloor x\sqrt{2} \rfloor > \lfloor x\sqrt{1} \rfloor.$$

Observação: para um número real y , define-se $\lfloor y \rfloor$ como o maior inteiro que é menor ou igual a y . Por exemplo, $\lfloor 2 \rfloor = 2$, $\lfloor \sqrt{5} \rfloor = 2$ e $\lfloor -\pi \rfloor = -4$.

48ª OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA

Fase Única – Nível 2 (8º ou 9º ano)

SEGUNDO DIA



4. Agnes escreveu 2027 números primos distintos dois a dois ao redor de uma circunferência. É possível que todas as 2027 somas de pares de primos adjacentes na circunferência sejam quadrados perfeitos?

5.

(a) Determine todos os números reais a para os quais vale a desigualdade

$$\sqrt{12x + 13} \geq ax + a + 1$$

para qualquer x real com $-1 \leq x \leq 1$.

(b) Prove que

$$\sqrt{12x + 13} + \sqrt{12y + 13} - 1 \geq (x + y + 1)^2$$

para quaisquer x, y reais com $-1 \leq x \leq 1$ e $-1 \leq y \leq 1$.

6. Em um tabuleiro 100×100 , há 50 casas previamente numeradas da seguinte forma:

						50	
				3			
		2					
1							

Esmeralda deseja escrever números inteiros positivos em algumas das casas vazias. Ela quer que o preenchimento final do tabuleiro satisfaça a seguinte propriedade:

“não há duas casas que compartilham um lado e possuem números distintos escritos”.

Além das 50 casas já preenchidas, qual é o maior número de casas que Esmeralda pode preencher satisfazendo essa regra?