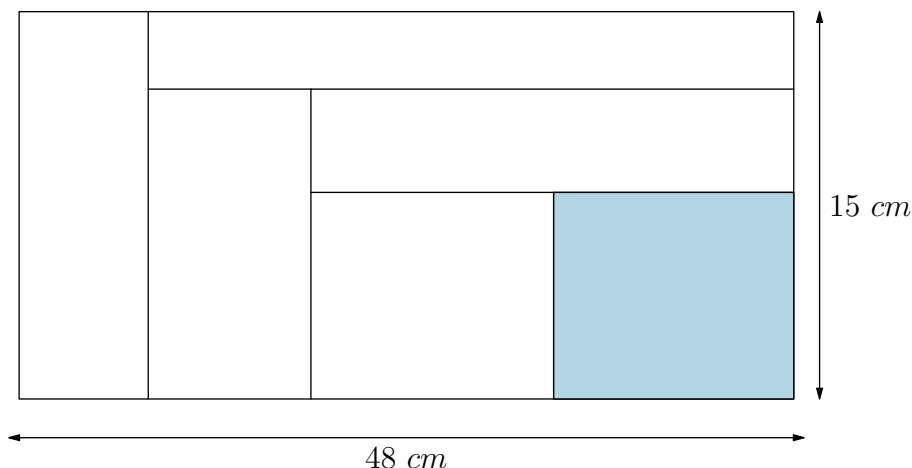


1. O retângulo abaixo foi dividido em 6 retângulos de mesma área. Qual é o perímetro do retângulo destacado, em cm ?



2. Um número inteiro positivo n é dito *impressionante* quando a soma dos algarismos do produto $2026 \cdot n$ é igual a n . Por exemplo, 26 é impressionante, pois $2026 \cdot 26 = 52676$ e a soma dos algarismos desse resultado é $5 + 2 + 6 + 7 + 6 = 26$.

- (a) Qual é o **menor** número inteiro positivo impressionante?
- (b) Agora vamos buscar o maior número impressionante n . Com algumas contas pode-se provar que n é menor ou igual a 54. Você não precisa provar isto nesta prova. Veja que $2026 \cdot 54 = 109404$. Qual é o maior valor da soma dos algarismos de um número menor ou igual a 109404?
- (c) Qual é o **maior** número inteiro positivo impressionante?

3. Em um campeonato de futebol com 2026 times, cada time joga exatamente uma vez contra cada um dos outros. Em cada partida, o vencedor ganha 3 pontos e o perdedor não ganha pontos; em caso de empate, cada um dos dois times ganha 1 ponto. Ao final do campeonato, todos os times terminaram com a mesma pontuação P .

- (a) Mostre que o número de partidas que terminaram com um vencedor é um múltiplo de 2026.
- (b) Determine os valores mínimo e máximo de P . Lembre-se de justificar esses valores e de mostrar como seriam os resultados dos jogos para esses valores poderem ser atingidos.

- **Inserção:** O jogador escolhe uma casa vazia do tabuleiro e insere nela uma peça de valor 2.
- **Deslizamento:** O jogador escolhe uma direção ($\uparrow, \downarrow, \leftarrow, \rightarrow$). Todas as peças deslizam simultaneamente, o máximo possível, nessa direção.
- **Fusão:** Durante o deslizamento, se duas peças com o **mesmo número** colidirem, elas se fundem em uma única peça com valor igual à soma de ambas (com prioridade de fusão na borda de destino). Uma peça resultante de uma fusão não pode se fundir novamente no mesmo turno de sua criação.

Notação: Para registrar as jogadas de forma simplificada, vamos adotar as notações $B(x, y)$, $C(x, y)$, $E(x, y)$ ou $D(x, y)$, em que a letra indica o sentido do deslizamento (**C** = Cima, **B** = Baixo, **E** = Esquerda, **D** = Direita) e o par (x, y) indica a posição (linha, coluna) onde a peça com o número 2 foi inserida. A última jogada é denotada por $I(x, y)$.

$$\begin{array}{c|cc} & 1 & 2 & 3 \\ \hline 1 & 2 & & 4 \\ \hline 2 & 2 & 2 & 2 \\ \hline 3 & & & \end{array}
 \xrightarrow{D(1,2)}
 \begin{array}{c|cc} & 1 & 2 & 3 \\ \hline 1 & & 4 & 4 \\ \hline 2 & & 2 & 4 \\ \hline 3 & & & \end{array}
 \xrightarrow{E(1,1)}
 \begin{array}{c|cc} & 1 & 2 & 3 \\ \hline 1 & 2 & 8 & \\ \hline 2 & 2 & 4 & \\ \hline 3 & & & \end{array}
 \xrightarrow{E(1,3)}
 \begin{array}{c|cc} & 1 & 2 & 3 \\ \hline 1 & 2 & 8 & 2 \\ \hline 2 & 2 & 4 & \\ \hline 3 & & & \end{array}$$

(a) Se o objetivo do jogador for finalizar o jogo preenchendo as 9 casas e obtendo a **menor** soma possível de todas as peças no tabuleiro, qual será essa soma? Apresente uma configuração final com essa soma e explique como fazer uma sequência de jogadas para obter essa configuração.

(b) Se o objetivo do jogador for obter a **maior** soma possível de todas as peças no tabuleiro, qual será essa soma? Apresente uma configuração final com essa soma e justifique sua resposta.

- Suponha que Pedro começa com os 101 números 1, 2, 3, ..., 100 e 204 escritos na lousa e faz a operação até restar apenas um número. Prove que esse número **não** pode ser nem 1 e nem 2.
- Novamente, suponha que Pedro começa com os 101 números 1, 2, 3, ..., 100 e 204. Prove que existe uma sequência de operações que Pedro pode usar para deixar apenas o número 4 escrito na lousa.
- Suponha que Pedro começa com os 100 números 1, 2, 3, ..., 99 e 100. Prove que é possível Pedro fazer a operação algumas vezes até deixar apenas um número N na lousa.
- Nas condições do item anterior, qual é o menor valor possível para esse número final N ?