

48ª OLIMPIÁDA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA

Fase Única – Nível 3 (Ensino Médio)

PRIMEIRO DIA



1. Seja ABC um triângulo tal que $\angle BAC = 60^\circ$ e $AB < AC$. Sejam O e I o circuncentro e o incentro do triângulo ABC , respectivamente, e seja T o ortocentro do triângulo BIC .

a) Prove que os quatro pontos B, C, O e I pertencem a uma mesma circunferência.

b) Prove que as retas BC, OI e AT possuem um ponto em comum.

Observação: o incentro de um triângulo é o encontro das bissetrizes de seus ângulos internos, o circuncentro de um triângulo é o encontro das mediatrizes de seus lados e o ortocentro de um triângulo é o encontro das suas alturas.

2. Seja p um número primo ímpar. Determine o menor inteiro positivo k tal que existe um inteiro positivo n de modo que, quando os números $\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \dots, \binom{n}{k}$ são divididos por p , cada um dos restos $0, 1, \dots, p-1$ aparece pelo menos uma vez.

Observação: Para inteiros não negativos a e b , definimos

$$\binom{a}{b} = \begin{cases} 0 & \text{se } a < b \\ \frac{a!}{b!(a-b)!} & \text{se } a \geq b \end{cases}.$$

3. Para cada permutação $a = (a_1, a_2, a_3, \dots, a_{2026})$ de $(1, 2, 3, \dots, 2026)$, considere os números a seguir:

$$\begin{aligned} a_1 &+ 2a_2 + 3a_3 + \dots + 2025a_{2025} + 2026a_{2026}, \\ a_2 &+ 2a_3 + 3a_4 + \dots + 2025a_{2026} + 2026a_1, \\ &\vdots \\ a_{2026} &+ 2a_1 + 3a_2 + \dots + 2025a_{2024} + 2026a_{2025}. \end{aligned}$$

Defina $f(a)$ como a quantidade de números distintos entre as 2026 somas acima. Qual o menor valor possível para $f(a)$ quando a varia sobre todas as permutações de $(1, 2, 3, \dots, 2026)$?

48ª OLIMPIÁDA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA

Fase Única – Nível 3 (Ensino Médio)

SEGUNDO DIA



4. Para n inteiro positivo, defina

$$f(n) = \lfloor \sqrt{(n+1)^3} \rfloor - \lfloor \sqrt{n^3} \rfloor.$$

Prove que existem infinitos inteiros positivos n tais que $f(n+1) < f(n)$.

Observação: para um número real x , define-se $\lfloor x \rfloor$ como o maior inteiro que é menor ou igual a x . Por exemplo, $\lfloor \sqrt{1} \rfloor = \lfloor 1 \rfloor = 1$, $\lfloor \sqrt{2} \rfloor = 1$ e $\lfloor \sqrt{14} \rfloor = 3$.

5. Em um tabuleiro 100×100 , há 50 casas previamente numeradas da seguinte forma:

						50	
					.	.	
				3			
		2					
1							

Esmeralda deseja escrever números inteiros positivos em algumas das casas vazias. Ela quer que o preenchimento final do tabuleiro satisfaça a seguinte propriedade:

“não há duas casas que compartilham um lado e possuem números distintos escritos”.

Além das 50 casas já preenchidas, qual é o maior número de casas que Esmeralda pode preencher satisfazendo essa regra?

6. Seja ABC um triângulo acutângulo. Seja M o ponto médio do lado BC e sejam D e E pontos nos lados AB e AC , respectivamente, de modo que $MD = ME$. A reta perpendicular por D a AB intersecta a reta perpendicular por E a AC em P . Sejam R e S as reflexões de P por AB e AC , respectivamente. As retas BR e CS se intersectam em Q . Sejam K e L as projeções ortogonais de Q em AB e AC , respectivamente. Prove que $DL = EK$.