

48ª OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA

Fase Única – Nível Universitário

PRIMEIRO DIA



1. Sejam $\lambda \in \mathbb{R}$ com $\lambda \neq 0$ e $|\lambda| \neq 1$, e $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função tal que

(i) $f(\lambda x) = \lambda f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$;

(ii) existe e é finito o limite $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$.

Prove que existe $a \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) = ax$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

2. Seja k um inteiro ímpar positivo. Determine todas as funções $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, integráveis (a Riemann), tais que

$$\int_0^x f(t) dt = f(x)^k + f(x), \text{ para todo } x \in [0, 1].$$

3. Dado um racional $x = \frac{p}{q}$, com p, q inteiros, $q > 0$ e $\text{mdc}(p, q) = 1$, definimos $\text{den}(x) = q$.

Sejam k um inteiro positivo e $P(x) \in \mathbb{R}[x]$ um polinômio de grau k .

Prove que existe uma constante $c > 0$ tal que, para todo inteiro positivo n ,

$$\#\{x \in \mathbb{Q} : P(x) \in \mathbb{Q}, |P(x)| \leq n, \text{den}(P(x)) \leq n\} \leq c \cdot n^{3/k}.$$

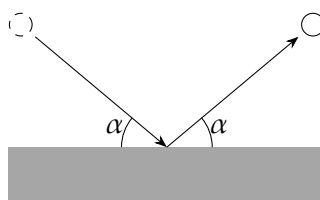
4. Considere um triângulo equilátero ABC .

Um raio de luz entra no interior do triângulo pelo vértice A e realiza n reflexões elásticas nos lados do triângulo, até sair por um dos vértices do triângulo.

(a) Calcule o número de trajetórias possíveis para $n = 2026$.

(b) Calcule o número de trajetórias possíveis para $n = 2027$.

Observação. Uma reflexão elástica é aquela em que o ângulo de incidência é igual ao ângulo de reflexão. A figura abaixo ilustra esse fenômeno.



5. Seja p um número primo e sejam $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ duas raízes distintas da equação

$$1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^p}{p!} = 0.$$

Prove que $\alpha - \beta < \mathbb{Q}$.

6. Sejam $k > 2$ um inteiro e $0 < \lambda < 1$. Identificamos $\mathbb{R}^k = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{k-1}$ e consideramos em $\mathbb{R}^k$ a norma euclidiana $|\cdot|$. Para $s > 0$, seja $B[s] = \{z \in \mathbb{R}^k : |z| \leq s\}$.

Seja $T : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$ uma transformação da forma $T(x, y) = (\lambda x, Uy)$, onde $U : \mathbb{R}^{k-1} \rightarrow \mathbb{R}^{k-1}$ é uma transformação linear tal que

$$0 < |Uv| < \lambda|v|, \text{ para todo } v \in \mathbb{R}^{k-1} \setminus \{0\}.$$

Seja $X \subset B[1]$ um conjunto satisfazendo:

(i) existe $r \in (0, 1)$ tal que $T(X) \cap B[r] = X \cap B[r]$;

(ii) para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta(\varepsilon) > 0$ tal que, para todo $(x, y) \in X$, se $|y| > \varepsilon$ então $|x| > \delta(\varepsilon)$.

Prove que existem constantes $C > 0$ e $\alpha > 1$ tais que $|y| \leq C|x|^\alpha$ para todo $(x, y) \in X$.